**UNIVERSIDADE DE LISBOA**

**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO**

# CÁLCULO MENTAL COM NÚMEROS RACIONAIS: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE

**Renata Anjos Carvalho Carrapiço**

Orientador: Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte

**Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática**

2016

# UNIVERSIDADE DE LISBOA

# INSTITUTO DE EDUCAÇÃO


# CÁLCULO MENTAL COM NÚMEROS RACIONAIS:

# UM ESTUDO COM ALUNOS DO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE


**Renata Anjos Carvalho Carrapiço**

Orientador: Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte


Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática

Júri:

Presidente: Doutor Henrique Manuel Alonso da Costa Guimarães, Professor Associado e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Vogais:

Doutora Joana Maria Leitão Brocardo, Professora Coordenadora, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Doutora Margarida Maria Amaro Teixeira Rodrigues, Professora Adjunta, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa
Doutor João Pedro Mendes da Ponte, Professor Catedrático, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Doutora Maria Leonor de Almeida Domingos dos Santos, Professora Associada com Agregação, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Doutor Henrique Manuel Alonso da Costa Guimarães, Professor Associado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques, Professora Auxiliar, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;


Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia pela atribuição de uma bolsa com a referência SFRH/BD/69413/2010.

2016

# Agradecimentos

Ao Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte pelo interesse, pelas sugestões e críticas pertinentes e pela disponibilidade com que me apoiou no desenvolvimento deste estudo.

À Catarina pelo apoio na fase final deste trabalho e por superar muitas vezes a ausência da mãe, que embora fisicamente longe sempre esteve perto.

Ao Pedro pelo apoio e respeito pelas minhas opções profissionais e à Arminda e ao António pelo apoio familiar dado nos meus momentos de ausência.

Às colegas, que designei por Margarida à Laura, pela amizade, disponibilidade e empenho que manifestaram na concretização deste estudo, pois sem elas este trabalho não teria sido possível de realizar.

Aos alunos pelo interesse e empenho manifestado na participação no estudo.

Ao Ministério da Educação e Ciência pela conceção de equiparação a bolseiro, sem a qual teria sido muito difícil desenvolver este trabalho.

À Fundação para a Ciência e a Tecnologia, pela bolsa que me concedeu para a realização deste doutoramento (SFRH / BD / 69413 / 2010).

Aos colegas e amigos que se mantiveram perto, apesar de muitas vezes longe e que de forma incondicional acompanharam o desenvolvimento deste trabalho.

… e a todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuíram para a minha reflexão, provocando-me e incentivando-me a continuar.

Catarina e Pedro … este trabalho também é vosso!

# Resumo

Este estudo visa compreender as estratégias e erros que os alunos do 6.º ano evidenciam em tarefas de cálculo mental e como evoluem estas estratégias ao longo de uma experiência de ensino centrada em tarefas de cálculo mental com números racionais positivos envolvendo as quatro operações em contextos matemáticos e não matemáticos e na discussão das suas estratégias.

O quadro concetual foca aspetos relacionados com o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos, nomeadamente o uso de factos numéricos, regras memorizadas, relações numéricas e das representações mentais (modelos mentais, imagens e representações proposicionais) subjacentes ao uso destes factos, regras e relações. O estudo segue uma metodologia de *design research*, no quadro do qual foi construída uma experiência de ensino realizada em dois ciclos de experimentação. A comunicação na sala de aula, nomeadamente as discussões coletivas, desempenha um papel essencial nas dinâmicas desenvolvidas no trabalho com cálculo mental. Participam neste estudo duas professoras, Margarida e Laura e um total de 39 alunos. A recolha de dados foi realizada com recurso a observação direta e participante da investigadora, gravações vídeo de episódios de aula e áudio das reuniões de preparação e reflexão pós-aula, recolha documental, notas de campo e entrevistas.

Nas suas estratégias, os alunos recorrem maioritariamente a relações numéricas em todas as representações dos números racionais e ao uso de factos numéricos e regras memorizadas na representação fracionária numa fase inicial e pontualmente, ao longo da experiência, nas representações decimal e percentagem. Estas estratégias sugerem o recurso, por parte dos alunos, a representações proposicionais envolvendo relações numéricas, embora também se identifiquem modelos mentais e imagens. Modelos e imagens mentais parecem associar-se mais a estratégias de factos numéricos e regras memorizadas. Os erros dos alunos são essencialmente de origem concetual, embora se identifiquem erros percetuais e de procedimento. As estratégias dos alunos começam por ser mais focadas em factos e regras, na representação fracionária, para evoluir para estratégias de relações numéricas com as quatro operações dos números racionais, usando tanto a representação em fração como a decimal e a percentagem.

**Palavras-chave:** Cálculo mental, números racionais, estratégias dos alunos, erros dos alunos.

# Abstract

This study aims to understand grade 6 students' strategies and errors in mental computation tasks, and how these strategies evolve during a teaching experiment focused on mental computation tasks with positive rational numbers involving the four operations and mathematical and non-mathematical contexts and the discussion of students' strategies. The conceptual framework focuses on aspects related to the development of students' mental computation strategies, mainly, the use of numerical facts, memorized rules, numerical relationships, and mental representations (mental models, images, and propositional representations) underlying the use of these facts, rules, and relationships. The study follows a design research approach, where a teaching experiment was built and carried out in two experimental cycles. The communication in the classroom, especially whole class discussions, plays an essential role in the development of the mental computation processes. The participants in this study were two teachers, Margarida and Laura and 39 students. Data was collected using direct observation, with the researcher acting as a participant observer, video and audio recordings of classroom episodes, audio recordings of preparatory meetings and after-class reflections, document collection, field notes, and interviews.

In their strategies, at the beginning of the teaching experiment, the students mainly use numerical relationships in all representations of rational numbers and numerical facts and memorized rules in fraction representation. Along the teaching experiment, strategies based on facts and rules promptly appear in decimal and percent representations. These strategies suggest the use of propositional representations in numerical relationships, but mental models and images can also be identified. Mental models and images appear to be more associated with strategies based on numerical facts and memorized rules. Students' errors are essentially conceptual, although perceptual and procedural errors can also be identified. Their strategies begin to be more focused on facts and rules, in fraction representation, and to evolve to strategies based on numerical relationships at the end of the experiment with the four operations of rational numbers, when using fractions, decimal and percent representation.

**Keywords**: Mental computation, rational numbers, students' strategies, students' errors.

# Índice

**CAPÍTULO 1: Introdução........................................................................................1**

1.1. Conceito e importância do cálculo mental..........................................................1

1.2. Estudos internacionais e nacionais sobre cálculo mental ....................................3

1.3. Cálculo mental no currículo de Matemática em alguns países ............................7

1.4. Motivação, objetivos e questões do estudo.........................................................9

**CAPÍTULO 2: Números racionais ………………………………………………… 11**

2.1. Os números racionais no Programa de Matemática em Portugal .......................11

2.2. Números racionais: Sentido de número e de operação, representações e significados..13

2.2.1. Sentido de número e sentido de operação.................................................13

2.2.2. Representações e significados de um número racional.............................19

2.2.3. A aprendizagem dos números racionais e os erros dos alunos .................26

2.3. Aprendizagem das operações com números racionais......................................40

2.3.1. Aspetos gerais ............................................................................................40

2.3.2. Adição e subtração .....................................................................................42

2.3.3. Multiplicação e divisão ..............................................................................45

2.3.4. Números racionais e pensamento relacional .............................................55

2.4. Síntese ................................................................................................................59

**CAPÍTULO 3: Cálculo mental ..........................................................................63**

3.1. Estratégias de cálculo mental..............................................................................63

3.1.1. Estratégias e etapas de cálculo mental ......................................................64

3.1.2. Cálculo mental com números naturais ......................................................65

3.1.3. Cálculo mental com números racionais .....................................................68

3.1.4. Cálculo mental com números naturais e racionais: semelhanças e diferenças ...............................................................................................73

3.2. Memória e representações mentais no cálculo mental.......................................74

3.2.1. Módulos neurológicos e o papel da memória no cálculo mental ...............74

3.2.2. Representações mentais..............................................................................78

3.3. Ensinar a calcular mentalmente ........................................................................83
3.3.1. Aprendizagem do cálculo mental ............................................................84
3.3.2. Planificar o ensino do cálculo mental na sala de aula ...............................86
3.3.3. O papel do professor ...............................................................................94
3.4. Síntese ...............................................................................................................97

**CAPÍTULO 4: Metodologia de investigação ........................................................ 101**

4.1. Opções metodológicas ...................................................................................101
4.1.1. Investigação qualitativa e interpretativa..................................................102
4.1.2. *Design Research*.......................................................................................103
4.1.2.1. Finalidade ...........................................................................................103
4.1.2.2. Estrutura .............................................................................................105
4.1.2.2.1. Fase I – Preparação ...........................................................................105
4.1.2.2.2. Fase II - Experimentação na sala de aula..............................................113
4.1.2.2.3. Fase III - Análise retrospetiva...............................................................118
4.2. Participantes.......................................................................................................122
4.2.1. A professora Margarida............................................................................122
4.2.2. A professora Laura ...................................................................................123
4.2.3. A turma de Margarida ..............................................................................123
4.2.4. A turma de Laura......................................................................................125
4.3. Questões éticas...................................................................................................126
4.4. Credibilidade do estudo ......................................................................................128

**CAPÍTULO 5: Preparação ......................................................................................131**

5.1. O estudo preliminar ...........................................................................................131
5.1.1. Protótipo da experiência de ensino...........................................................131
5.1.2. Recolha e análise de dados.......................................................................133
5.1.3. Discussão de resultados............................................................................134
5.1.4. Conclusões do estudo preliminar ............................................................137
5.1.5. Implicações para a preparação da experiência de enino .........................139
5.2. Preparação da experiência de ensino .................................................................140
5.2.1. Aspetos gerais ..........................................................................................140
5.2.2. A experiência de ensino ...........................................................................141
5.2.2.1. Conjeturas de ensino-aprendizagem e quadro teórico.....................141
5.2.2.2. Objetivos de aprendizagem e capacidades transversais .................143

5.2.2.3. *Design das tarefas*: Princípios orientadores ....................................145
5.2.2.3.1. Proposta de tarefas ....................................................................151
5.2.2.4. Condução da experiência de ensino..................................................162

**CAPÍTULO 6: Experimentação na sala de aula ..................................................... 165**

6.1. Primeiro ciclo de experimentação.........................................................................165
6.1.1. Aspetos gerais ....................................................................................................165
6.1.2. Refinamento do *design* da experiência de ensino .........................................167
6.1.2.1. As tarefas ....................................................................................................169
6.1.2.2. Gestão da discussão na sala de aula.......................................................174
6.1.3. Refinamento do quadro concetual................................................................188
6.1.4. Revisão da conjetura de ensino-aprendizagem ...........................................189
6.2. Segundo ciclo de experimentação.........................................................................190
6.2.1. Aspetos gerais ....................................................................................................190
6.2.2. Refinamento do *design* da experiência de ensino .........................................192
6.2.2.1. As tarefas ....................................................................................................192
6.2.2.2. Gestão da discussão na sala de aula.......................................................198
6.2.3. Refinamento do quadro concetual................................................................216
6.3. Síntese reflexiva.........................................................................................................219

**CAPÍTULO 7: Estratégias de cálculo mental dos alunos....................................... 227**

7.1. Estratégias dos alunos no cálculo mental com números racionais ...................227
7.1.1. Estratégias em questões com Frações ..........................................................229
7.1.2. Questões com numerais decimais ...................................................................249
7.1.3. Estratégias em questões com percentagens...................................................263
7.1.4. Estratégias em questões com duas representações.....................................277
7.2. Síntese.........................................................................................................................286

**CAPÍTULO 8: Erros dos alunos no cálculo mental ................................................ 291**

8.1. Erros dos alunos no cálculo mental com números racionais ...........................291
8.1.1. Erros em questões com Frações ....................................................................292
8.1.2. Erros em questões com numerais decimais...................................................314
8.1.3. Erros em questões com percentagens............................................................332
8.1.4. Erros em questões com duas representações...............................................340
8.2. Síntese.........................................................................................................................347

**CAPÍTULO 9: Avaliação da experiência de ensino ................................................ 353**

9.1. Avaliação do *design* da experiência de ensino ................................................353

9.2. Avaliação da realização da experiência de ensino...........................................362

**CAPÍTULO 10: Conclusões.......................................................................... 373**

10.1. Estratégias de cálculo mental dos alunos com números racionais.................373

10.2. Erros dos alunos no cálculo mental com números racionais ..........................387

10.3. Evolução das estratégias de cálculo mental dos alunos.................................399

11. Considerações finais .........................................................................................407

**REFERÊNCIAS BIBLIOGÁFICAS ...........................................................................413**

**ANEXOS .................................................................................................................421**

# Índice de Tabelas

Tabela 1. Número de alunos que referiu cada uma das estratégias nas tarefas de cálculo mental ............................................................................................................134
Tabela 2. Número de alunos que manifestou erros, nas tarefas de cálculo mental ............................................................................................................136
Tabela 3. Calendarização de sessões de preparação de tarefas e reflexão pós-aula no ciclo de experimentação I ..........................................................................................166
Tabela 4. Calendarização de sessões de preparação de tarefas e reflexão pós-aula no ciclo de experimentação II.........................................................................................191

# Índice de Figuras

Figura 1. Esquema concetual para a aprendizagem dos números racionais (Behr et al., 1983)........................................................23
Figura 2. Mapa concetual para o cálculo mental (Heirdsfield, 2011) ............................ 90
Figura 3. Quadro teórico para o desenvolvimento e apropriação de estratégias de cálculo mental com números racionais ........................................................142
Figura 4. Proposta de tarefa 1 para o ciclo de experimentação I.................................152
Figura 5. Proposta de tarefa 2 para o ciclo de experimentação I.................................153
Figura 6. Proposta de tarefa 3 para o ciclo de experimentação I.................................154
Figura 7. Proposta de tarefa 4 para o ciclo de experimentação I.................................155
Figura 8. Proposta de tarefa 5 para o ciclo de experimentação I.................................155
Figura 9. Proposta de tarefa 6 para o ciclo de experimentação I.................................157
Figura 10. Proposta de tarefa 7 para o ciclo de experimentação I...............................158
Figura 11. Proposta de tarefa 8 para o ciclo de experimentação I...............................159
Figura 12. Proposta de tarefa 9 para o ciclo de experimentação I...............................160
Figura 13. Tarefa 10 do ciclo de experimentação I.....................................................162
Figura 14. Situação h) da tarefa 6 para o ciclo de experimentação I............................169
Figura 15. Tarefa 8 para o ciclo de experimentação I..................................................170
Figura 16. Tarefa extra para o ciclo de experimentação I ............................................171
Figura 17. Tarefa 7 para o ciclo de experimentação I..................................................171
Figura 18. Tarefa 9 para o ciclo de experimentação I..................................................171
Figura 19. Tarefa 10 para o ciclo de experimentação I................................................172
Figura 20. Estratégia de José para resolver o problema *Descontos de descontos*.........184
Figura 21. Estratégia de Pedro para resolver o problema *Descontos de descontos*.......185
Figura 22. Segunda versão do quadro concetual.........................................................189
Figura 23. Tarefa 1 para o ciclo de experimentação II.................................................194
Figura 24. Tarefa 2 para o ciclo de experimentação II.................................................194
Figura 25. Tarefa 4 para o ciclo de experimentação II.................................................194

Figura 26. Tarefa 5 para o ciclo de experimentação II ................................................196
Figura 27. Tarefa 6 para o ciclo de experimentação II ................................................196
Figura 28. Tarefa 9 para o ciclo de experimentação II ................................................197
Figura 29. Tarefa 10 para o ciclo de experimentação II ..............................................198
Figura 30. Resumo de Acácio sobre as estratégias discutidas na tarefa 4.....................204
Figura 31. Resumo de Inês sobre as estratégias discutidas na tarefa 8 .........................204
Figura 32. Respostas de Bernardo e Luís a uma questão da ficha de avaliação............211
Figura 33. Terceira versão do quadro concetual............................................................217
Figura 34. Quarta versão do quadro concetual ..............................................................218

# Índice de Quadros

Quadro 1. Esquemas e operações mentais associadas no trabalho com frações e exemplos de tarefas onde podem ser usados (Norton & McCloskey, 2009)....................31
Quadro 2. Calendarização do estudo ..........................................................................106
Quadro 3. Aspetos tidos em conta no estudo preliminar..............................................108
Quadro 4. Aspetos tidos em conta na fase de planificação da experiência de ensino...109
Quadro 5. Relação entre os instrumentos de recolha de dados e objetivo da análise de dados...........................................................................................................................120
Quadro 6. Objetivos gerais e específicos de aprendizagem da experiência de ensino (de acordo com ME, 2007).................................................................................................144
Quadro 7. Síntese dos aspetos mais significativos do ciclo de experimentação I.........168
Quadro 8. Síntese dos aspetos mais significativos do ciclo de experimentação II........193
Quadro 9. Questões de cálculo mental com a representação fracionária ......................229
Quadro 10. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com frações .....................................................................................230
Quadro 11. Estratégias para a resolução de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$........................................................231
Quadro 12. Estratégia para a resolução de $\frac{1}{2}+?=1$....................................................233
Quadro 13. Estratégia para a resolução de $\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$........................................................234
Quadro 14. Estratégia para a resolução de $?-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$..................................................235
Quadro 15. Estratégias para a resolução de $\frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$....................................................236
Quadro 16. Estratégias para a resolução de $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$........................................................237
Quadro 17. Estratégia para a resolução da situação do bolo de chocolate ....................239
Quadro 18. Estratégias para a resolução **de** $5\times\frac{1}{5}$ ........................................................240
Quadro 19. Estratégias para a resolução de $\frac{2}{3}\times?=1$ ...................................................241
Quadro 20. Estratégias para a resolução de $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$........................................................242
Quadro 21. Estratégia para a resolução de $\frac{1}{3}\,de\,\frac{1}{3}$........................................................243

Quadro 22. Estratégias para a resolução de $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$ ........................................................245

Quadro 23. Estratégia para a resolução de $\frac{6}{8} \div \frac{3}{4}$ ........................................................246

Quadro 24. Estratégias para a resolução de $\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$ ..................................................247

Quadro 25. Estratégia para a resolução de $\frac{3}{4} \div ? = \frac{1}{4}$ ....................................................248

Quadro 26. Questões de cálculo mental com a representação decimal .........................249

Quadro 27. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com numerais decimais ................................................................250

Quadro 28. Estratégias para a resolução de $0{,}5 + 0{,}25$ ..............................................251

Quadro 29. Estratégias para a resolução de $1{,}9 - 0{,}50$ ..............................................253

Quadro 30. Estratégia para a resolução da situação da amplitude térmica...................254

Quadro 31. Estratégias para a resolução de $1{,}25 - ? = 0{,}75$ ........................................254

Quadro 32. Estratégias para a resolução de $0{,}25 \times 4$ ..................................................255

Quadro 33. Estratégias para a resolução de $? \times 0{,}4 = 0{,}16$ .........................................257

Quadro 34. Estratégia para a resolução de $12{,}2 \div 0{,}5$ ................................................258

Quadro 35. Estratégia para a resolução de $4{,}2 \times 0{,}2$ ..................................................259

Quadro 36. Estratégia para a resolução de $? \times 0{,}5 = 30$ .............................................260

Quadro 37. Estratégia para a resolução de $0{,}82 \div ? = 1{,}64$ .........................................261

Quadro 38. Estratégias para a resolução da situação do cálculo da área da base de um cilindro.......................................................................................................... 262

Quadro 39. Questões de cálculo mental analisadas com a representação percentagem 263

Quadro 40. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com percentagem ........................................................................264

Quadro 41. Estratégia para a resolução de $90\%\ de\ 30$ ................................................265

Quadro 42. Estratégia para a resolução de $50\%\ de\ ? = 60$ .........................................267

Quadro 43. Estratégias para a resolução de $25\%\ de\ 20$ .............................................268

Quadro 44. Estratégias para a resolução de $5\%\ de\ ? = 3$ ...........................................270

Quadro 45. Estratégia para a resolução de $20\%\ de\ 50$ ................................................272

Quadro 46. Estratégias para a resolução de $\_\_\%\ de 30 = 0{,}3$ ....................................274

Quadro 47. Estratégia para a resolução de $20\%\ de\ ? = 8$ ............................................275

Quadro 48. Estratégias para a resolução de $75\%\ de\ 20$ .............................................276

Quadro 49. Questões de cálculo mental várias representações dos números racionais 278

Quadro 50. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com duas representações ....................278
Quadro 51. Estratégias para a resolução de $\frac{3}{4}+0,5$ ....................280
Quadro 52. Estratégia para a resolução de $2,2-?=\frac{1}{5}$ ....................281
Quadro 53. Estratégia para a resolução de $0,25\ de\ ?=10$ ....................282
Quadro 54. Estratégia para a resolução da situação da tina....................284
Quadro 55. Estratégia para a resolução da situação da capacidade do sólido B ....................284
Quadro 56. Estratégia para a resolução da situação dos copos de refresco....................285
Quadro 57. Questões de cálculo mental analisadas com a representação fracionária...293
Quadro 58. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com frações ....................294
Quadro 59. Erro na questão $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ ....................295
Quadro 60. Erro na questão $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}$ ....................296
Quadro 61. Erro na questão $?-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$ ....................298
Quadro 62. Erros na questão $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$....................299
Quadro 63. Erro na questão $\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}$....................301
Quadro 64. Erro na questão $\frac{3}{4}\times?=1$ ....................303
Quadro 65. Erro na questão $\frac{1}{4}\div?=\frac{1}{2}$....................305
Quadro 66. Erro para a questão $?\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ ....................307
Quadro 67. Erro na questão $\frac{3}{4}\div?=\frac{1}{4}$....................309
Quadro 68. Erro na questão $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$....................311
Quadro 69. Erros na questão $\frac{1}{3}\,de\,\frac{1}{3}$....................312
Quadro 70. Erros na situação dos copos de refresco ....................314
Quadro 71. Questões de cálculo mental analisadas com a representação decimal........315
Quadro 72. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com numerais decimais....................316
Quadro 73. Erros na questão $?-4,3=0,5$....................317
Quadro 74. Erros na questão $0,6+0,04$ ....................318
Quadro 75. Erro na questão $25,5\times?=5,1$ ....................319

Quadro 76. Erro na questão $4,2 \times 0,2$ ........ 320
Quadro 77. Erro na questão $0,6 \times 0,30$ ........ 322
Quadro 78. Erro na questão $2,1 \div ? = 8,4$ ........ 325
Quadro 79. Erro na questão $0,14 \div 0,2$ ........ 325
Quadro 80. Erros na questão $? \times 0,5 = 30$ ........ 327
Quadro 81. Erro na questão $0,75 \div ? = 3$ ........ 329
Quadro 82. Erros para a questão $? \times ? = 0,36$ ........ 331
Quadro 83. Questões de cálculo mental analisadas com a representação percentagem 332
Quadro 84. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com a representação percentagem ........ 333
Quadro 85. Erros na questão $10\%\ de\ ? = 5$ ........ 334
Quadro 86. Erro na questão $75\%\ de\ 80$ ........ 335
Quadro 87. Erro na questão $5\%\ de\ ? = 3$ ........ 337
Quadro 88. Erro na questão $90\%\ de\ 30$ ........ 337
Quadro 89. Erros na questão $\_\%\ de\ 30 = 0,3$ ........ 340
Quadro 90. Questões de cálculo mental analisadas com duas representações dos números racionais ........ 341
Quadro 91. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com duas representações dos números racionais ........ 341
Quadro 92. Erro na questão $\frac{1}{5} + 0,3$ ........ 342
Quadro 93. Erro na questão $0,25\ de\ ? = 10$ ........ 343
Quadro 94. Erros na situação da capacidade do sólido B ........ 345
Quadro 95. Erro na situação da saia da Sofia ........ 346
Quadro 96. Questões corretas apresentadas por José ao longo do ciclo de experimentação I ........ 356
Quadro 97. Estratégias de José às questões da entrevista final ........ 357
Quadro 98. Questões corretas apresentadas por Rui ao longo do ciclo de experimentação II ........ 359
Quadro 99. Estratégias de Rui a questões da entrevista final ........ 361
Quadro 100. Estratégias de factos numéricos. ........ 374
Quadro 101. Estratégias de regras memorizadas. ........ 377
Quadro 102. Estratégias de relações numéricas. ........ 380
Quadro 103. Erros percetuais. ........ 388

Quadro 104. Erros procedimentais. ....................................................................390
Quadro 105. Erros concetuais...........................................................................391
Quadro 106. Categorias de estratégias dos alunos ao longo da experiência de ensino. 401
Quadro 107. Evolução das estratégias dos alunos ao longo da experiência de ensino..403

# Capítulo 1

# Introdução

Neste capítulo começo por discutir o conceito e importância do cálculo mental e apresento a forma como este surge em alguns estudos internacionais e nacionais e no currículo de Matemática de diversos países. De seguida, apresento as minhas motivações pessoais e o propósito geral, objetivo e questões que orientam este estudo.

## 1.1. Conceito e importância do cálculo mental

Para compreender a importância do desenvolvimento do cálculo mental é preciso começar por discutir o que é calcular mentalmente, o que envolve e que papel tem na aprendizagem da Matemática. O que se entende por cálculo mental tem sido objeto de alguma controvérsia. Enquanto para uns é um cálculo efetuado exclusivamente "de cabeça", outros defendem que pode envolver registos escritos.

Na verdade, o conceito de cálculo mental tem sido alvo de diversas interpretações. Para Taton (1969) é errado limitar o cálculo mental a operações efetuadas de cabeça, uma vez que na realização de operações através de algoritmos por cálculo escrito, o cálculo mental também está presente. Salienta ainda que o cálculo escrito executado de memória não é mais do que uma forma de cálculo mental adaptado. Sowder (1990) apresenta um conceito de cálculo mental centrado mais em processos mentais do que escritos, referindo que o cálculo mental refere-se ao cálculo realizado de cabeça, em que o individuo não tem acesso a papel e lápis. No entanto, a autora considera que muitas vezes o cálculo mental pode ser combinado com papel e lápis ou mesmo com a calculadora. Numa perspetiva diferente, Reys, Reys, Nohda e

Emori (1995) consideram que o cálculo mental refere-se aos processos mentais usados para calcular um resultado aritmético exato sem a ajuda de dispositivos externos. Retomando ideias de Taton (1969), Buys (2001) e Bourdenet (2007) defendem que o cálculo mental não se restringe ao operar "de cabeça" e que a utilização de papel e lápis para cálculos intermédios pode ser útil.

Na década de 80 começa a emergir outro conceito associado ao cálculo mental – o sentido de número. Na perspetiva de McIntosh, Reys e Reys (1992), quando um aluno escolhe, desenvolve e usa métodos de cálculo mental evidencia sentido de número, que se manifesta de diversas formas à medida que o aluno vai evoluindo no seu pensamento matemático. No entanto, estes autores centram-se mais na análise e discussão do sentido de número do que no cálculo mental. Pelo seu lado, Buys (2001) centra o seu conceito de cálculo mental na perspetiva de que cálculo mental e sentido de número estão fortemente relacionados. O autor defende que o cálculo mental possui três caraterísticas importantes: (i) opera com números e não com dígitos; (ii) usa propriedades elementares das operações e relações numéricas; e (iii) permite o recurso a registos intermédios em papel. Seguindo uma perspetiva idêntica, Noteboom, Boklove & Nelissen (2001) definem cálculo mental como sendo um cálculo perspicaz realizado mentalmente e não com recurso à representação escrita dos números. Envolve o uso de factos memorizados e propriedades dos números e das operações e a forma como estes se relacionam. Estes autores acrescentam ainda que não é calcular de cabeça, mas sim usar a cabeça para realizar cálculos e escrever certos passos se necessário. Neste estudo sigo o entendimento que o cálculo mental é um cálculo exato, efetuado mentalmente de forma rápida e eficaz, que recorre a representações mentais usando factos numéricos, regras memorizadas e relações entre números e operações, e onde é possível usar registos intermédios em papel.

O rápido avanço da tecnologia tem contribuído para a desvalorização de competências básicas de cálculo quando deveria ter acontecido o contrário. Como refere Bourdenet (2007), com o uso crescente da calculadora, perdeu-se a hábito de calcular mentalmente, remetendo para segundo plano a aprendizagem de competências básicas de cálculo. Os alunos têm cada vez menos capacidade de cálculo mental e mais dificuldade com as operações básicas. Por isso, como argumenta Ralston (1999), é preciso pensar numa Aritmética que articule o cálculo mental e o uso da calculadora de forma a desenvolver nos alunos o sentido crítico e flexibilidade nas operações com números.

A importância do desenvolvimento do cálculo mental nos alunos é referida por diversos autores. Taton (1969) salienta que o cálculo mental desenvolve nas crianças noções de ordem (pois permite a verificação das ordens de grandeza de resultados e a rápida verificação de valores aproximados), de lógica, de reflexão e de memória, contribuindo para a sua formação intelectual e fornecendo-lhes ferramentas para efetuarem cálculos simples sem recurso a ajuda escrita e, deste modo, preparando-as para o dia-a-dia. Refere ainda que, através do cálculo mental, a criança trabalha simultaneamente a memória e a concentração, desenvolvendo a memória dos números, o que a obriga a tomar um contacto mais próximo com a individualidade específica de cada número, levando-a, progressivamente, a empregar simplificações operatórias. Na perspetiva de Buys (2001), o cálculo mental permite à criança calcular livremente, sem restrições, levando-a a usar estratégias que já possui, usar números de referência e desenvolver novas estratégias de cálculo. Complementando os aspetos enumerados por Taton (1969) e Buys (2001), Raslton (1999) acrescenta que um currículo que valorize o cálculo mental permite que as crianças construam conhecimentos de Aritmética através do trabalho e discussão de estratégias de cálculo mental, dando sentido aos números e às operações de forma flexível e pessoal.

O cálculo mental é uma capacidade que promove não só o desenvolvimento de outras capacidades transversais úteis para a vida do indivíduo como o raciocínio e a comunicação, mas também a destreza na utilização de números, operações e suas propriedades. O seu ensino deve ser devidamente pensado, planeado e desenvolvido. É preciso perceber como se pode ensinar cálculo mental para que se possa ajudar as crianças a desenvolver as suas capacidades neste campo e para que estas as possam aplicar de forma flexível, quando necessário.

## 1.2. Estudos internacionais e nacionais sobre cálculo mental

Ao nível internacional, as referências ao cálculo mental centram-se, maioritariamente, no desenvolvimento de estratégias de cálculo com números naturais (e.g., Buys, 2001; Gálvez, Cosmelli, Cubillos, Leger, Mena, Tanter, Flores, Luci, Montoya e Soto-Andrade, 2011; Heirdsfield, 2005, 2011; Thompson, 1999; Threlfall, 2002, 2009). Algumas investigações relacionam diretamente o cálculo mental e o uso da calculadora. Por exemplo, Ruthven (2009), a propósito do projeto *Calculator Aware Number,* cujo objetivo era integrar a calculadora no ensino como forma de proporcionar uma nova abordagem à aprendizagem dos números, refere que, a longo prazo, o seu uso teve impacto no desenvolvimento de capacidades de cálculo mental dos alunos.

A partir do final da década de setenta, nos Estados Unidos, *o Rational Number Project* (1979) realizou investigações sobre a aprendizagem dos números racionais, tendo publicado em 2009 dois trabalhos de investigação, *Rational Number Project: Initial fraction ideas* e *Fraction operations and initial decimal ideas*. Outros autores (e.g., Callingham & Watson 2004; Caney & Watson, 2003; McIntosh, 2007; Murphy, 2004) reforçam a importância de se continuar a investigar a aprendizagem dos números racionais, que se revela especialmente difícil para os alunos, realçando a importância do cálculo mental no desenvolvimento do sentido do número, da capacidade crítica e da capacidade de estimação.

A investigação sobre cálculo mental em Portugal é escassa e quase inexistente quando se refere especificamente a cálculo mental com números racionais. De referir, no entanto, os estudos de Guedes (2008), Morais (2011) e Oliveira (2013) sobre cálculo mental com números naturais no 1.º ciclo. O estudo de Guedes (2008) teve como objetivo perceber como evoluíam as capacidades de cálculo com números naturais de alunos do 3.º ano de escolaridade. A autora verificou que os alunos manifestaram inicialmente dificuldades em calcular mentalmente, em transmitir a forma como efetuavam o cálculo mental e em fazer registos intermédios usando papel e lápis. Ao longo do estudo, os alunos foram progressivamente usando mais estratégias no cálculo mental manifestando melhor compreensão dos números. A autora salienta que um dos momentos mais ricos em sala de aula foi o da partilha de estratégias na turma, que considerou como facilitador do desenvolvimento de estratégias de cálculo mental. Morais (2011), estudou o modo como os alunos de 1.º ano de escolaridade desenvolveram estratégias de cálculo mental, num contexto de resolução de problemas de adição e subtração. Segundo a autora as estratégias de cálculo mental usadas pelos alunos evoluíram de estratégias elementares baseadas em contagem e na utilização de factos numéricos, para estratégias aditivas ou subtrativas das categorias 1010 e N10. Alerta ainda para a necessidade do professor promover ambientes de aprendizagem enriquecedores e promotores do desenvolvimento de estratégias complexas de cálculo mental e não apenas estratégias de cálculo elementares. O estudo de Oliveira (2013) pretendia compreender as estratégias de cálculo mental de alunos do 2.º ano de escolaridade na resolução de problemas de adição e subtração com números naturais. Segundo o autor, os alunos utilizaram uma grande diversidade de estratégias, que se relacionaram com os significados dos problemas, onde a utilização de tarefas em contexto fez emergir, por parte dos alunos, mais conhecimentos sobre relações entre operações, recorrendo estes diversas vezes à operação inversa, algo pouco evidente na resolução de expressões numéricas, onde o sinal de operação parece ter influenciado as resoluções dos alunos. Acrescenta ainda que os alunos não evoluíram todos da mesma forma mas que alguns foram progressivamente recorrendo a estratégias mais eficazes. Destes três estudos emergem três ideias que importa realçar, nomeadamente a necessidade do professor criar um ambiente de aprendizagem propício ao desenvolvimento de estratégias complexas de cálculo mental dos alunos (Morais, 2011), a importância de contemplar diferentes contextos nas tarefas de cálculo mental (Oliveira, 2013) e por fim a promoção da partilha de estratégias na sala de aula como aspeto facilitador do desenvolvimento do cálculo mental dos alunos (Guedes, 2008).

No que se refere ainda a estudos nacionais, Brocardo e Serrazina (2008) a propósito do projeto Sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática, referem a importância da capacidade de calcular mentalmente. Esta foi uma necessidade que surgiu naturalmente da prática dos professores que, ao realizarem tarefas com os seus alunos, passaram a dar mais atenção ao cálculo mental e a retardar a introdução dos algoritmos. Segundo as autoras, "para que os professores trabalhem de modo sistemático o cálculo mental, é importante clarificar como este trabalho deve ser feito e o que é de esperar que os alunos consigam fazer" (p. 107). A par da clarificação do tipo de trabalho a desenvolver neste âmbito, consideram que importa também discutir o que se entende por cálculo mental e de que forma as estratégias de cálculo podem contribuir para a compreensão dos números. Cardoso (2010) num estudo que realizou sobre o conhecimento matemático e didático, com incidência no pensamento algébrico, de professores do 1.º ciclo do ensino básico e sua relação com um programa de formação contínua, destaca a importância de desenvolver o cálculo mental e sentido de número como forma de promover o pensamento algébrico.

Relativamente à aprendizagem dos números racionais, alguns autores (e.g., Albergaria & Ponte, 2008; Garcia, 2008; Monteiro & Pinto, 2005; Pinto 2011) salientam a importância do desenvolvimento da capacidade de cálculo e do sentido de número e de operação, valorizando o cálculo mental. Reportando-se ao uso da calculadora e ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, Albergaria e Ponte (2008) referem que o uso crítico da calculadora requer um forte desenvolvimento do cálculo mental dos alunos.

A nível internacional, são diversos os autores que fazem recomendações para futuras áreas de investigação no âmbito do cálculo mental. Por exemplo, McIntosh (2007) considera importante perceber que tipo de estratégias de cálculo mental e escrito utilizam os alunos para que os professores se possam concentrar no ensino de estratégias eficientes, ideia também defendida por Brocardo e Serrazina (2008). A par disto, estudos realizados por Callingham e Watson (2004) e Caney e Watson (2003), realçam a necessidade de investigação sobre as estratégias de cálculo mental e as relações usadas pelos alunos quando resolvem problemas que envolvam números racionais e a importância destes contributos para o trabalho dos professores no ensino destes números.

Para Caney e Watson (2003), a investigação deve analisar as respostas dos alunos, comparar estratégias produzindo sugestões para os professores poderem ajudar os alunos a fortalecer estratégias de cálculo mental. Segundo as autoras, o seu estudo revelou que a maioria das estratégias de cálculo mental com números racionais dos alunos foram desenvolvidas por eles, uma vez que a prática dos professores na sala de aula nunca os levou a explicar a forma como pensaram. Esta ideia de que os alunos possuem as suas estratégias e o ensino devidamente orientado ajuda-os a ampliá-las e fortalecê-las também emerge num estudo realizado por Thompson (1999).

Deste modo, existem estudos que sugerem que os alunos dispõem de estratégias próprias de cálculo mental, sendo necessário trabalhá-las e aprofundá-las. Isto mostra que o reconhecimento, por parte dos professores, da importância do cálculo mental é fundamental para que se possa continuar a desenvolver esta capacidade alargando-a a outros conjuntos numéricos que não apenas os números naturais.

## 1.3. Cálculo mental no currículo de Matemática em alguns países

Numa sociedade marcada pela tecnologia e pela exigência, cabe à escola preparar cidadãos críticos e capazes de tomar decisões rápidas e eficazes. O trabalho com números é fundamental na vida quotidiana e a sua importância tem-se refletido nos currículos de Matemática em todo o mundo.

Ao longo do tempo, os números e as operações sempre ocuparam uma parte significativa nos currículos de Matemática e o trabalho com números sempre teve uma ligação inseparável do cálculo. O cálculo mental ou cálculo numérico é referido nos currículos de Matemática há mais de 70 anos (Brocardo & Serrazina, 2008) e são diversos os autores (e.g., Bourdenet, 2007; Buys, 2001; Ralston, 1999; Taton, 1969; Threlfall, 2002) que consideram que este contribui para a manutenção e desenvolvimento de competências necessárias em numerosos domínios, entre eles a vida quotidiana.

Currículos de Matemática de países como Argentina, Inglaterra, Holanda e França enfatizam o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e das capacidades de estimar e de resolver problemas, desvalorizando a importância de cálculos longos e complexos de papel e lápis.

Em Inglaterra, as avaliações oficiais contemplam desde 1998 testes de cálculo mental para alunos entre os 11 e os 14 anos. Esta inclusão teve grande impacto no ensino da Matemática nos primeiros anos de escolaridade ao nível do cálculo mental, passando os professores a dedicar mais tempo ao trabalho mental com números (Threlfall, 2002). Como apoio ao desenvolvimento do cálculo mental, o governo do Reino Unido publicou *The National Numeracy Strategy*, que contém recomendações acerca do tempo que deve ser destinado diariamente a este trabalho e das estratégias que podem ser desenvolvidas.

Na Argentina, o currículo de Matemática é acompanhado de publicações específicas da *Secretaria de Educatión*, com indicações precisas quanto à forma como os professores devem trabalhar cálculo mental com os alunos, enumerando um conjunto de tarefas e estratégias de cálculo mental que podem ser desenvolvidas em diferentes níveis de escolaridade e com diferentes conjuntos numéricos.

Em Portugal, nos anos mais recentes, os Programas de Matemática do ensino básico também se referem à importância do cálculo mental. No *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007) o papel do cálculo mental está associado ao desenvolvimento de diversas capacidades dos alunos:

> Uma boa capacidade de cálculo mental permite aos alunos seguirem as suas próprias abordagens, usarem as suas próprias referências numéricas e adotarem o seu próprio grau de simplificação de cálculos, permite-lhes também desenvolver a sua capacidade de estimação e usá-la na análise da razoabilidade dos resultados dos problemas (p. 10).

Neste documento curricular existem várias referências ao cálculo mental, principalmente no 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. Além disso, ao longo dos nove anos de escolaridade, o tema Números e Operações sublinha a sua importância ao referir no propósito principal de ensino que se deve: "desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações, e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos" (pp.13, 32, 48). No que se refere especificamente ao o 2.º ciclo do ensino básico, o programa de Matemática de 2007 sugere que se deve: (i) privilegiar o desenvolvimento do cálculo mental recorrendo a situações que suscitem a estimação do resultado bem como na utilização das propriedades das operações, (ii) dar especial atenção ao cálculo mental (exato e aproximado) uma vez que, contribui para o desenvolvimento da autoconfiança e desembaraço dos alunos no tema Números e Operações e em particular na resolução de problemas; e (iv) utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades no trabalho com números racionais. No Programa e Metas Curriculares de Matemática do ensino básico (MEC, 2013), atualmente em vigor, o cálculo mental surge associado à necessidade de destreza com os algoritmos:

> É fundamental que os alunos adquiram durante estes anos [até ao 3.º ano de escolaridade] fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos, próprios do sistema decimal, associados a estas operações. Note-se que esta fluência não pode ser conseguida sem uma sólida proficiência no cálculo mental (p. 6).

Neste documento curricular apenas se faz referência ao desenvolvimento do cálculo mental com números naturais nos três primeiros anos do ensino básico, não existindo qualquer referência ao seu desenvolvimento no 2.º ciclo. De salientar ainda, que apresentam poucas referências explícitas à forma como este deve ser trabalhado na sala de aula, às estratégias a utilizar e aos objetivos a alcançar em cada ciclo no que respeita ao cálculo mental.

### 1.4. Motivação, objetivos e questões do estudo

Considerando tanto o âmbito nacional, onde a discussão e valorização do desenvolvimento do sentido do número ao qual se associa o cálculo mental continuam a ser temas atuais, como o internacional, onde o cálculo mental começa a ser valorizado não só ao nível dos números naturais mas também com números racionais, parece-me pertinente desenvolver um estudo que possa contribuir para a melhoria das práticas profissionais dos professores do 2.º ciclo no que se refere ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos. Outro aspeto referido na literatura é a importância do desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo na consolidação de aprendizagens matemáticas, em geral, e no sentido do número, em particular, contribuindo igualmente para a melhoria da capacidade crítica e de estimação dos alunos. Assim, a análise das estratégias utilizadas pelos alunos parece-me ser um aspeto fundamental para produzir conhecimento e referências para a prática letiva dos professores.

Finalmente, como professora de Matemática do 2.º ciclo, desde 2002, no âmbito de um grupo de trabalho de investigação do qual faço parte, a minha área de estudo tem considerado de forma natural o trabalho com números racionais. Em especial, foi a minha participação no projeto de experimentação do Programa de Matemática de 2007 que despertou o meu interesse em realizar um estudo envolvendo o cálculo mental e os números racionais.

A minha motivação surge essencialmente com a necessidade de me desenvolver profissionalmente e de me capacitar para melhorar a aprendizagem dos alunos nos números racionais, uma vez que as dificuldades manifestadas por estes são constantes. As metodologias que utilizei na experimentação do programa de Matemática de 2007 mostraram-me que é possível proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que lhes facilitam a aprendizagem dos números racionais, melhorando a forma como utilizam estes números em contexto escolar e fora dele.

Assim, o propósito geral desta investigação é dar visibilidade à importância do desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais e contribuir para a melhoria do ensino do cálculo mental e, consequentemente, da sua aprendizagem. Pretendo com este estudo compreender, tendo por base uma experiência de ensino centrada em tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos e não matemáticos com números racionais positivos envolvendo as quatro operações e na discussão das estratégias dos alunos do 6.º ano, que estratégias e erros evidenciam os alunos no cálculo mental com números racionais, bem como contribuir para o desenvolvimento das suas estratégias de cálculo mental. Deste objetivo geral de investigação, e no quadro desta experiência de ensino, surgem três questões orientadoras:

- Que estratégias usam os alunos quando calculam mentalmente com números racionais positivos, em questões que envolvem as quatro operações aritméticas básicas?
- Que erros evidenciam no cálculo mental com números racionais positivos nas operações referidas?
- Como evoluem as estratégias de cálculo mental dos alunos ao longo da experiência de ensino?

No final do estudo, pretendo identificar e descrever um conjunto de estratégias de cálculo mental que os professores podem utilizar e desenvolver na aula de Matemática com os seus alunos.

# Capítulo 2

# Números racionais

Neste capítulo, apresento as orientações curriculares para o ensino dos números racionais em Portugal e analiso vários aspetos referentes à aprendizagem destes números, nomeadamente o sentido de número e de operação, seus significados, operações e diferentes representações bem como alguns dos possíveis erros cometidos pelos alunos. Por fim apresento alguns aspetos importantes no que se refere aos números racionais e pensamento relacional.

## 2.1. Os números racionais no Programa de Matemática em Portugal

Os números racionais ocupam uma grande parte do currículo do ensino básico em Portugal. De acordo com o Programa de Matemática (ME, 2007) em vigor no momento em que este estudo foi realizado, a aprendizagem dos números racionais positivos inicia-se nos dois primeiros anos do 1.º ciclo. De acordo com as orientações curriculares, deve privilegiar-se uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e da divisão da unidade em partes iguais, envolvendo unidades contínuas e discretas e a exploração de situações que envolvam frações que representam metade, a terça parte, a quarta parte e a décima parte relacionando os operadores de dobro, triplo, quádruplo e quíntuplo respetivamente com metade, terça parte, quarta parte e quinta parte.

Nos dois anos seguintes, o estudo dos números racionais é aprofundado recorrendo a situações que permitam abordar frações com os significados de quociente, parte-todo e operador e reconstruir a unidade a partir das suas partes. É nesta fase que são introduzidos os números na representação decimal (até à milésima) a partir de situações de partilha equitativa, medida ou dinheiro realçando a importância da unidade de medida. Devem ser proporcionadas aos alunos situações que lhes permitam relacionar as representações fracionária e decimal bem como desenvolver a compreensão dos conceitos de razão e proporção. O programa faz referência à necessidade de utilizar as representações retangular e circular na abordagem aos numerais decimais, bem como valores de referência representados de diferentes formas como é o caso de $0{,}5, \frac{1}{2}$ e $50\%$; $0{,}25, \frac{1}{4}$ e $25\%$; $0{,}75, \frac{3}{4}$ e $75\%$;$0{,}1$ e $\frac{1}{10}$ ; $0{,}01$ e $\frac{1}{100}$ e, por fim, $0{,}001$ e $\frac{1}{1000}$. Também sugere o uso da reta numérica para representar números racionais na forma decimal e de fração. No que se refere às operações, os alunos devem trabalhar números racionais na representação decimal a partir de situações do seu quotidiano onde o cálculo mental deve ser valorizado.

No 2.º ciclo, a representação fracionária volta a ser abordada com o significado de quociente entre dois números naturais, relação parte-todo e operador aos quais se juntam os significados de razão e medida. Surge mais uma representação, o numeral misto, que, embora não sendo usado em situações de cálculo, assume um papel importante em situações de comparação e ordenação de números racionais. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão passam a contemplar frações, usando exemplos que evidenciem o significado das operações e relação entre as várias representações, como $34 \div 4$ e $34 \times 0{,}25$ ou $34 \times \frac{1}{4}$. Os alunos trabalham ainda com valores aproximados e estimativas e estudam percentagens relacionando-as com as representações decimal e fração. Para além da aprendizagem dos algoritmos, o cálculo mental (exato e aproximado) deve merecer especial atenção para que os alunos se sintam cada vez mais autoconfiantes e eficientes na resolução de problemas com números racionais.

No 3.º ciclo, os alunos dão continuidade ao estudo dos números racionais, comparando, ordenando e operando mas agora também com números racionais negativos. De acordo com o programa de 2007, os alunos devem comparar e ordenar números racionais positivos e negativos na representação decimal e fracionária, bem como, a usar a reta numérica para os representar. Devem representar números racionais através de dízimas infinitas periódicas e em notação científica, privilegiando o uso da calculadora, sendo a abordagem a esta notação realizada através de exemplos relacionados com contextos científicos, tecnológicos ou da realidade quotidiana. No âmbito das operações, os alunos devem resolver expressões numéricas, conhecer e aplicar, no cálculo, as propriedades e as regras operatórias em $Q$. Devem igualmente operar com potências de base racional (diferente de zero) e expoente inteiro, relacionando esta nova aprendizagem com as que já possuem relativamente às operações com potências de base e expoente inteiros.

## 2.2. Números racionais: Sentido de número e de operação, representações e significados

### 2.2.1. Sentido de número e sentido de operação

A aprendizagem dos números racionais é complexa dada a diversidade de relações que se verificam, algo que não acontece com os números naturais. Além disso, os números racionais, nas suas diferentes representações (decimal, fração, numeral misto, percentagem), referem-se a quantidades cuja grandeza por vezes não é fácil de compreender, como é o caso de uma média de “2,5 filhos por família” (Lamon, 2006). Ter uma boa compreensão dos números racionais é mais do que manipular símbolos, é ser capaz de fazer conexões com situações modeladas por esses mesmos símbolos (Lamon, 2006) e ter sentido de número racional. O desenvolvimento do sentido de número racional é um processo lento e gradual, que se inicia antes do ensino formal dos números racionais (McIntosh et al., 1992; Monteiro & Pinto, 2005) e que envolve conexões entre diferentes formas de representação.

*Sentido de número*

Na perspetiva de McIntosh et al. (1992), ter sentido de número “refere-se ao conhecimento geral que uma pessoa tem acerca de números e das suas operações a par com a capacidade e inclinação para usar esse conhecimento de forma flexível para construir raciocínios matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações” (p. 4). Apesar de considerarem que o sentido de número é difícil de descrever mas possível de perceber em ação, estes autores, apresentam um quadro de referência para um sentido básico de número que sistematizam em três áreas: (i) no conhecimento e destreza com números, (ii) no conhecimento e destreza com operações e (iii) na aplicação do conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo.

No *conhecimento e destreza com números* é essencial ter sentido de ordenação dos números, usar múltiplas representações, ter sentido de grandeza absoluta e relativa dos números e possuir um sistema de números de referência. A aquisição do sentido de ordenação envolve a compreensão do sistema de numeração, do sistema decimal de posição ao nível dos números naturais e racionais e também a compreensão dos números racionais nas suas diferentes representações. Na perspetiva destes autores, a simbolização das várias representações de um número implica reflexão onde a composição/decomposição de números permite expressar um número numa forma equivalente que pode facilitar as operações com números racionais. Os números de referência, ou âncoras, assumem também um papel importante no desenvolvimento do sentido de ordenação. Por exemplo, ao considerar a fração $\frac{3}{5}$, pode-se pensar na sua representação pictórica, na decimal, numa fração equivalente ou ainda usar $\frac{1}{2}$ como referência para se compreender a sua grandeza. A utilização de números de referência é fundamental para se pensar sobre os números, e a sua importância é referida por diversos autores (Behr, Post & Wachsmuth, 1986; Cruz & Spinillo, 2004). Para McIntosh et al. (1992) números de referência são números sem contexto que se desenvolvem a partir das experiências dos alunos e que são úteis para avaliar a grandeza de uma resposta, fazer comparações entre números, ou ainda arredondar números facilitando a sua utilização. Segundo estes autores, as referências são geralmente potências de 20, múltiplos de potências de 10 ou pontos médios como $\frac{1}{2}$ e $50\%$, embora possam existir outros, desde que sejam compreendidos pelo aluno. Por exemplo, é importante que o aluno perceba que a soma de dois números de dois algarismos é sempre inferior a 200, ou que 0,87 é inferior a 1 ou que $\frac{5}{8}$ é superior a metade.

Quanto ao desenvolvimento do sentido de grandeza de um número, McIntosh et al. (1992) referem que este é adquirido com o tempo e com experiência Matemática. O trabalho com números ao longo do tempo irá permitir desenvolver "a capacidade de reconhecer o valor relativo de um número ou de uma quantidade relativamente a outro número ou quantidade e a capacidade de detetar o valor geral (ou grandeza) de um dado número ou quantidade" (p. 11).

No *conhecimento e destreza com operações* importa compreender o efeito das operações, ter a noção das propriedades matemáticas das operações e da relação entre operações. Relativamente ao efeito das operações, esta deve ser compreendida usando vários tipos de números. McIntosh et al. (1992) realçam a vantagem em usar várias representações (modelos) para trabalhar o efeito das operações. A utilização das adições sucessivas, bem como da reta numérica ou da representação retangular em diferentes contextos são boas opções para que o trabalho dos alunos não seja limitado e leve a generalizações erradas, como é o caso de associar a multiplicação a uma operação que dá origem sempre a um número maior ou a divisão a uma operação que dá origem sempre a um número menor. Segundo estes autores, as propriedades matemáticas como a propriedade comutativa, associativa e distributiva, têm sido ensinadas como regras formais sem que se perceba muito bem qual a sua utilidade nas operações. No caso da comutativa, os alunos memorizam que $2 \times 3 = 3 \times 2$ mas nem sempre fazem uso das suas potencialidades. As propriedades aritméticas são úteis quando aplicadas a procedimentos de cálculo de forma a torná-los mais rápidos e eficientes. Consideram ainda que um aluno que, ao calcular $36 \times 4$ primeiro faz $4 \times 35$ e depois $4 \times 1$, está não só a usar a propriedades comutativa quando troca a ordem dos fatores, mas também a distributiva quando decompões 36 em $35 + 1$. Alunos que utilizam as propriedades das operações em situações diversas de cálculo manifestam ter sentido de número, apesar de muitas vezes esse uso ser intuitivo. Os alunos devem compreender a utilidade das propriedades das operações, em vez de memorizar um conjunto de procedimentos que acabam por nunca mobilizar em situações onde estas têm um papel fundamental, como é o caso do cálculo mental.

Na perspetiva de McIntosh et al. (1992), compreender e conhecer as relações entre operações é ter mais ferramentas para pensar e resolver problemas, para relacionar as operações é preciso primeiro compreendê-las. A relação inversa entre operações é uma ferramenta com muito potencial na resolução de problemas. Por exemplo, a operação $360 \div 6$ pode ser vista como $6 \times ? = 360$ e em vez de se utilizar a divisão na sua resolução, usa-se a multiplicação. Os autores consideram que o trabalho com números racionais facilita a exploração e descoberta de novas relações, principalmente entre a multiplicação e a divisão aumentando a possibilidade de surgirem novas estratégias.

Na *aplicação do conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo,* McIntosh et al. (1992) destacam três aspetos importantes nesta área do sentido de número: compreensão entre o contexto e o cálculo a efetuar, escolha da estratégia adequada e verificar de forma reflexiva a resposta dada. O enunciado de um problema fornece as pistas necessárias à sua resolução, não só quanto ao tipo de operação mais adequada, mas também relativamente ao tipo de resposta que se pretende, se exato, arredondado ou aproximado. Quanto ao tipo de estratégias a usar na resolução de um problema, ter sentido de número implica ter um leque de estratégias disponíveis para resolver um dado problema. Estas estratégias vão sendo cada vez mais diversas à medida que aumenta a complexidade dos números. A possibilidade de seguir vários caminhos permite ao aluno repensar a sua resolução, avaliá-la e completá-la ou até substituí-la por outra que lhe pareça mais eficaz. A verificação do resultado deve ser feita em função do problema, pensando sempre se essa resposta faz sentido considerando os dados e o que era pedido inicialmente. Por vezes, os alunos omitem esta verificação de resultados, ou porque aceitam o resultado como um produto acabado e inquestionável, ou porque o resultado não é importante para eles.

Muitos dos aspetos realçados por McIntosh et al. (1992) no seu quadro de referência para a análise do sentido de número, são sublinhados por outros autores. Cruz e Spinillo (2004) sublinham a importância das crianças utilizem números de referência ou âncoras. Na perspetiva das autoras, as crianças que usam âncoras alcançam melhores resultados do que quando adotam estratégias puramente simbólicas. Consideram que a utilização do referencial de metade favorece a quantificação das frações e a compreensão acerca da adição de frações pois permite o aparecimento de esquemas de equivalência relevantes para esta compreensão. As âncoras podem ser entendidas como um apoio ao raciocínio durante o processo de resolução de situações-problema que envolvam diversos conceitos matemáticos. Referem ainda que os esquemas de equivalência estão relacionados com a habilidade de sistematizar unidades para gerar uma outra unidade equivalente à soma das suas partes, como por exemplo, identificar que $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ equivale a $\frac{2}{4}$. Para além da referência $\frac{1}{2}$ usam também 1 como apoio em situações envolvendo estimativas ou operações com frações uma vez que têm dificuldades em usar simbolismo formal. Behr et al. (1986) acrescentam ainda que alunos que estimam a soma entre números racionais têm mais sucesso quando usam como referência $\frac{1}{2}$, 1 ou outra fracção que considerem importante como ponto de referência, criando assim formas espontâneas de equivalência e ordenação de números racionais. Finalmente, na perspetiva de

Cramer, Wybeg e Leavitt (2009) um aluno que tenha sentido de número é reflexivo sobre os números, as operações e os resultados obtidos e apresenta flexibilidade na utilização de estratégias de comparação e operação com números. Consideram ainda que ter sentido de número para frações é ser capaz de julgar a grandeza relativa de uma fração usando o que o grupo de trabalho do *Rational Number Project* (RNP) chama de estratégias informais de ordenação.

### *Sentido de operação*

McIntosh et al. (1992) consideram o sentido de operação como um aspeto do sentido do número, uma vez que as operações realizam-se com números. No entanto, Schifter (1997) e Slavit (1999) referem-se ao sentido de operação separadamente do sentido de número e consideram-no uma ligação entre a Aritmética e a Álgebra.

Na perspetiva de Schifter (1997), desenvolver nos alunos o sentido de operação no âmbito dos números naturais ou racionais é prepará-los para a aprendizagem da álgebra. Para a autora, quando os alunos começam a estudar álgebra aprendem uma nova linguagem, uma forma mais eficiente de representar propriedades, relações, quantidades e operações. Para os alunos que já estão familiarizados com as propriedades e relações, o desafio coloca-se sobretudo ao nível da aprendizagem de uma nova simbologia. Acrescenta que, se as operações tiverem sentido para os alunos, estes conseguem encontrar uma variedade de estratégias de cálculo apropriados para resolver uma dada questão, alargando a sua compreensão das leis da comutatividade, associatividade e distributividade. Considera ainda que, quando os alunos usam diferentes operações para resolver um problema, isto evidencia ter sentido acerca da forma como as operações se relacionam dentro de uma mesma situação. Por exemplo, se uma criança resolve um problema de adição em que uma das parcelas é desconhecida recorrendo à subtração, ou resolve um problema de divisão tentando encontrar o fator desconhecido, está a desenvolver experiência no trabalho com relações inversas adição/subtração e divisão/multiplicação e equações equivalentes.

Schifter (1997) considera que uma prática comum dos professores é primeiro apresentar regras de cálculo que os alunos devem memorizar e depois dar-lhes problemas e exercícios para aplicarem os conhecimentos. É relativamente fácil encontrar no problema os números com que se deve operar, mas mais complicado perceber que operação usar. Para ajudar os alunos a ultrapassar esta dificuldade, os professores apelam frequentemente à memorização de diversas palavas chave. Assim, referem que problemas cujo enunciado possui a palavra “perder” requerem uma subtração e aqueles cujo enunciado contém a expressão “vezes mais” requerem multiplicação. Muitas vezes também induzem os alunos a desenvolverem estratégias que passam por selecionar a operação de acordo com a ordem de grandeza dos números, ou testar operações até encontrarem um resultado que lhes pareça razoável. Para a autora, os alunos devem trabalhar com diferentes tipos de problemas e os professores devem encorajá-los a experimentarem e a partilharem estratégias, bem como a procurar novas estratégias de forma a perceberem como diferentes problemas podem ser modelados por cada operação e como diferentes operações podem modelar uma mesma situação. A resolução de problemas e exercícios de cálculo proporcionam situações de aprendizagem que favorecem a construção do sentido de operação e da estrutura do sistema de numeração.

Para Slavit (1999) o sentido de operação envolve a habilidade para usar uma operação num conjunto de objetos matemáticos. O sentido de operação envolve conceções flexíveis relacionáveis pelo individuo e que passam pelas estruturas da operação subjacentes, o uso da operação, a relação com outras operações matemáticas e estruturas e uma potencial generalização. O autor apresenta dez aspetos que ajudam a clarificar o significado do sentido de operação e que gradualmente vão exigindo do individuo maior compreensão das operações e nível de abstração: (i) *conceptualização dos componentes básicos do processo* – envolve a capacidade para decompor a operação nos seus componentes básicos, encarando-a como um conceito dinâmico onde existe ação; (ii) *familiarização com propriedades processáveis pela operação* – implica perceber as propriedades subjacentes a cada operação e estar consciente da sua aplicabilidade na operação inversa (e.g., na adição verifica-se a propriedade comutativa, mas não na subtração); (iii) *relação com outras operações* – para além da relação entre uma operação e a sua inversa, a propriedade distributiva estabelece uma relação entre duas operações; (iv) *facilidade com a variedade de simbologia subjacente a cada operação* – a utilização de diferente simbologia para representar uma mesma operação aumenta a carga cognitiva (e.g., a multiplicação pode ser representada recorrendo a $\times, ., (\,)$); (v) *familiarização com os contextos das operações* – o contacto com diferentes contextos em que surgem as operações, contribui para o desenvolvimento do sentido de operação, no entanto é preciso saber distinguir o conhecimento do contexto da situação em estudo (e.g., juntar) do conhecimento da operação Matemática (e.g., adição); (vi) *familiarização com factos relacionados com as operações* – e.g., $7 + 8 = 15$ se $8 = 3 + 5$ então $7 + 8 = 7 + 3 + 5 = 10 + 5 = 15$; (vii) *capacidade para usar a operação fora de situações concretas ou de referência* – um aluno que consegue operar com números abstratos ou objetos mentais tem um avançado sentido de operação; (viii) *capacidade para usar a operação a partir de inputs desconhecidos ou arbitrários* – o que requer atos de generalização em que o foco é a própria operação; (ix) *capacidade para relacionar o uso das operações em diferentes objetos matemáticos* (e.g., a adição com material concreto como a base-dez com os números naturais, frações, decimais, expressões com variáveis, gráficos, vetores e sequências partilham uma relação fundamental, para além do processo, mesmo sendo objetos matemáticos diferentes; e a (x) *capacidade de avançar e retroceder entre os vários aspetos anteriores*, uma vez que o sentido de operação envolve uma compreensão de vários componentes e propriedades das operações em que a flexibilidade no seu uso permite ao aluno movimentar-se nesta teia de conceitos.

Tal como Schifter (1997) também Slavit (1999) considera que o sentido de operação envolve pensamento algébrico. Assim, considera que o oitavo aspeto indica um marco importante no desenvolvimento do pensamento algébrico uma vez que este passa pela capacidade de generalizar processos aritméticos. Neste caso, a operação não só é usada sem significado ou quantidades imediatas associadas, como também pode ser mentalmente manipulada sem referências associadas a quantidades. O autor considera que ambientes que favoreçam o uso de processos cognitivos associados à generalização fazem uso de aspetos particulares da aritmética das operações.

### 2.2.2. Representações e significados de um número racional

A utilização do termo "fração" está associada aos números racionais, mas os números racionais não são apenas representados por frações, sendo também muito usadas a representação decimal e em percentagem (Lamon, 2007). Aos números racionais, representados de vários modos, estão associados diferentes significados. Behr, Lesh, Post e Silver (1983) consideram fundamental compreender estes significados e a forma como se relacionam entre si, para perceber e trabalhar com números racionais.

A conversão entre diferentes representações em situações de cálculo ou de resolução de problemas é sinal de que os alunos possuem sentido de número e são capazes de criar estratégias próprias com alguma flexibilidade. O recurso a diferentes representações dos números racionais demonstra que os alunos têm a noção da grandeza dos números e este conceito de grandeza é importante ser desenvolvido (Behr et al., 1986).

*Representações dos números racionais*

*Fração.* O conceito de fração é complexo bem como a rede de relações (Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer & Keijker, 2008) que estabelecem entre si. Uma fração é um par ordenado de números que se representa sob a forma $\frac{a}{b}$ em que $b \neq 0$ sendo $b \div a$ . As frações são utilizadas em contextos diversos e que, muitas vezes, podem parecer que não têm nada em comum (Llinares & Garcia, 2000) quando na realidade estão relacionados.

Para Lamon (2007) o termo fração é amplamente usado, tanto dentro como fora da sala de aula, sendo visto como um sinónimo de "porção de algo". No entanto, esta ideia que uma fração é "uma porção de algo" não faz sentido se considerarmos uma fração imprópria, isto é, que representa um número maior que 1. Para a autora, para além deste aspeto há outros que também dificultam a interpretação da representação fracionária. Por exemplo, um número racional pode ser representado por uma fração, mas uma fração pode não representar um número racional, como é o caso de $\frac{\pi}{2}$ . Outro aspeto prende-se com o facto de várias frações poderem representar o mesmo número racional, por exemplo, $\frac{2}{4}$ , $\frac{5}{10}$ e $\frac{3}{6}$. Outro, ainda, está associado à interpretação das frações como sendo exclusivamente uma relação parte-todo. Esta é uma ideia errada que emergiu do trabalho excessivo à volta deste significado das frações. Atualmente, segundo a autora, os professores começam a perceber que abordar apenas este significado é limitar a compreensão dos números racionais. Por fim, considera que as diferentes representações dos números racionais são conceptualmente diferentes, mas, uma vez escritas simbolicamente, são fáceis de identificar e operamos com elas usando as mesmas regras. O mesmo não acontece com a razão e este é mais um aspeto que dificulta a interpretação da representação fracionária.

*Numeral decimal*. A representação decimal dos números racionais é uma das mais abordadas no ensino básico. Para Pérez (1997) um numeral decimal é um número racional que se pode escrever na forma de $n = \frac{a}{10^p}$ sendo $a$ e $p$ números inteiros. Isto mostra a estreita relação que possuem com as frações decimais.

Galen, et al. (2008) consideram que é preciso que estes numerais não sejam vistos apenas como um número constituído por duas partes (uma à direita e outra à esquerda da vírgula) em que cada parte é constituída por números com diferentes significados, mas também como representações de um sistema de denominadores de potências de 10. Assim, consideram que é fundamental estabelecer relações entre a representação decimal e as frações decimais ou frações comuns como $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{3}{4} = 0{,}75$, $\frac{1}{5} = 0{,}2$ e $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

*Percentagens.* As percentagens fazem parte do nosso quotidiano. Diariamente ouvimos falar em taxas de juro e deparamo-nos com descontos em diversos estabelecimentos comerciais. Para Parker e Leinhardt (1995), a percentagem é um conceito matemático dinâmico que tem mudado ao longo dos anos, não em termos de simbologia, mas nos seus significados e utilizações. As percentagens, que eram usadas essencialmente em situações relacionadas com taxas, juros ou funções relacionadas com a regra de três, passaram a ser usadas na comparação de frações, comparação de razões entre diferentes objetos e conjuntos e, finalmente como números usados para comparar determinados tipos de dados. Segundo estes autores, o conceito de percentagem tem vindo a tornar-se mais complexo sendo uma percentagem (representada por um valor numérico e um símbolo próprio) frequentemente convertida para numeral decimal ou fração em função da situação em que é usada. Uma percentagem pode ser um número comparativo, uma quantidade intensiva, uma fração ou uma razão, uma estatística ou uma função e em cada um destes casos, a descrição de uma relação proporcional entre duas quantidades. A percentagem é uma linguagem simples e concisa para descrever uma relação proporcional. Ou seja, as percentagens têm propriedades de números, de relações parte-todo, de razões e simultaneamente servem como funções que criam outros números ou uma estatística que descreve relações entre dois números.

*Significados dos números racionais*

Behr et al. (1983) consideram que existem cinco significados para os números racionais: (i) *relação parte-todo*; (ii) *medida;* (iii) *quociente*; (iv) *operador*; e (v) *razão.* O significado relação parte-todo está associado a situações em que a unidade continua ou discreta, está dividida em partes congruentes. Este é um significado que os autores consideram como fundamental para a compreensão de todos os outros. O significado medida refere-se à comparação de uma grandeza com outra tomada como unidade e é, na perspetiva dos autores, uma reconceptualização da relação parte-todo. O significado de quociente está associado à divisão de dois números naturais em que $\frac{a}{b} = a \div b$. O significado operador leva a que um número racional $\frac{p}{q}$ seja interpretado como uma estrutura algébrica em que $\frac{p}{q}$ é uma função. Por fim, consideram que o significado de razão é uma relação que transmite a noção de grandeza relativa sendo mais correto associar-se uma razão a um índice comparativo do que a um número.

Com base nestes cinco significados dos números racionais, Behr et al. (1983) apresentam um esquema concetual para a aprendizagem dos números racionais (Figura 1) em que relacionam os diversos significados com os conceitos de equivalência, operações e resolução de problemas. Na perspetiva dos autores, os significados de partilha e relação parte-todo são fundamentais para a aprendizagem dos restantes. Indicam, por exemplo, quando se utiliza a relação parte-todo em unidades discretas, os contextos numéricos podem conduzir à ideia de operador ou de percentagem (razão). Se considerarmos "$\frac{2}{5}$ de $20$ rebuçados", podemos pensar que é uma fração (operador) que atua sobre um número, ou seja, trata-se mais de uma ação do que de uma descrição de uma situação. Se interpretarmos a mesma situação à luz de percentagens "$40\%$ de $20$ rebuçados", estamos a evidenciar a mesma relação uma vez que "dois de cinco" é equivalente a "quarenta de cem". O significado de razão é o que, de forma natural, mais contribui para o desenvolvimento do conceito de equivalência, enquanto os significados de operador e medida favorecem a aprendizagem das operações, nomeadamente a multiplicação e adição. O esquema concetual evidencia que todos os significados são importantes para a resolução de problemas com números racionais.

Behr et al. (1983) e Lamon (2007) embora estejam de acordo quanto aos cinco significados dos números racionais (relação parte-todo, quociente, medida, operador e razão) diferem quanto à importância do significado relação parte-todo na aprendizagem dos restantes. Enquanto Behr et al. (1983) consideram que a relação parte-todo é a base para a aprendizagem dos outros significados, Lamon (2007) considera que o significado medida é o mais forte uma vez que se relaciona de forma natural com os outros significados e que a relação parte-todo não deve ser considerada como um significado à parte, uma vez que representa um caso particular do significado medida. O significado medida ajuda a desenvolver a noção de unidade/todo, sub-intervalos, equivalência, ordem e intensidade do conjunto dos números racionais e as operações de adição e subtração. Algumas crianças conseguem ainda fazer conexões com o significado de operador quando operam na reta numérica. Para a autora, trabalhar o significado relação parte-todo ajuda os alunos a desenvolverem uma ideia forte de unidade/todo e de frações equivalentes o que, posteriormente irá facilitar a aprendizagem da adição e subtração de números racionais. Tal como Behr et al. (1983), também Lamon (2007) considera que este significado se relaciona de forma natural com os significados de, medida, razão e operador.

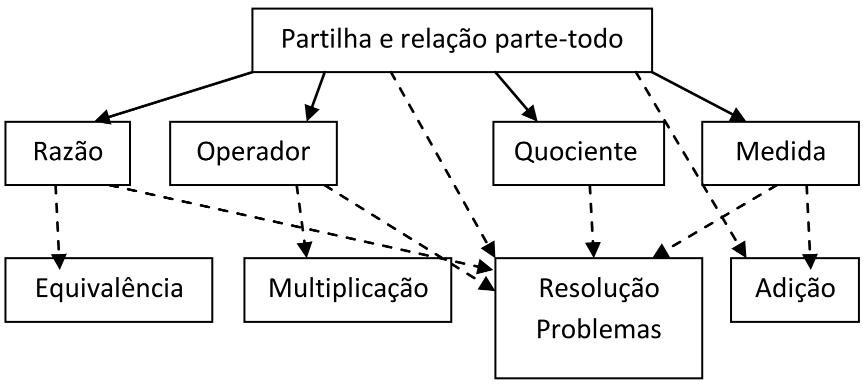



Figura 1. Esquema concetual para a aprendizagem dos números racionais (Behr et al., 1983).

Lamon (2007) considera que o significado quociente se relaciona com taxas e razões, o que pode ser útil em situações de comparação. O significado de operador está relacionado com a multiplicação, divisão, escalas, sentido de fração no geral, mas não se relaciona muito com a adição e subtração. O significado de razão difere dos outros significados, pela forma como se relaciona com as operações aritméticas. Para a autora, crianças que iniciem a aprendizagem dos racionais pela razão, desenvolvem uma forte noção de classes de equivalência e raciocínio proporcional. Na sua perspetiva, desenvolvem uma boa capacidade para converter razões em relações parte-todo, para adicionar, subtrair e até para multiplicar e dividir usando raciocínio proporcional.

Paralelamente à discussão dos significados dos números racionais e das relações que estabelecem entre si importa perceber de que forma estes se relacionam com as diversas representações. Para Llinares e Garcia (2000) as frações podem ser interpretadas como uma relação parte-todo, quociente, operador, medida ou razão. Para os autores, a fração com o significado de relação parte-todo indica a relação que existe entre um número de partes e o número total de partes (e.g., três quartos de uma folha de papel está pintada). Para perceber esta relação é importante que os alunos tenham interiorizada a noção de inclusão de classes, consigam identificar a unidade, consigam relacionar as divisões na unidade e mobilizem a ideia de área.

Llinares e Garcia (2000) consideram que a fração com o significado de quociente pode ter duas interpretações: a fração como uma divisão indicada na forma $\frac{a}{b}$, estabelecendo a equivalência com o seu quociente (e.g., $\frac{1}{4}$ equivalente a $0{,}25$) numa ação de partilha e a fração como elemento de uma estrutura algébrica, ou seja, como um elemento de uma conjunto numérico onde se estabelecem equivalências e do qual resultam operações – adição e multiplicação –que cumprem determinadas propriedades atribuindo a esse conjunto uma estrutura algébrica de corpo comutativo.

No caso da fração como operador, os autores consideram que esta tem um papel transformador, ou seja, é algo que atua sobre uma situação e a transforma. Esta interpretação enfatiza o papel das frações como elementos da álgebra de funções (transformadores), ao mesmo tempo que deixa a ideia que os números racionais formam um grupo (estruturas algébricas) com a multiplicação. Acrescentam ainda que o significado de operador confere à fração dois sentidos: o de descrever uma ordem e ação a realizar (operador) e o de descrever um estado de coisas, a decidir, descrevendo uma situação. Estes dois sentidos leva a duas formas de interpretar a equivalência de frações: equivalência de operadores em que se aplicam diferentes operadores a um mesmo estado inicial produzindo um mesmo estado final e, equivalência de estados em que se aplica um mesmo operador a estados iniciais diferentes, produzindo a mesma transformação, levando de forma natural, à interpretação de proporção.

Partilhando as ideias de Behr et al. (1983) Llinares e Garcia (2000) consideram que o significado de fração como medida é um caso particular da relação parte – todo em que a fração $\frac{a}{b}$ é vista como um ponto numa reta numérica, em que cada segmento da unidade foi dividido em $b$ (ou num múltiplo de $b$) partes congruentes de $a$. A fração como medida constitui um ambiente natural para a adição (união de duas medidas) e para a introdução da notação decimal. O trabalho com frações, com o significado de medida, ajuda os alunos concetualizar as relações parte-todo num determinado contexto e a reconhecer situações equivalentes que originam novas divisões da unidade.

Para Llinares e Garcia (2000) a fração como razão é descrita como uma relação parte-parte ou relação todo-todo na forma $a \div b$ em que a noção de par ordenado de números naturais adquire nova força. Na perspetiva dos autores, a utilização de contextos do quotidiano ajudam os alunos a conferirem significado à fração como razão. Estes contextos podem passar pela relação de pontos de dois conjuntos, pelas escalas, pela relação entre as alturas de dois indivíduos ou pela utilização de situações onde se usem receitas e onde o conceito de proporcionalidade está subjacente. O significado de fração como razão, também está associado a contextos relacionados com probabilidades e percentagens. No caso das probabilidades estabelece-se a relação todo-todo em que se pode comparar o conjunto dos casos favoráveis com o conjunto dos casos possíveis.

No caso da representação decimal, Llinares e Garcia (2000) consideram-na associada a uma noção mais geral da relação parte-todo e a relação entre frações decimais e a notação decimal enfatiza esta relação. Argumentam que, a partir da divisão de um retângulo em 10 partes congruentes, ao considerarmos uma dessas partes, estamos a dar sentido à representação $\frac{1}{10}$ e à sua equivalente em notação decimal $0{,}1$. Se dividirmos cada uma destas partes em 10 outras partes congruentes vamos obter $\frac{1}{100}$ ou seja $0{,}01$ e o mesmo para a milésima.

A representação em percentagem representa uma relação de proporcionalidade entre um número e 100, ou seja uma razão. Para os autores, a percentagem está associada ao significado de operador uma vez que ao calcularmos $30\%$ de $45$ estamos a aplicar o mesmo procedimento que para calcular $\frac{30}{100}$ de $45$ (a 100 partes de 45 considerar 30), ou uma relação parte-todo. As percentagens podem-se entender como relações entre razões referentes a subconjuntos de cem partes.

### 2.2.3. A aprendizagem dos números racionais e os erros dos alunos

*O papel do contexto*

Diversos autores (Behr et al., 1986; Cramer et al., 2009; Cruz & Spinillo, 2004; Galen et al., 2008; McIntosh et al., 1992; Monteiro & Pinto, 2005, 2007; Ponte & Quaresma, 2012) defendem que a aprendizagem dos números racionais deve ser contextualizada para que os alunos desenvolvam estratégias informais com recurso a diversas representações, incluindo a pictórica, antes de desenvolverem estratégias formais e de manipularem simbolicamente os números.

Como foi indicado mais atrás, a aprendizagem dos números racionais é complexa e envolve a compreensão dos seus diferentes significados e relações, principalmente no caso das frações. Galen et al. (2008) denominam de rede de relações o conhecimento que os alunos desenvolvem acerca de diferentes tipos de frações e referem que esta rede de relações não se desenvolve apenas praticando. O conhecimento dos alunos acerca das frações vai sendo cada vez mais vasto e mais formal, mas este conhecimento não está associado especificamente a um contexto mas sim a uma dada fração. Um aluno que percebe que $\frac{3}{4}$ é menor que $\frac{4}{5}$, não está necessariamente preparado para perceber que $\frac{14}{15}$ é menor que $\frac{15}{16}$. Para trabalhar de forma significativa com frações os alunos necessitam de desenvolver o seu sentido de fração, onde o recurso a contextos assume um papel importante. Estes autores consideram que a ênfase na aprendizagem não deve estar apenas em situações puramente numéricas, sem qualquer contexto associado, para que os alunos não usem regras de cálculo que não entendem.

Os problemas são tarefas especialmente difíceis para os alunos abordarem questões de ordenação e equivalência de frações (Behr et al., 1986). Este tipo de tarefa, como foi referido na seção sobre o sentido de número, implica por um lado, compreender a situação e retirar dela a informação necessária à sua resolução e, por vezes, isto torna-se um obstáculo para os alunos. Por outro lado, ordenar e comparar frações envolve compreender o conceito de grandeza de um número racional (Behr et al., 1986) o que nem sempre é fácil dada a complexidade das relações que envolvem estes números. Por exemplo, é importante observar que quando numa fração o numerador aumenta e o denominador diminui, a fração aumenta e que uma fração diminui o seu valor, quando o numerador diminui e o denominador aumenta.

Para Monteiro e Pinto (2007), é na diversidade de situações e na teia de relações que envolvem os números racionais que os alunos vão desenvolvendo o seu sentido de número racional. Estas autoras defendem a diversidade de contextos na aprendizagem dos números racionais:

> O caminho entre a compreensão intuitiva, a capacidade de resolver situações informalmente mobilizando conhecimentos, e as representações simbólicas é um percurso não linear e que implica a vivência de experiências variadas, de modo a permitir um conjunto complexo de relações entre diferentes aspetos dos números racionais. (Monteiro & Pinto, 2005, p. 96).

Monteiro e Pinto (2005) referem que é desejável que uma criança desenvolva um percurso entre as suas estratégias pessoais de resolução de problemas, o estabelecimento de relações e a formalização. Salientam ainda a importância dos processos informais usados pelos alunos para estabelecer pontes entre o informal e o formal. Segundo as autoras, este é um percurso fundamental para a produção do conhecimento matemático. Também Quaresma (2010) considera importante o contexto na aprendizagem dos números racionais. Na sua perspetiva, um conceito não se desenvolve isoladamente mas sim nas relações com outros conceitos, através de diferentes tipos de problemas que utilizam várias situações e simbolismos.

*Aprendizagem das frações*

Os diversos significados das frações tornam a sua aprendizagem particularmente complexa. Vários autores (e.g., Behr et al., 1983,1986; Galen et al., 2008; Lamon, 2006; McCloskey & Norton, 2009; Prediger, 2008) têm investigado a forma como os alunos trabalham com números racionais, principalmente na representação fracionária.

Nos primeiros anos do 1.º ciclo, a fração surge como uma nova representação de um número para os alunos, uma vez que a abordagem aos números se inicia com o estudo dos naturais. Assim, o conhecimento que detêm sobre números naturais leva-os, muitas vezes, a trabalhar com números racionais como se fossem naturais (Lamon, 2006) não compreendendo que uma fração representa um número e não dois. Behr et al.

(1986) consideram que os conhecimentos sobre números naturais, por vezes, levam as crianças a focarem-se apenas no numerador ou no denominador e como resultado ordenam ou estabelecem equivalências incorretamente. Segundo estes autores, para que uma criança compreenda esta representação como um número e não dois, é necessário perceber a relação entre o numerador e o denominador, e perceber que esta relação é fundamental para determinar a grandeza deste número racional.

No momento da aprendizagem dos números racionais, os alunos tomam como base os seus conhecimentos sobre números naturais. Prediger (2008) considera que, apesar de existirem semelhanças entre estes dois conjuntos numéricos, a transição de um conjunto para o outro envolve mudanças concetuais que os alunos nem sempre compreendem. Segundo a autora, os modelos mentais construídos pelos alunos para aspetos relativos à cardinalidade, representação simbólica dos números, ordenação e operações com números naturais necessitam de uma reconceptualização quando transpostos para o trabalho com frações. Por exemplo no que se refere à cardinalidade, se no conjunto dos números naturais perguntamos "Quantos?" a resposta corresponde necessariamente um número, enquanto no conjunto dos números racionais uma fração pode descrever uma relação ou representar qualquer um dos significados que abordei anteriormente. Os números naturais têm uma representação simbólica direta com o número que representam, mas uma fração representa-se através de "dois números e uma linha" existindo várias frações que podem representar o mesmo número. A ordenação de número naturais é suportada pela sequência dos próprios números naturais existindo sempre um sucessor e onde entre dois números não existem outros, o que não acontece no caso das frações, dada a densidade do conjunto dos números racionais. A compreensão de que entre duas frações existe um número infinito de números nem sempre é facilmente compreendido pelos alunos. Por fim, no caso das operações Prediger (2008) considera que enquanto a adição/subtração de números naturais é igualmente suportada pela sequência de números naturais isto não acontece com as frações. A ideia de que multiplicar produz grandezas maiores e dividir produz grandezas menores, quando operamos com números naturais, é outro aspeto critico na transição de conhecimentos dos números naturais para os números racionais uma vez que a multiplicação de frações pode originar grandezas ainda maiores ou menores e a divisão grandezas ainda menores ou maiores. Tendo em conta os significados dos números racionais e a equivalência que podemos estabelecer entre as representações fracionária, decimal e percentagem, alguns dos aspetos referidos por Prediger (2008) são também aplicáveis ao caso dos numerais decimais e percentagens como discutirei a seguir com base na perspetiva de outros autores.

Para Galen et al. (2008) as frações devem merecer especial atenção na educação básica, por duas razões. Uma é que o conhecimento sobre frações é um princípio para a compreensão dos numerais decimais e percentagens. As frações dão significado às percentagens e numerais decimais e desempenham um papel importante no cálculo mental. Outra é que, muitas vezes pensamos usando frações, quando elas não estão implicitamente envolvidas. Por exemplo, para estimar $72\%$ de $600$, provavelmente associamos que $72\%$ está próximo de $\frac{3}{4}$ e assim consideramos metade de $600$ que é $300$ ou um quarto de $600$ que é $150$ e assim a estimativa estará próxima de $450$.

Como referi anteriormente, Cruz e Spinillo (2004) consideram que os números de referência são importantes e que, por exemplo, o referencial de metade desempenha um papel importante na compreensão inicial dos alunos sobre os conceitos lógico-matemáticos complexos associados aos números racionais, sendo possível supor que este referencial seja uma âncora que possa facilitar a resolução de operações de adição de frações. Também em situações onde têm que efetuar estimativas, os alunos usam números de referência para os apoiar na sua resolução, principalmente quando aplicam a estratégia transitiva ou residual (Cramer, et al., 2009). McCloskey e Norton (2009) referem ainda que os professores devem usar formas de operar dos alunos para que a partir delas, estes possam sentir a necessidade de desenvolver formas mais poderosas de trabalhar com frações. Estes autores consideram diversas operações mentais como a componente chave dos esquemas produzidos pelos alunos. Estas operações são ações mentais abstraídas da experiência que se tornaram disponíveis para uso em diversas situações e que ajudam os alunos a produzir conceitos sobre frações. Os esquemas que referem baseiam-se nos utilizados por Steffe e Olive (2010) nos seus trabalhos de investigação.

Para McCloskey e Norton (2009) os esquemas são constructos usados para modelar as estruturas cognitivas dos alunos. Estes esquemas ajudam a explicar e a prever as ações dos alunos fornecendo informações importantes para o enino e a aprendizagem e, descrevem formas de operar que, por norma, o aluno realiza de forma inconsciente e são ativados ao mesmo tempo e não de forma sequencial. Para os autores, é comum interpretar os esquemas como sendo estratégias, pois permitem aos professores recolherem informações acerca da forma como os alunos resolvem problemas.

Na perspetiva dos autores, a forma como os alunos operam está relacionada com a forma como veem a Matemática e apresentam cinco ações mentais usadas pelos alunos no trabalho com frações, que os ajudam a produzir conhecimento sobre o conceito de fração: (i) parte-todo (*unitizing)*; (ii) partilha equitativa (*partitioning)*; (iii) fracionamento partitivo da unidade (*disembedding)*; (iv) fracionamento iterativo (*iterating);* e (v) fracionamento reversível partitivo (*splitting)*.

Parte-todo *(unitizing*) é uma ação que consiste em considerar um objeto ou coleção de objetos como uma unidade ou uma parte de um todo (e.g., considerar dois hexágonos como um todo); partilha equitativa (*partitioning)* é separar a unidade/todo em partes iguais (e.g., quando se partilha equitativamente uma piza por quatro pessoas); fracionamento partitivo da unidade (*disembedding)* é imaginar que retira uma fração do todo mantendo o todo intacto e inalterado (e.g., ao partilhar equitativamente uma piza por quatro pessoas, supor como seria a imagem de três quartos dessa mesma piza ou então usar várias vezes um quinto para identificar três quintos); fracionamento iterativo (*iterating)* é repetir uma parte para produzir novas partes idênticas; e fracionamento reversível partitivo (*splitting)* é a conjugação da partilha equitativa (*partitioning)* com o fracionamento iterativo (*iterating)* em que uma ação implica a outra como uma relação inversa. Segundo os autores, os alunos podem explorar a natureza da relação inversa entre estas duas operações na resolução de problemas e recriar a unidade a partir de uma das suas partes, por exemplo na situação "se uma tira representar cinco vezes o tamanho de uma outra tira desenha a outra tira", os alunos que conseguem resolver problemas usando o fracionamento reversível partitivo, possuem uma importante compreensão das frações.

Usando as cinco ações mentais anteriores, McCloskey e Norton (2009) descrevem sete esquemas que podem ser usados para caracterizar o pensamento dos alunos (Quadro 1). Para os autores, cada esquema pode ser visto como uma reorganização do esquema anterior.

Quadro 1. Esquemas e operações mentais associadas no trabalho com frações e exemplos de tarefas onde podem ser usados (McCloskey & Norton, 2009)

| Esquemas | Operações mentais | Exemplos de tarefas |
|---|---|---|
| Partição simultânea | Considera o objeto como uma unidade (*unitizing*); parte a unidade continua em partes iguais e usa a composição da unidade como modelo (*partitioning*). | Partilha uma barra de chocolate igualmente por ti e mais dois amigos. |
| Parte-todo | Considera o objeto como uma unidade (*unitizing*); parte a unidade continua em partes iguais (*partitioning*); retira uma parte do todo (*disembedding)*. | Mostra dois terços de uma barra de chocolate. |
| Partilha equitativa | Considera o objeto como uma unidade (*unitizing*); parte a unidade continua em partes iguais (*partitioning*); retira uma parte para determinar a sua identidade com as outras partes (*iterating)*. | Se partilhares uma barra de chocolate igualmente por ti e dois amigos, mostra como ficará a parte que irás receber. |
| Fracionamento partitivo da unidade | Usa a fração unitária e repete-a para construir o todo (*iterating)*. | Se te der estes pedaços de chocolate (mostra 1/3 de uma barra e uma barra inteira) que parte da barra seria esta (1/3)? |
| Fracionamento partitivo | Considera o objeto como uma unidade (*unitizing*); retira uma fração própria do todo (*disembedding)*; hipoteticamente fraciona a fração própria para produzir uma fração unitária (*partitioning*); repete a fração unitária para voltar a construir a fração própria e o todo (*iterating)*, coordena frações unitárias dentro de frações compostas. | Se eu te der estes pedaços de chocolate (mostra um pedaço que corresponde a 2/3, mas que não está dividida e uma barra inteira) que parte da barra seria esta (2/3)? |
| Fracionamento reversível partitivo | Divide, em partes iguais, uma peça não fracionada maior que a unidade para recriar o todo (*splitting)*. | Se esta barra corresponder a 4/5 de uma barra de chocolate (mostra uma barra não fracionada), desenha essa barra de chocolate. |
| Fracionamento iterativo | Divide, em partes iguais, uma peça não fracionada menor que a unidade para recriar o todo (*splitting)*. | Se esta barra corresponder a 5/4 de uma barra de chocolate (mostra uma barra não fracionada), desenha essa barra de chocolate. |

Por exemplo, quando os alunos desenvolvem uma operação de fracionamento reversível partitivo (*splitting)*, conseguem reverter as operações de um sistema de fracionamento partitivo para produzir um sistema de fracionamento reversível partitivo. Ou seja, para dividirem uma unidade/todo em partes iguais e voltar a reconstrui-la, precisam de identificar a unidade/todo, fracioná-la em frações próprias e/ou unitárias e com estas reconstroem o todo. Da mesma forma, quando os alunos desenvolvem um esquema de fracionamento reversível partitivo, eles podem estar prontos para estender frações impróprias, promovendo o desenvolvimento de um esquema de fracionamento iterativo. Na sua perspetiva, um trabalho excessivo à volta da prática dos algoritmos para as quatro operações com frações condiciona o desenvolvimento da compreensão das frações, pelo que deve haver um trabalho prévio que leve os alunos a interiorizar este conceito.

*Ordenação de frações*

No âmbito do RNP, Cramer et al. (2009), através de experiências de ensino e recorrendo a material manipulável, tentam compreender como pensam os alunos quando trabalham com números racionais e como os podem ajudar a desenvolver um conhecimento profundo acerca das operações com frações e numerais decimais. No estudo que desenvolveram, os alunos, em vez de memorizarem uma regra indicada pelo professor, desenvolveram estratégias informais que lhes permitiram comparar frações. Foram identificadas quatro estratégias de ordenação de frações: (i) mesmos denominadores; (ii) mesmos numeradores; (iii) transitiva e (iv) residual:

*Mesmos denominadores*. Para comparar $\frac{3}{9}$ com $\frac{2}{9}$, os alunos sabem que o número de partes em que o todo está dividido tem o mesmo tamanho, logo, três dessas partes iguais vão ser mais do que duas partes. E assim consideram que $\frac{3}{9}$ é a fração maior.

*Mesmos numeradores.* Para comparar $\frac{3}{4}$ com $\frac{3}{8}$, sabem que quartos são superiores aos oitavos como tal $\frac{3}{4}$ representa a fração maior. Esta estratégia envolve a compreensão de que existe uma relação entre o número de partes em que cada unidade está dividida e também reflete a importância do papel do numerador. Comparar frações usando apenas os denominadores funciona apenas quando os numeradores são iguais.

*Transitiva.* Para ordenar $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$, os alunos, por vezes, têm a tendência de usar a estratégias de comparação de denominadores. Isto demonstra que os alunos não construíram o seu significado de numerador e que aplicam uma regra previamente ensinada. Neste estudo, Cramer et al. (2009) referem que, na comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes os alunos usaram números de referência. Por exemplo, para comparar $\frac{2}{7}$ com $\frac{5}{9}$ os alunos concluíram que $\frac{5}{9}$ é a fração maior, uma vez que é superior a $\frac{1}{2}$ e usam a metade como um número de referência.

*Residual.* Esta estratégia implica o uso de aproximações à unidade. Para comparar $\frac{3}{4}$ com $\frac{5}{6}$ verificam quanto falta em cada fração para terem a unidade completa e comparam-nas. Assim, a $\frac{3}{4}$ falta $\frac{1}{4}$ para ter a unidade completa e a $\frac{5}{6}$ falta $\frac{1}{6}$, usam a estratégia de comparação de frações com numeradores iguais e concluem que $\frac{5}{6}$ é maior pois $\frac{1}{6}$ é menor que $\frac{1}{4}$ e assim a quantidade que falta para atingir a unidade é menor. Cramer et al. (2009) salientam ainda que alunos que construam este tipo de estratégias estão a adquirir sentido de número e que ter sentido de número para frações é ser capaz de julgar o tamanho relativo de uma fração.

*Aprendizagem dos numerais decimais*

Relativamente à aprendizagem dos numerais decimais muitas das dificuldades reveladas pelos alunos, podem estar associadas à falta de compreensão do sistema de numeração (Galen et al., 2008; Monteiro & Pinto, 2005, 2007) ou mesmo à densidade do conjunto dos números racionais como considerado também por Prediger (2008) no caso das frações. Por exemplo, Monteiro e Pinto (2007) referem que para alguns alunos entre 0,2 e 0,3 não existem outros números racionais uma vez que pensam ainda em termos de números naturais, caso em que existe uma sequência discreta dos números.

Cramer et al. (2009) apresentam algumas ideias para uma abordagem aos numerais decimais. Assim, consideram que a construção do conceito de décima e centésima deve iniciar-se com a representação (modelo) da grelha de $10 \times 10$, embora seja aconselhável representar numerais decimais usando outras representações como é o caso da reta numérica e que estabeleçam correspondência entre as representações decimal e fracionária. Para estes autores a utilização de cor facilita a construção da imagem mental e do significado de décimas e centésimas por parte dos alunos que no futuro mais facilmente se lembrarão não só da cor, mas do espaço ocupado numa grelha de $10 \times 10$. Outro aspeto que realçam é a linguagem utilizada na leitura dos numerais decimais uma vez que esta é uma parte importante na compreensão desta representação do número racional. Na leitura de, por exemplo, 0,34 deve ler-se 34 décimas, ou seja, ler os numerais decimais como sendo décimas, centésimas ou milésimas e não como sendo “zero vírgula trinta e quatro” como acontece numa grande parte das salas de aula. Este tipo de leitura é usada muitas vezes para facilitar a comunicação mas torna-se um obstáculo à compreensão dos numerais decimais. Os alunos devem ser encorajados a ler os numerais decimais corretamente, para que percebam a grandeza do número com que estão a trabalhar.

Tal como acontece com as frações, a ideia de ordem é importante para compreender a dimensão relativa dos numerais decimais. Alunos sem imagens mentais de numerais decimais irão ordená-los como se fossem números naturais. Ao comparar 0,25 com 0,6 podem dizer que 0,25 é maior pois $25 > 6$ (Cramer et al., 2009; Monteiro & Pinto, 2005). Cramer et al. (2009) relembram que usando as imagens mentais da grelha de $10 \times 10$ os alunos podem comparar os números verificando mentalmente que 0,25 corresponde a duas colunas da grelha mais cinco centésimas e que 0,6 corresponde a seis colunas, logo 0,6 é maior que 0,25. Galen et al. (2008) acrescentam que trabalhar com os alunos a relação entre frações e numerais decimais é fundamental e contribui para a compreensão da estrutura dos decimais.

Situações de medida ou dinheiro são usualmente considerados contextos indicados para trabalhar com a representação decimal. Contudo Galen et al. (2008) referem que, apesar do dinheiro ser um bom contexto para trabalhar com esta representação numérica, é limitado, pois não se usam números superiores às centésimas e porque ao escrevermos uma quantia em dinheiro, por exemplo, dois euros e quarenta cêntimos, muitas vezes escrevemos 2,4€ e não 2,40€ eliminando o zero à direita. Para os autores esta pode ser uma das razões porque o trabalho com numerais decimais se revela difícil para as crianças, pois até as calculadoras arredondam valores e um resultado que deveria ser 4,39 aparece como 4,4 e quando se fazem medições de alta precisão é importante a utilização de valores exatos.

Compreender e estar atento aos erros dos alunos é uma forma de poder ajudá-los a ultrapassar as suas dificuldades. Galen et al., (2008), Lamon (2006) e Monteiro e Pinto (2005, 2007) enumeram um conjunto de erros que os alunos cometem no trabalho com números na representação decimal. Assim, é vulgar encontrar alunos que referem que 1,345 é maior que 1,7 dando como justificação o facto do primeiro ter "mais números" que o segundo, ou então porque 345 é maior que 7. Ao confundirem 1,6 com 1,06 confundem décimas com centésimas, podendo a leitura incorreta do número estar na origem deste erro, uma vez que não evidencia a sua grandeza. A importância de uma leitura correta dos números já tinha sido salientada anteriormente por Cramer et al.

(2009) como sendo um aspeto fundamental para a compreensão dos números na representação decimal. Dificuldades no entendimento do sistema de numeração decimal levam a que 4+2,1 seja considerado igual a 2,5. Por norma, os alunos aprendem que para adicionar ou subtrair numerais decimais se "coloca vírgula debaixo de vírgula" e na ausência de vírgula num número inteiro esta regra não ajuda. Devem sim pensar nas quantidades envolvidas em vez de aplicarem uma regra previamente memorizada. Na perspetiva de Hansen, Drews, Dudgeon, Lawton e Surtees (2014), os erros dos alunos no trabalho com numerais decimais devem-se essencialmente à falta de compreensão do valor de posição e ao desconhecimento da relação entre frações e decimais, pelo que sublinham a importância da relação entre numerais decimais e frações. Por exemplo, quando um aluno ao duplicar o valor 0,72 escreve 0,144, porque calculou 72+72=144, ou, quando na multiplicação de dois numerais decimais recorre a factos numéricos conhecidos dos números naturais e ajusta o valor posicional colocando duas casas decimais à direita da vírgula aplicando uma regra previamente aprendida ($0{,}3 \times 0{,}24 = 0{,}72$), revela uma fraca compreensão do valor de posição no sistema de numeração decimal. No caso do cálculo de $0{,}3 \times 0{,}24$ a sua relação com frações decimais ($\frac{3}{10} \times \frac{24}{100} = \frac{72}{1000}$) poderia apoiar a compreensão do valor de posição.

Monteiro e Pinto (2007) apresentam uma perspetiva semelhante ao referirem que, quando o sistema de numeração decimal não está compreendido, os alunos não estabelecem relações entre as várias representações dos números racionais e não associam essas representações às quantidades que representam. Estas autoras alertam para o perigo de uma manipulação meramente simbólica desprovida de contexto, pois consideram que dificulta o trabalho dos alunos uma vez que não permite a construção de imagens e representações que as sustentem.

Partilhando igualmente as mesmas ideias acerca dos erros dos alunos, Pérez (1997) apresenta algumas sugestões para os ultrapassar. Assim, considera que, para um bom conhecimento do sistema de numeração decimal, os alunos devem trabalhar com numerais decimais maiores e menores que 1 e conhecer suficientemente os números naturais para que possam alargar esse conhecimento aos decimais. Além disso o professor deve ter atenção na forma como os numerais decimais são apresentados aos alunos assegurando-se de que estes surgem como números novos com destintas propriedades dos naturais, por exemplo, o uso de numerais decimais para representar o número de habitantes de uma cidade, tomando como unidade o milhar ou o milhão, pode levar os alunos a considerarem o número como uma junção de números naturais separados por uma vírgula, devendo ser feita a conversão para a unidade adequada à interpretação da situação. O professor deve ainda desmistificar regras erradas criadas pelos alunos, como é o caso da forma como comparam numerais decimais, já referida por outros autores, em que consideram que o número com mais algarismos é o que representa a maior quantidade e utilizar contextos com significados para os alunos.

*Aprendizagem das percentagens*

Relativamente à aprendizagem dos números racionais na representação percentagem, Parker e Leinhardt (1995) consideram que estas são representações ricas em relações, comparações e ações podendo ser usadas em conversões, exercícios e problemas. Nas conversões, as percentagens podem ser representadas por um numeral decimal ou uma fração, ou seja, se considerarmos a percentagem $25\%$ ela poderá aparecer como $0{,}25$ ou $\frac{1}{4}$. Hansen et al. (2014) acrescentam ainda que os alunos não conseguem progredir convenientemente na aprendizagem de percentagens se não compreenderem a equivalência entre esta representação e a fracionária.

Parker e Leinhardt (1995) sugerem a abordagem de diferentes exercício envolvendo percentagens. Consideram que podemos aplicar uma percentagem $(10\%\ de\ 20 = ?)$, encontrar a percentagem $(\_\%\ de\ 20 = 2)$ ou encontrar o valor sobre o qual aplicámos uma percentagem $(10\%\ de\ \_ = 2)$. Acrescentam que, num problema, as percentagens surgem habitualmente num dado contexto e o aluno deve retirar a informação relevante, trabalhá-la matematicamente e resolver o problema. O tipo de exercícios que sugerem apesar de não requererem a recolha e tratamento de informação fornecem através das expressões de valor em falta oportunidades para os alunos estabelecerem relações de parte-parte e/ou parte-todo.

Parker e Leinhardt (1995) consideram a resolução de problemas difícil para os alunos e referem algumas das dificuldades inerentes ao trabalho com percentagens Na perspetiva dos autores, a maioria dos alunos pensa que os problemas de percentagens são todos iguais e que um simples procedimento como multiplicar ou dividir ou ocasionalmente o adicionar ou subtrair quantidades de referência são suficientes para resolver qualquer problema. As dificuldades aumentam quando percentagens superiores a $100\%$ estão envolvidas. Para além das dificuldades em interpretar uma situação e retirar dela a informação essencial (comum à resolução de problemas com qualquer uma das representações dos números racionais), existem outros aspetos que dificultam o trabalho dos alunos com percentagem, como é o significado do sinal %. Segundo Parker e Leinhardt (1995), muitas vezes os alunos ignoram inicialmente o sinal % e posteriormente colocam-no na resposta ao problema ou inserem-no erradamente não fazendo distinção entre $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}\%$. Isto revela um desconhecimento do significado do sinal de percentagem. Uma forma de atenuar este tipo de erro é mostrar aos alunos que podem trabalhar percentagens convertendo-as em frações ou decimais. Outro erro comum é pensar que o sinal de percentagem à direita do número pode ser transformado numa vírgula à esquerda desse mesmo número, sem pensar no seu significado. Se $45\%$ representa $0{,}45$ então $9\%$ representa $0{,}9$ ou $120\%$ representa $0{,}120$. Este é um raciocínio que os alunos fazem erradamente com alguma frequência.

Na perspetiva de Hansen et al. (2014) os erros dos alunos com a representação percentagem relacionam-se essencialmente com a confusão entre razão e proporção. A razão compara parte-parte (numa coleção de 30 elásticos coloridos 20 são azuis e 10 são vermelhos, a razão entre os número de elásticos vermelhos e azuis é de 10 em 20, ou seja $\frac{1}{2}$) enquanto a proporção num conjunto de objetos compara parte-todo (na mesma coleção de 30 elásticos coloridos, a proporção dos elásticos vermelhos é de 10 em 30, ou seja $\frac{1}{3}$). Acrescentam ainda que a incompreensão da relação multiplicativa numa proporção é outro aspeto crítico e promotor de erros, levando os alunos a usarem relações aditivas em vez de multiplicativas. Moss e Case (1999) consideram ainda que a semelhança existente entre a representação percentagem e os números naturais faz com que a maioria dos erros dos alunos se centre na confusão entre números naturais e racionais. Ao trabalharem com percentagens, os alunos devem desenvolver estratégias próprias com sentido, em vez de memorizarem um conjunto de regras que por vezes não conseguem aplicar. Os erros que referi anteriormente demonstram que os alunos não compreendem a natureza dos números ou o efeito de operar sobre quantidades de vários tipos. Moss e Case (1999) acrescentam que os erros dos alunos com percentagens revelam um profundo desconhecimento concetual que se relaciona não apenas com a representação percentagem mas com as três representações simbólicas dos números racionais. É fundamental discutir com os alunos a relação entre representações dos números racionais até porque, segundo os autores, todo o valor representado em percentagem tem uma equivalência em, fração e decimal que é fácil de determinar, mas o inverso nem sempre é verdadeiro. Por exemplo, frações como $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{7}$ não possuem um correspondente direto equivalente em percentagem e decimal. Neste sentido os autores defendem que o ensino dos números racionais deve começar pelas percentagens pois consideram que assim se criam oportunidades para uma compreensão alargada acerca da forma como as três representações dos números racionais se relacionam.

Para Moss e Case (1999) a falta de conhecimentos dos alunos sobre percentagens tem a ver com a falta de compreensão concetual e uma excessiva dedicação ao ensino de procedimentos, que na maioria das vezes, não têm em conta as aprendizagens prévias dos alunos, a diferença entre o ensino dos números racionais e o ensino dos números naturais (aspeto relacionado com a perspetiva de Prediger (2008)), que ao não se valorizarem as representações dos números racionais (fracionária, decimal, percentagem) faz com que os alunos as usem de forma confusa. Consideram ainda que o ensino é por vezes muito baseado em definições sem contextualização das representações simbólicas dos números racionais.

Relativamente à relação entre percentagens e frações, Galen et al. (2008) também consideram importante que os alunos consigam converter percentagens em frações e vice-versa, para que percebam a utilidade de valores de referência como $25\%$, $50\%$ ou $75\%$, e assim consigam, por exemplo, relacionar que $72\%$ se aproxima de três quartos. A capacidade de converter uma representação noutra, ajuda os alunos a perceber a dimensão de uma percentagem e contribui para o desenvolvimento do sentido de número. Acrescentam ainda que a utilização de outras referências e "números redondos" como $10\%$, $20\%$ ou $60\%$ no trabalho com percentagens ajudam a perceber a relação proporcional em números de maior dimensão e que o trabalho com estes números só deve existir quando os alunos estiverem preparados para fazer estimativas ou usarem a tecnologia como apoio.

O ensino das percentagens deve contemplar o uso de representações (modelos) que facilitem a compreensão dos alunos. Alguns autores sugerem a utilização de material manipulável, a grelha de $10 \times 10$, também sugerida para os numerais decimais, a reta numérica dupla ou a tabela de percentagens. Parker e Leinhardt (1995) referem a importância da utilização de material concreto, principalmente em problemas que envolvam estimativas e a grelha de $10 \times 10$. Apresentam os mesmos argumentos que Cramer et al. (2009) avançaram para o uso da grelha de $10 \times 10$ na aprendizagem dos numerais decimais, mas alertam para a limitação desta representação, principalmente na interpretação de percentagens superiores a $100\%$. Sugerem ainda a representação da dupla figura em que mediante duas figuras iguais o aluno pinta uma das figuras em função de uma percentagem da outra (pinta a figura "$a$" de forma a que esta represente 70% da figura "$b$") e a escala comparativa que permite a comparação simultânea entre uma percentagem e a quantidade que representa relativamente ao todo. Galen et al. (2008) designam esta escala comparativa de "reta numérica dupla" e acrescentam que se trata de um bom suporte ao cálculo mental com percentagens uma vez que permite aos alunos centrarem-se em valores de referência como o 1%, 10%, 25% ou 50% para fazerem comparações entre a percentagem e o valor correspondente. Estes autores sugerem ainda o uso de tabelas de percentagem que se assemelham muito à reta numérica dupla, pois permitem que o aluno estabeleça relações livremente entre percentagens e valores mas com uma diferença, permite que as relações sejam apresentadas de forma aleatória.

*Erros no cálculo mental*

Na perspetiva de McIntosh (2006), os erros que os alunos cometem no cálculo mental são fundamentalmente concetuais e procedimentais. Segundo o autor, um erro concetual surge quando o aluno não compreende a natureza dos números ou a operação envolvida, o que se relaciona com alguns dos erros já referidos nas secções anteriores acerca da aprendizagem das diversas representações dos números racionais e com outros que irei adiante referir acerca das operações. Num erro procedimental o aluno sabe que estratégia usar e, ao pô-la em prática, erra por falta de "atenção". Por exemplo, se, ao calcular 0,1×0,1 o aluno responde 0,1 ou, ao calcular $3 \div \frac{1}{2}$, o aluno responde $1\ \frac{1}{2}$ trata-se de erros concetuais. Se, no cálculo de 74-30, o aluno responde 36 este é um erro procedimental, pois neste caso a estratégia de retirar 4 ao 74, subtrair 30 de 70 e depois voltar a adicionar 4 é uma boa estratégia, mas um problema de falta de controlo do procedimento (*lack of control over the procedure)* levou-o a subtrair em vez de adicionar. O autor considera ainda que os erros procedimentais são mais comuns no trabalho com números naturais e que os erros concetuais são mais comuns com números racionais.

Para Goméz (1995), os erros dos alunos têm na sua origem uma tentativa de adaptação de conhecimentos previamente adquiridos pelos alunos a novas situações. Para o autor, a utilização de procedimentos incorretos no cálculo mental por parte dos alunos, está associada a mecanismos de generalização, extrapolação e desfocalização. A generalização e a extrapolação dizem respeito a propriedades que os alunos não compreendem e que concebem como verdadeiras por verificarem a sua validade em determinados exemplos, desconhecendo ou desconsiderando contraexemplos. A desfocalização é causada pela interferência de factos que centram a atenção do aluno em determinados aspetos da resolução (daí o termo "centramientos" usado pelo autor) levando-o a aplicar incorretamente um determinado passo ou resolução intermédia. O autor considera ainda que a manipulação simbólica excessiva em detrimento da reflexão acerca das quantidades envolvidas, da relação entre representações dos números, bem como acerca dos princípios em que se baseiam os procedimentos e o efeito que estes têm sobre os números e os resultados das operações é a causa de muitos dos erros cometidos pelos alunos no cálculo mental. Assim, sugere que se confronte os alunos com os seus próprios erros para que estes compreendam a inconsistência das suas respostas. O pedido de justificações aos alunos é um aspeto que considera essencial para a reflexão em torno dos erros que estes manifestam. Acrescenta ainda que é importante fazer emergir erros no cálculo mental para que os alunos os possam discutir e assim melhorar o seu conhecimento concetual sobre os procedimentos aritméticos.

## 2.3. Aprendizagem das operações com números racionais

### 2.3.1. Aspetos gerais

Numa fase inicial, a aprendizagem das operações com números racionais deve ter por base situações contextualizadas (Behr et al., 1986; Cramer et al., 2009; Cruz & Spinillo, 2004; Galen et al., 2008; McIntosh et al., 1992; Monteiro & Pinto, 2005, 2007), para que os alunos consigam progressivamente manipular símbolos com compreensão e segurança. Deve igualmente partir dos conhecimentos informais e intuitivos dos alunos para que estes, de forma significativa, se possam apropriar de regras e simbologia cada vez mais formais (Cruz & Spinillo, 2004; Monteiro & Pinto, 2005).

Para Llinares e Garcia (2000), a introdução prematura de algoritmos pode levar os alunos a aplicarem regras sem sentido ou a utilizarem os números sem os associar a situações concretas e naturais à própria operação. Esta rápida passagem aos algoritmos tende a levar os alunos a realizar manipulação simbólica, sem compreender o esquema concetual subjacente. Brown e Quinn (2006) consideram que o desconhecimento concetual acerca da própria operação pode ser a origem de muitos dos erros dos alunos nas operações com números racionais Llinares e Garcia (2000)e McCloskey e Norton (2009), consideram que aumentar o tempo de prática e manipulação dos algoritmos não aumenta a compreensão dos números racionais e dos passos necessários à realização desses algoritmos. Alertam para a importância de estar atento aos erros dos alunos em situações de cálculo, para poder usar este conhecimento em prol da aprendizagem.

Behr et al. (1986) e McIntosh et al. (1992) consideram que a aprendizagem das operações com números racionais deve ter uma base intuitiva e recorrer a números de referência. Para Cruz e Spinillo (2004), a intuição deve desempenhar um papel mais expressivo nas operações com frações, uma vez que, para calcular operações como $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$, não se deve esperar que os alunos usem o algoritmo, mas sim o seu conhecimento do que representa cada uma destas frações.

O recurso a contextos é igualmente valorizado na aprendizagem das operações com números racionais por Monteiro e Pinto (2005). As autoras consideram que, numa primeira fase da aprendizagem das operações com números racionais, o contexto desempenha um papel fundamental, pois existem problemas que os alunos resolvem bem recorrendo a desenhos ou esquemas mas que não conseguem resolver recorrendo a símbolos. Justificam esta ideia referindo que é mais fácil para uma criança de 9 ou 10 anos perceber que, se come metade de uma piza e depois um quarto de piza, come três quartos de piza, do que perceber que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ representa $\frac{3}{4}$, sem ligação com qualquer contexto significativo.

### 2.3.2. Adição e subtração

A adição e subtração com números naturais são as primeiras operações que os alunos aprendem no início do ensino básico. Diversos autores apontam erros originados pelo hábito dos alunos operarem com números naturais, em que estes não conseguem usar aprendizagens anteriores para estabelecer relações e produzir novos conhecimentos. Por exemplo, para Lamon (2006), os alunos trabalham com números racionais como se fossem naturais não considerando uma fração como um número, mas sim dois números, o que lhes dificulta a operação com estes números. A influência das operações com números naturais pode refletir-se de forma negativa na escrita de frações equivalentes (por exemplo, $\frac{2}{5} = \frac{8}{11} = \frac{14}{17}$), em que a relação entre as frações tem subjacente uma relação aditiva (mais seis) e não multiplicativa. Uma compreensão errada do significado do sinal de igual também pode levar a um erro deste tipo.

Para Monteiro e Pinto (2007) a visão de fração enquanto representação de dois números leva a que os alunos adicionem ou subtraiam os numeradores e os denominadores quando operam com frações (por exemplo, $2 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$). Para Llinares e Garcia (2000) este é um erro frequente dos alunos e demonstra que estes ignoram o significado dos símbolos. Estes autores consideram que, uma das formas de combater este erro é introduzir os numerais mistos em contextos concretos logo no início da aprendizagem dos números racionais.

Na perspetiva de Hansen et al. (2014), o tipo de erro referido por Monteiro e Pinto (2007), bem como outros erros onde os alunos operam com numeradores e denominadores sem sentido relaciona-se sobretudo com o desconhecimento da relação existente entre numerador e denominador de uma fração. Esta falta de compreensão pode levar os alunos a multiplicar numeradores e adicionar denominadores ($\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$) ou vice versa ($\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6}$); multiplicar numeradores e denominadores confundindo procedimentos do algoritmo da multiplicação de frações com o da adição de frações ($\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$); adicionar numeradores e denominadores ($\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$); adicionar numeradores e ignorar denominadores ($\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1 + 2$); adicionar numeradores sendo o denominador obtido através da soma de numeradores e denominadores de ambas as frações ($\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2+1}{1+2+3+2} = \frac{3}{8}$); ou adicionar numeradores e denominadores de ambas as frações para obter o numerador e calcular corretamente o denominador ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1+2+1+4}{4} = \frac{8}{4}$).

Acrescentam ainda que a adição de numeradores e denominadores poderá ser uma generalização dos procedimentos usados na multiplicação de frações, usada após os alunos terem aprendido a multiplicação.

Para adicionar ou subtrair frações, um processo importante é a determinação do denominador comum. No âmbito do *RNP*, Cramer et al. (2009) constataram que os alunos podem encontrar os denominadores comuns de diferentes formas: (i) se os denominadores lhes são familiares usam experiências anteriores, por exemplo $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ são frações tão familiares que os alunos sabem que o denominador comum é o 4; (ii) multiplicam os denominadores e usam o produto como o denominador comum; (iii) criam listas de frações equivalentes; e, alguns alunos (iv) usam a fração unitária como referência para calcular a fração equivalente. Por exemplo, para calcular uma fração equivalente a $\frac{3}{4}$ de denominador 12, o aluno parte da fração unitária $\frac{1}{4}$ e mantendo o denominador 12, multiplica o numerador por 3 e volta a multiplicar por 3 para obter $\frac{9}{12}$, a fração equivalente a $\frac{3}{4}$. Llinares e Garcia (2000) acrescentam ainda que os alunos podem recorrer a outros procedimentos de cálculo, mais rápidos, como é o caso do cálculo do mínimo múltiplo comum entre os dois denominadores. Estes procedimentos de cálculo são úteis para casos em que os denominadores são primos entre si ou quando um não é múltiplo do outro.

Para Lamon (2006) e Monteiro e Pinto (2005, 2007) outros problemas, para além dos já referidos, se associam ao trabalho com frações, como é o caso da comparação. Apesar de uma fração ser construída a partir de dois números, ela representa apenas um número e tendo em conta a grandeza da fração, $\frac{1}{3}>\frac{1}{7}$ embora $7>3$. Esta analogia feita pelos alunos revela uma incompreensão da representação fracionária assim como quando consideram que $\frac{1}{2}=1{,}2$. Para adicionar ou subtrair frações existem novas regras e $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ é diferente de $\frac{3}{8}$ uma vez que as frações representam um número e não dois, mas $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ pode ser igual a $\frac{3}{8}$ se considerarmos que estamos a trabalhar com razões pois a adição de razões não se processa da mesma forma que a adição de frações. Outro aspeto que contribui para complicar a aprendizagem das operações com números racionais é que, embora a maioria das regras de operações com números naturais não se apliquem aos números racionais, as regras da multiplicação de naturais continuam a verificar-se quando multiplicamos frações.

Ainda no que respeita aos erros cometidos pelos alunos, Llinares e Garcia (2000) consideram que muitos deles têm origem nas dificuldades de compreensão do conceito de número racional ou na aplicação sistemática de procedimentos errados ao nível das operações. Para os autores, alunos cujo ensino se centrou muito na compreensão das frações como relação parte-todo, terão dificuldades em compreender que $\frac{2}{5}$ é um número compreendido entre $0$ e $1$ ou como uma divisão de $2$ por $5$, podendo levá-los a uma resposta errada. A reta numérica pode ser uma boa representação para ajudar os alunos ultrapassar esta dificuldade.

Apesar de alguns autores considerarem negativa a relação que os alunos estabelecem entre o trabalho com números naturais e o com números racionais, outros defendem que existem aspetos positivos. Assim, para Pérez (1997) os alunos podem adicionar/subtrair numerais decimais como se fossem naturais, uma vez que as regras das operações se mantêm, sendo necessário ter especial atenção na colocação da vírgula. Também Galen et al. (2008) consideram que a relação entre o cálculo com números naturais e com numerais decimais facilita, em alguns aspetos, as operações com decimais comparativamente às operações com frações. No entanto esta correspondência por vezes é efetuada sem considerar a ordem de grandeza dos números a operar. Por exemplo, para efetuar $0{,}23 + 0{,}7$ uma grande parte dos alunos responde $0{,}30$ uma vez que $23 + 7 = 30$. Para estes autores, o professor pode aconselhar os alunos a colocarem o mesmo número de casas decimais à direita da vírgula, acrescentando zeros, antes de efetuarem a soma, mas isto não passa de um truque que os ajuda a chegar à resposta certa sem que realmente se apercebam da razão porque o devem fazer. Em vez disto seria conveniente fazê-los perceber que $0{,}23\ +\ 0{,}7$ pode ser convertido em $\frac{23}{100} + \frac{7}{10}$ e que para efetuar a soma deveriam calcular o mesmo denominador e assim transformar os décimos $\left(\frac{7}{10}\right)$ em centésimos $\left(\frac{70}{100}\right)$. Esta relação entre numerais decimais e frações é igualmente defendida por Hansen et al. (2014) como já tinha referido anteriormente. Outra alternativa é, em situações de medida, levar os alunos a pensarem no contexto e a converterem os numerais decimais de forma a atribuírem significado às operações com decimais.

Llinares e Garcia (2000) acrescentam que os contextos de medida caracterizados pela relação parte-todo são os que de forma natural mais se associam à adição e subtração de números racionais. Assim, consideram que a relação entre diferentes significados de número racional e as operações potencia a aquisição do conceito de operação.

### 2.3.3. Multiplicação e divisão

Durante o 1.º ciclo, os alunos desenvolvem um significado limitado de multiplicação e divisão (Lamon, 2006). A aprendizagem dos números racionais traz novos desafios no âmbito das operações pois, enquanto no trabalho com números naturais as quantidades estavam associadas a contagens ou medições, na multiplicação e divisão de números racionais estas operações produzem novas quantidades que estão relacionadas com duas quantidades operadas. Na perspetiva de Lamon (2006), a verdadeira compreensão das operações de multiplicação e divisão só acontece quando o aluno consegue construir unidades compostas ou compor unidades de múltiplas entidades, sendo a noção de fração importante para representar quantidades complexas que resultam da multiplicação ou divisão.

Na perspetiva de Prediger (2008), o facto dos modelos mentais construídos para a aprendizagem da multiplicação de números naturais não terem continuidade na multiplicação de frações, pode ser a explicação para as dificuldades dos alunos na aprendizagem e compreensão da multiplicação de frações. Para a autora, a falta de modelos mentais dificulta a reconceptualização necessária à mudança de conjunto numérico e refere como exemplos a adição sucessiva ($3\times5$ significa $5+5+5$) e interpretação combinatória ($3\times5$ como o número possíveis de combinar 3 camisolas com 5 calças) nos números naturais que não têm continuidade na aprendizagem das frações. Deste modo, para os alunos, não existem à partida modelos mentais representativos e auxiliares para a aprendizagem das frações. O mesmo acontece com o significado de “uma parte de algo” ($\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}$ que significa $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{2}$) que não tem correspondência com os números naturais. Estes aspetos da multiplicação de frações dificultam a sua compreensão, sendo também referidos por Galen et al. (2008) e Lamon (2006).

Na perspetiva de Llinares e Garcia (2000), a multiplicação e divisão de frações está associada ao significado de operador dos números racionais e ao seu carácter algébrico. Relativamente à multiplicação de números racionais, Cramer et al. (2009) e Galen et al. (2008) consideram que é mais fácil para os alunos multiplicar um número inteiro por uma fração do que o inverso, sendo fundamental compreenderem o significado de $3 \times \frac{1}{4}$ como sendo 3 grupos de $\frac{1}{4}$. Indicam que esta é uma boa forma de iniciar a abordagem à multiplicação de frações.

Para Galen et al. (2008) é difícil para uma criança interpretar "uma fração de algo" como sendo uma multiplicação, possivelmente por não possuírem modelos mentais que apoiem esta compreensão, como refere Prediger (2008). Lamon (2006) relaciona esta dificuldade com o facto dos alunos, no trabalho com números naturais, se basearem na adição sucessiva para pensar a multiplicação e na partilha de alguns objetos por algumas crianças para pensar a divisão. No campo das operações com racionais nem sempre é possível pensar desta forma e, por isso, é necessário encontrar novas formas de o fazer (reconceptualização de conceitos como defende Prediger (2008)). O aluno deve pensar nas quantidades e na forma como estas se relacionam a fim de determinar a operação adequada. Por exemplo, no caso de,"$\frac{2}{3} \times 3$" é difícil perceberem o que significa "$\frac{2}{3}$ vezes um número" uma vez que estão habituados a associar a multiplicação a adições sucessivas e neste caso não é possível interpretar a situação dessa forma. Dificilmente um aluno associaria esta situação à multiplicação. Segundo Galen et al. (2008) é possível ajudar os alunos a dar significado a expressões como $\frac{2}{3} \times 3$. Para tal, estas situações devem ser utilizadas, num nível mais formal, com a discussão do princípio da comutatividade uma vez que os alunos estão mais familiarizados com a expressão $3 \times \frac{2}{3}$. Na multiplicação é possível trocar a ordem dos fatores sem alterar o valor do produto, percebendo que o produto de ambas as expressões é igual. Contudo, é necessário alertar que, quando se trabalha em situações concretas, por exemplo ter 3 sacos com 10 maçãs cada, não significa o mesmo que ter 10 sacos com 3 maçãs cada. Os alunos devem perceber que duas situações diferentes podem ser representadas pelo mesmo produto (Lamon, 2006), mas cada uma deve ser interpretada de acordo com o contexto onde está inserida.

Para dar significado à multiplicação, os alunos precisam de perceber que a multiplicação é muito mais do que um conjunto de adições sucessivas como já referi. Por exemplo, no caso de uma escala de um desenho, "1:4" significa que tudo é 4 vezes maior na realidade do que no desenho. O importante nesta situação é a proporção e não as adições sucessivas.

Na situação “Um quilo de maçãs custa 1,15€. Qual o preço de $\frac{3}{4}$kg?” uma grande parte dos alunos compreende que $\frac{3}{4}$ corresponde a $0{,}75$, mas passar à operação usando uma nova representação é algo mais complexo e difícil. No caso em que se multiplicam duas frações as dificuldades são ainda maiores e a situação apresentada num problema raramente é associada à multiplicação. De acordo com Cramer et al. (2009), é necessário explicar aos alunos o significado das operações. Por exemplo, o produto $\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}$ significa que cada nono irá ser dividido em terços, o que na prática corresponde a multiplicar 3 por 9 obtendo-se 27 partes. Os alunos devem perceber que o produto dos denominadores determina a dimensão das várias partes da unidade e que o produto dos numeradores representa o número de partes consideradas $\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$. Neste caso existe correspondência entre as operações com números naturais e a multiplicação de frações, mas é preciso ter sempre presente o significado do produto.

Relativamente aos erros dos alunos na multiplicação de frações, Llinares e Garcia (2000) referem que, muitas vezes, no algoritmo da multiplicação, os alunos aplicam uma mistura de procedimentos incluindo procedimentos do algoritmo da adição (por exemplo, $\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{15}\times\frac{5}{15}=\frac{30}{15}$). Primeiro, determinam o denominador comum e depois multiplicam os numeradores. Este erro pode estar associado à introdução prematura de algoritmos, não dando tempo aos alunos para compreenderem e se apropriarem dos diversos procedimentos. A interiorização da regra “na multiplicação de frações multiplicam-se os numeradores e os denominadores” pode também levar a que, no caso da multiplicação de uma fração por um número inteiro, os alunos considerarem que o número inteiro deve ser multiplicado pelo numerador e denominador da fração (por exemplo, $\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{6}$ ).

Também na divisão e multiplicação de números racionais Hansen et al. (2014) consideram que alguns dos erros dos alunos são originados pelo conhecimento que possuem da multiplicação/divisão de números naturais. Por exemplo, quando numa divisão os alunos obtém um resultado superior ao dividendo quando deveriam de ter obtido um inferior, a autora considera que esta é este erro que surge a partir da generalização de um conhecimentos que possuem sobre multiplicação e divisão de números naturais onde os produtos produzem grandezas maiores e os quocientes grandezas menores. O mesmo acontece no caso dos numerais decimais. Uma visão da multiplicação enquanto adições sucessivas (que produz um resultado maior) e da divisão enquanto subtrações sucessivas (que produz um resultado menor) poderá estar na origem deste tipo de erro.

A divisão de números racionais é outra operação de difícil compreensão para os alunos, sendo esta uma dificuldade que se arrasta desde o trabalho com números naturais. Segundo Siebert (2002), para perceber a divisão de frações os alunos devem primeiro perceber muito bem a divisão de números naturais. Principalmente devem perceber quantas vezes um número pode ser subtraído de outro ou como dividir algo num número de partes iguais. Deste modo, o autor considera que os alunos devem essencialmente entender a divisão como medida e como partilha equitativa.

Na perspetiva de Sinicrope, Mick e Kolb (2002), a divisão de frações pode ser interpretada de diferentes formas. Divide-se para determinar quantas vezes uma quantidade está contida noutra quantidade dada, para partilhar, para determinar a unidade, para determinar a quantidade inicial e para determinar uma dimensão desconhecida. Os autores consideram importantes os contextos e referem que deve existir uma ligação entre o contexto do problema e o algoritmo a utilizar, uma vez que cada contexto desencadeia um conjunto de procedimentos para resolver um problema.

Para Sinicrope et al. (2002) existem três significados para a divisão de números naturais que podem ser estendidos à divisão de frações. Estes significados da divisão vão ao encontro dos significados considerados essenciais por Siebert (2002), mas vão mais além incluindo a divisão como medida; divisão como partilha equitativa e o inverso de um produto cartesiano. Estes autores consideram que estes significados podem também ser considerados na divisão de frações, embora sejam insuficientes. Assim, acrescentam mais dois significados à divisão de frações considerando que esta pode ainda ser usada como forma de determinar uma taxa unitária e como a inversa da multiplicação.

Segundo Sinicrope et al. (2002), na divisão como medida pretende-se determinar o número de grupos. Quando se divide $2 \div \frac{1}{2}$, pretende-se determinar o número de vezes que $\frac{1}{2}$ cabe dentro de 2. O algoritmo para determinação do denominador comum é o que representa este significado da divisão:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$$

O primeiro passo na realização deste algoritmo é representar o divisor e os dividendo com o mesmo denominador. Uma vez iguais, os denominadores (a unidade de medida), dividem-se apenas os numeradores.

Na divisão como partilha equitativa, pretende-se determinar o tamanho dos grupos. Ao dividir $\frac{3}{4}$ de uma tarte igualmente por 3 pessoas, pretende-se determinar a quantidade de tarte com que cada uma das pessoas irá ficar. Neste caso o algoritmo da divisão pode representar-se de duas formas:

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{a \div c}{b} \; quando \; c \; divide \; a$$

ou

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b \times c} \; quando \; c \; não \; divide \; a$$

No caso dos significados da divisão como medida e partilha equitativa, Siebert (2002) acrescenta que é necessário que os alunos consigam distinguir entre estes dois significados, pois quando aplicados às frações eles apresentam uma explicação diferente para a aplicação da regra "inverte e multiplica". A divisão como medida pode aplicar-se diretamente a problemas com frações, mas a divisão como partilha parece não fazer muito sentido em algumas situações pela dificuldade inerente à grandeza dos números racionais. Também a divisão de frações com significado de partilha não está apenas associada à ação de partilhar, mas também de duplicar.

Para Sinicrope et al. (2002), a divisão como forma de determinar uma taxa unitária está de certa forma associada à partilha equitativa embora não se trate de partilhar, mas sim de encontrar o tamanho de um grupo. É exemplo disto o problema: "uma impressora imprime 20 páginas em dois minutos e meio. Quantas páginas imprime por minuto?" Para este tipo de divisão os autores apresentam o seguinte algoritmo:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc}$$

Na divisão como inversa da multiplicação, uma das frações passa a ser operador. Apresentam a representação simbólica do algoritmo como:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Ao significado da divisão como inversa de um produto cartesiano, Sinicrope et al. (2002) associam problemas de área em que a área total e uma das dimensões são conhecidas, pretendendo-se determinar a outra dimensão. Um dos algoritmos que associam a este significado da divisão de frações é aquele em que numeradores dividem numeradores e denominadores dividem denominadores:

$$\frac{8}{15} \div \frac{4}{5} = \frac{8 \div 4}{15 \div 5} = \frac{2}{3}$$

O algoritmo usual para a divisão de frações é a regra de "inverter e multiplicar". Na perspetiva de Siebert (2002), este algoritmo parece não estar associado à divisão uma vez que não tem sinais de divisão e não é compatível com o entendimento que as crianças têm do que é a divisão, ou seja, a noção de dividir coisas uniformemente ou de encontrar quantas vezes um número pode ser subtraído de outro. Segundo o autor, os professores devem levar os alunos a perceber que esta é uma regra para dividir frações, mas se o fizerem de forma tradicional não têm sucesso. Na sua perspetiva, devem começar por resolver problemas de divisão tendo por base o seu conhecimento informal dos dois significado básicos de divisão, para que as crianças possam criar cenários para a divisão de frações levando-as a perceber o significado de "inverter e multiplicar". O autor considera que este tipo de trabalho permite aos alunos desenvolverem imagens significativas acerca da operação divisão a partir de problemas em contextos de vida real envolvendo frações e fazendo conexões entre as soluções destes problemas e o conhecimento que têm sobre divisão de números naturais. Podem assim fazer uma extensão dos conhecimentos que já possuem. Depois de construírem estas imagens com significado, já estão preparados para descobrir o significado da regra "inverter e multiplicar" e os professores podem ajudar os alunos a compreender a regra focando-os no significado do inverso. A relação proporcional que existe entre divisor e dividendo também pode ajudar os alunos a compreender que esta relação implica aplicar o operador também ao dividendo ou, por outras palavras, multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor. Esta é a regra do "inverter e multiplicar".

Nos problemas de medida, os professores podem dar aos alunos situações cujo dividendo seja 1, para que estes percebam que o inverso do divisor é a resposta ao problema de divisão, ou seja, quantas vezes o divisor cabe em 1. Logo que as crianças percebam o significado de inverso, o professor pode mudar o dividendo, mantendo o divisor, e pedir aos alunos que usem o conhecimento do inverso para resolver a situação. Isto ajuda os alunos a pensar sobre o porquê da regra.

Nas situações de partilha, os alunos devem fazer conexões entre partilhar e duplicar na divisão com as imagens que têm da multiplicação de frações. Isto consegue-se criando representações pictóricas de soluções de problemas de divisão e multiplicação de frações e comparando-as. Por exemplo, pode-se pedir aos alunos que representem através de um desenho $1\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ e $\frac{5}{3} \times 1\ \frac{1}{2}$ e encorajá-los a descobrir semelhanças.

Monteiro e Pinto (2008) também afirmam que limitar a divisão de frações ao uso mecanizado de uma regra não favorece a compreensão desta operação. Para as autoras, quando crianças de 11 ou 12 anos aprendem a dividir frações multiplicando a primeira fração pelo inverso da segunda, é difícil compreender o porquê de multiplicar se a operação inicialmente indicada era a divisão. Esta incompreensão dá origem a que muitas vezes invertam o dividendo e não o divisor. Na perspetiva das autoras, a divisão enquadra-se nas estruturas multiplicativas e está presente em situações de multiplicação, divisão, frações e proporcionalidade. Consideram que situações de divisão podem ser organizadas em três categorias: divisão como medida; divisão como partilha equitativa e divisão como operação inversa da multiplicação.

Monteiro e Pinto (2008) complementam o referido por Siebert (2002) e Sinicrope et al. (2002) referindo que, em situações de divisão como medida, o dividendo e o divisor são da mesma natureza, sendo o divisor a “unidade de medida” com a qual se mede o dividendo. A divisão como medida aparece associada a situações de relação parte-todo ou de comparação multiplicativa. Situações deste tipo levam os alunos a fazerem agrupamentos de forma a determinarem o número de grupos, sendo dada a dimensão de cada grupo. Uma das estratégias utilizadas pelos alunos é usar adições ou subtrações sucessivas. Se o dividendo e o divisor são da mesma natureza, o quociente corresponde ao número de vezes que o divisor cabe no dividendo – um escalar.

Na divisão como partilha equitativa, o dividendo e o quociente são da mesma natureza e pretende-se determinar o valor que corresponde a cada um dos elementos do divisor. Por exemplo: “A Rita tem 12 maçãs. Se as distribuir igualmente pelos seus 4 colegas, quantas maçãs recebe cada um?” O que se pretende é encontrar o número de maçãs que cada um dos colegas irá receber. As autoras consideram que estas são as situações que os alunos mais facilmente associam à divisão, mas, no caso das frações, a divisão como partilha equitativa aparece por norma quando o divisor é um número inteiro, mas raramente quando este é um número fracionário.

Galen et al. (2008) consideram que situações de partilha são bons contextos para trabalhar tanto a divisão como a multiplicação de frações pois enquadram-se em quase todas as situações. Para estes autores, apesar da divisão e da multiplicação serem muito semelhantes, a divisão de frações por um número inteiro tem mais significado para os alunos do que a divisão de um número inteiro por uma fração. Isto acontece porque os alunos associam a divisão a uma operação que torna os valores mais pequenos como já referi anteriormente. No caso de $\frac{1}{4} \div 2$, o quociente é menor que o divisor, mas no caso $2 \div \frac{1}{4}$ a situação já não se verifica. Siebert (2002) defende que as situações de medida com frações podem ser as mais fáceis de interpretar pelos alunos pela semelhança que têm com a divisão como medida nos números naturais. No entanto, salienta que os alunos devem resolver problemas que envolvam os vários significados da divisão.

Galen et al. (2008) consideram que contextos como a distribuição de limonada ou café podem ser bons para discutir as questões relacionadas com a grandeza do quociente e do divisor. Por exemplo: “Podemos usar 2 litros de limonada e distribuí-los por 8 copos de $\frac{1}{4}$ de litro?” Esta situação pode ser resolvida recorrendo à divisão, $2 \div \frac{1}{4} = 8$, recorrendo a subtrações sucessivas em que se verifica quantas vezes é possível retirar $\frac{1}{4}$ de 2 ou, ainda, recorrendo à multiplicação, $8 \times \frac{1}{4} = 2$. Tal como na multiplicação, os alunos não devem associar a divisão apenas a subtrações sucessivas mas também a proporções. É por esta razão que nas escalas se usa o sinal de divisão (:), uma vez que não se usa a fração para dividir mas para representar uma razão.

Na divisão como operação inversa da multiplicação Monteiro e Pinto (2008) referem que “existe uma relação multiplicativa entre três medidas sendo uma delas o produto das outras duas” (p. 212). Estas são situações relacionadas com a representação de área em que se conhece um produto ($b$) e um dos fatores ($a$) e se pretende conhecer o outro fator ($c$) - ($a \times c = b$). Para as autoras, a multiplicação também pode ser trabalhada com base no produto cartesiano. Apresentam como exemplo a situação em que se conhecem o número de camisas (3) e o número total de conjuntos diferentes feitos com duas peças de vestuário (calças e camisas) e se solicita ao aluno que determine o número de calças necessárias.

Monteiro e Pinto (2008) referem alguns dos erros cometidos pelos alunos na divisão de números racionais. Um erro comum é considerar que dividir por $\frac{1}{2}$ é o mesmo que dividir por 2. Por vezes, dividir 4 por 2 ou dividir 2 por 4 é considerado como sendo o mesmo, embora tenham significados completamente diferentes. A troca do dividendo pelo divisor é comum, pois os alunos estão habituados que na divisão de números naturais o dividendo é sempre maior que o divisor (Lamon, 2006), principalmente quando nunca foram confrontados com a situação inversa.

Llinares e Garcia (2000) referem ainda que o conhecimento que os alunos têm do algoritmo da multiplicação de uma fração e de um número natural, alargado à divisão de frações pode originar erros que consistem na divisão de numeradores e denominadores quando estes não são divisíveis (por exemplo, $\frac{3}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$). Mais uma vez, a falta de compreensão do efeito das operações e das quantidades representadas pelos números racionais reflete-se neste tipo de erro.

A utilização de contextos reais permite uma melhor compreensão de situações de divisão facilitando uma aprendizagem significativa e com recurso a diferentes representações. Galen et al. (2008) referem que contextos puramente matemáticos são limitados pois não permitem aos alunos desenvolver estratégias de resolução associadas à divisão alternativas ao algoritmo. Mas também defendem que os alunos devem ser capazes de imaginar situações que lhes permitam verificar se uma resposta está correta.

Para Monteiro e Pinto (2008), ensinar a divisão não é ensinar o algoritmo, mas sim desenvolver o conceito para que os alunos saibam identificar a operação num dado problema. Para tal, os professores precisam de compreender a divisão de números racionais bem como as conexões desta operação com outras operações, para poderem ensinar de forma significativa os seus alunos recorrendo a tarefas adequadas. As autoras defendem que a formalização do algoritmo só deve acontecer depois dos alunos contatarem com diversas situações onde estes conceitos de divisão estão presentes.

De acordo com Behr et al. (1986) é essencial que os alunos percebem os conceitos básicos de grandeza de um número, antes de efetuarem operações ou estimativas com um certo grau de compreensão. Na perspetiva de Brown e Quinn (2006) a falta de conceitos básicos, que devem ser desenvolvidos com recurso a abordagens informais e referências concretas, são a origem de muitos dos erros dos alunos nas operações com números racionais.

Relativamente à multiplicação e divisão de numerais decimais, Pérez (1997) considera que estas operações são mais difíceis para os alunos, uma vez que não basta fazer uma extensão do conhecimento que têm sobre estas operações com números naturais dado que o número de casas decimais à direita da vírgula no produto não é o mesmo dos fatores.

Para Galen et al. (2008), à semelhança do que acontece com a adição e a subtração, a compreensão das operações multiplicação e divisão realizadas com números naturais pode ser uma mais-valia no cálculo com numerais decimais. Estes autores referem três situações na divisão de numerais decimais onde os conhecimentos de divisão com números naturais podem ser usados, realçando que associar um contexto às operações com numerais decimais facilita a sua compreensão. Por exemplo: (i) em contextos de medida, se se dividir $2\ m$ de tecido em pedaços de $0{,}25\ m$, não é estranho que o resultado seja superior ao dividendo, embora o mesmo não aconteça quando se trabalha apenas com números naturais caso em que a divisão reduz o dividendo; (ii) considerar a multiplicação como a operação inversa da divisão ajuda a pensar no problema anterior como sendo $\ldots.\times\ 0{,}25 = 2$ ou como uma medição realizada em vários passos em que a unidade de medida é 0,25; e, por fim (iii) a busca de números mais fáceis de operar através da divisão ou multiplicação de ambos os números pela mesma quantidade podem contribuir para o sucesso da operação a efetuar.

No caso dos numerais decimais, a multiplicação por 10 ou 100 podem fazer a diferença na operação referida anteriormente se em vez de $2 \div 0{,}25$ multiplicarmos ambos os números por 100 e calcularmos $200 \div 25$. Estes autores referem que, à semelhança do que acontece com o sentido que os alunos têm da divisão, também em relação à multiplicação de numerais decimais é difícil para as crianças perceberem que a multiplicação pode originar resultados menores que um dos fatores. Por exemplo, é mais fácil os alunos perceberem que $6 \times 0{,}21$ é menor que 6 pois podem resolvê-la através de adições sucessivas, do que $0{,}21 \times 6$, apesar de ambas as expressões representarem o mesmo produto. O recurso às adições sucessivas para realizarem problemas de multiplicação é uma estratégia vulgarmente usada pelos alunos, mas estes autores reforçam a ideia de que, enquanto a multiplicação de frações for apenas entendida como sinónimo de adições sucessivas, os alunos continuarão a ter problemas. Assim, Pérez (1997) considera que surge um novo significado para a multiplicação e divisão ao ser introduzida a notação decimal e reforça a importância da multiplicação por 10 ou 100 como um apoio à extensão dos conhecimentos que os alunos têm sobre multiplicação/divisão de números naturais para estas operações com numerais decimais.

### 2.3.4. Números racionais e pensamento relacional

O caracter algébrico dos números racionais foi já realçado neste capítulo, por Llinares e Garcia (2000), principalmente em relação às frações, e também por Schifter (1997) e Slavit (1999) quando consideram que sentido de operação é a ponte entre a Aritmética e a Álgebra. Esta ideia é agora reforçada por Empson, Levi e Carpenter (2010) ao considerarem o pensamento relacional como uma ferramenta para novas aprendizagens sobre números.

Para Empson et al. (2010), existe uma relação entre as frações e a álgebra. Esta relação enfatiza a continuidade de uma relação concetual entre números naturais e frações e mostra como as propriedades das operações e a igualdade, que são os fundamentos da Álgebra, são usados naturalmente pelas crianças nas suas estratégias de resolução de problemas envolvendo operações com e sobre frações. Baseados em 14 anos de investigação sobre como desenvolver, na sala de aula, o pensamento relacional dos alunos e como estes o podem usar na aritmética dos números naturais e frações, os autores consideram que existe um conjunto de estratégias que as crianças usam no trabalho com frações e que se baseiam nas relações matemáticas que são essenciais para a compreensão da Álgebra, nomeadamente o pensamento relacional (*relational thinking*). Consideram ainda que o pensamento relacional pode ajudar a compreender as frações e a atribuir sentido às operações com frações.

Na perspetiva de Empson et al. (2010), o pensamento relacional envolve o uso das propriedades fundamentais das operações e da igualdade para analisar e resolver um problema tendo em conta o seu contexto. Por exemplo, para calcular $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$, a criança pode pensar em $\frac{3}{4}$ como sendo $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ e raciocinar que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$,dá uma unidade e que uma unidade mais $\frac{1}{4}$ é $1\frac{1}{4}$. Na adição de frações, as crianças são levadas a calcular denominadores comuns e depois a adicionar os numeradores, o que encaram como um conjunto de procedimentos que devem seguir, e não são encorajados a usar com compreensão a propriedade distributiva para explicar os procedimentos que usaram. Esta perspetiva de mecanização de procedimentos já tinha sido realçada por Llinares e Garcia (2000) e

McCloskey e Norton (2009) como infrutífera para a aprendizagem das operações. Para Empson et al. (2010), a centralização nos procedimentos leva a que as crianças mais tarde não estejam preparadas para usar adequadamente as propriedades das operações e não estejam preparadas para justificar porque é que $7a + 4a$ é $11a$ mas $7a + 4b$ não é $11ab$. Os autores consideram ainda que as crianças aprendem Aritmética com compreensão quando são encorajadas a desenvolver a sua compreensão intuitiva dos números e operações. Para aprender Aritmética é necessário pensar sobre Aritmética de forma relacional.

Para Empson et al. (2010), as frações não são difíceis se for desenvolvido o pensamento relacional nas crianças. O foco no pensamento relacional pode ajudar as crianças a transformarem as frações em algo que através de um desenho ou do reforço das propriedades dos números e das operações os leve a raciocinar sobre as quantidades envolvidas. Na sua perspetiva, as crianças, antes de aprenderem a operar com frações, devem compreender a fração enquanto quantidade. Uma fração é definida por uma relação multiplicativa entre dois naturais e o pensamento relacional ajuda a perceber as quantidades envolvidas numa fração. Consideram ainda que uma criança começa a pensar de forma relacional acerca das quantidades envolvidas numa fração quando consegue relacionar o número de partes iguais em que deve dividir o todo com o número de pessoas pelo qual deve distribuir igualmente essas partes.

Para estes autores, o pensamento relacional pode ser usado para dar sentido às operações com frações. A partir do momento em que as crianças compreendem as frações como um conjunto de relações, começam a ser capazes de compor e decompor quantidades com o propósito de transformar expressões e simplificá-las no cálculo. Um ponto fundamental no crescimento da compreensão da criança é atingido quando estas começam a usar nas suas estratégias o pensamento relacional para realizarem adições ou subtrações sucessivas de frações de forma mais eficiente através da aplicação de propriedades fundamentais das operações e de igualdades para combinar quantidades. Uma criança que, para calcular 8 grupos de $\frac{3}{8}$, pensa que se 8 grupos de $\frac{1}{8}$ é igual à unidade, então $\frac{3}{8}$ serão três unidades, tem um raciocínio que se baseia na propriedade comutativa e associativa da multiplicação.

Apoiando-se no caso de um aluno, Empson et al. (2010) exemplificam a forma como se pode usar o pensamento relacional na resolução de um problema de partilha equitativa com números racionais. Considerando a situação: “Dois terços de um saco de café pesam 2,7 kg. Quanto poderá pesar o saco de café completo?” um aluno do 6.º ano resolveu-o recorrendo à transformação das quantidades envolvidas e ao uso flexível das propriedades fundamentais das operações e a igualdades, com o intuito de simplificar os cálculos. Os autores consideram que o pensamento relacional está presente na estratégia usada pelo aluno. O aluno começou por reconhecer que era um problema de divisão e escreveu $2{,}7 \div \frac{2}{3}$. Posteriormente decompôs 2,7 em $0{,}7 + 2$, mostrando que em vez de proceder à aplicação direta de um procedimento de cálculo, optou por estabelecer relações para simplificar os cálculos a efetuar. Para os autores, esta escolha envolve um pensamento antecipado (*anticipatory thinking*), uma vez que o aluno analisa o problema para ver que tipo de relações pode estabelecer e que lhe podem facilitar os cálculos, o que posteriormente se traduz na execução de diversos passos para resolver o problema. Começou por dividir 0,7 por $\frac{2}{3}$ e 2 por $\frac{2}{3}$ usando a propriedade comutativa da adição e aplicando a propriedade distributiva à divisão. Esta aplicação da propriedade distributiva é um princípio de uma generalização que, segundo os autores, pode ser justificada com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em conjunto com a relação inversa entre multiplicação e divisão. Seguidamente, para facilitar a divisão, o aluno transformou ambas as frações em frações equivalentes de denominador 30, ou seja, transformou 0,7 em $\frac{21}{30}$ e $\frac{2}{3}$ em $\frac{20}{30}$. Nesta fase, os autores consideram que o aluno voltou a antecipar o seu pensamento para produzir frações equivalentes que lhe facilitassem a divisão. Na divisão de $\frac{21}{30}$ por $\frac{20}{30}$, considerou que bastava dividir 21 por 20 e isso seria uma unidade restando $\frac{1}{20}$. Depois, dividiu 2 por $\frac{2}{3}$, o que rapidamente concluiu ser 3. O aluno, questionado sobre a sua rápida resposta explicou que, se 2 dividido em terços dá 6 e uma vez que tem três vezes $\frac{1}{3}$ em cada unidade, então 2 a dividir por $\frac{2}{3}$ é 3, uma vez que $\frac{2}{3}$ é o dobro de $\frac{1}{3}$. Empson et al. (2010) associam a seguinte expressão à forma como o aluno pensou:

$$2 \div \frac{2}{3} = 2 \div (2 \times \frac{1}{3}) = 2 \div (\frac{1}{3} \times 2) = (2 \div \frac{1}{3}) \div 2$$

Para os autores, mais uma vez o aluno usou o princípio de uma generalização mas agora transpondo a propriedade associativa para a divisão que pode ser justificada através de propriedades formais enraizadas nas relações que estabelece entre as quantidades envolvidas nas frações e na divisão. Subjacente a todo o raciocínio do aluno está a expressão:

$$2{,}7 \div \frac{2}{3} = 1\ \frac{1}{20} + 2 \div \frac{2}{3} = 1\ \frac{1}{20} + 3 = 4\ \frac{1}{20}$$

Ao longo da resolução, o aluno mostra ter uma visão global do problema e define passos intermédios que o conduzem à resposta final. Os autores consideram que o aluno construiu um pensamento por antecipação bem como uma compreensão de como as expressões e equações poderiam ser transformadas. Este tipo de pensamento está intimamente relacionado com a manipulação simbólica em álgebra.

Na perspetiva de Empson et al. (2010), cada estratégia surge em função da compreensão que cada criança tem dos números e operações e usa relações numéricas que lhe são familiares para estabelecer novas relações e efetuar o cálculo. O pensamento relacional que as crianças usam quando trabalham com frações é uma Álgebra informal. O desenvolvimento de conhecimentos base para pensar sobre frações de forma eficiente integra o conhecimento das propriedades dos números naturais e das suas operações, suas relações e antecipa a Álgebra da generalização de quantidades. Os autores afirmam que não são contra a utilização de algoritmos para o desenvolvimento de alguma fluência com operações com números, mas argumentam que se o desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos for apoiado, o conhecimento acerca da generalização das propriedades dos números e das operações torna-se mais explícito e pode ser a base para a aprendizagem da Álgebra nos níveis de escolaridades seguintes atenuando erros e equívocos dos alunos.

Usando pensamento proporcional relacional, as crianças podem usar estratégias que passam pela generalização das propriedades das operações. Por exemplo, uma criança pode transformar uma fração em frações unitárias e usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Se um quarto de $\frac{1}{3}$ é $\frac{1}{12}$ então um quarto de $\frac{2}{3}$ é $\frac{1}{12} + \frac{1}{12}$. Para Empson et al. (2010) o pensamento relacional é um percurso crítico – talvez o mais crítico – para a aprendizagem da Álgebra com compreensão, mas é necessário. Acrescentam ainda que, se as crianças compreendem a Aritmética que aprendem, então estão melhor preparados para resolver problemas e gerar novas ideias no campo da Álgebra.

## 2.4. Síntese

Em Portugal, a aprendizagem dos números racionais inicia-se no 1.º ciclo e percorre todo o ensino básico. De acordo com o programa de Matemática em vigor aquando da realização deste estudo, numa primeira fase da aprendizagem devem privilegiar-se abordagens intuitivas a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes. Progressivamente, ao longo dos dois primeiros ciclos abordam-se os diversos significados dos números racionais (parte-todo, medida, quociente, operador, razão) e as representações fracionária, decimal, numeral misto e percentagem. Devem ser privilegiados contextos que permitam relacionar as várias representações dos números racionais e o cálculo mental exato e aproximado. As operações com a representação decimal aparecem no 1.º ciclo enquanto as operações com frações surgem no 2.º ciclo. No 3.º ciclo, os alunos comparam, ordenam e operam com números racionais negativos.

A aprendizagem dos números racionais envolve um conjunto de relações nem sempre fáceis de entender por parte dos alunos, o que se reflete nas dificuldades que manifestam. Esta aprendizagem requer compreensão e capacidade de relacionar números, operações e suas propriedades. Assim, um trabalho eficiente com números racionais requer possuir sentido de número e sentido de operação. Para McIntosh et al. (1992), estes dois sentidos complementam-se pois o sentido de operação é necessário para a aquisição do sentido de número. Na perspetiva deste autor, ter sentido de número é ter conhecimento e destreza com números, conhecimento e destreza com operações e capacidade para aplicar estes conhecimentos em situações de cálculo. No entanto, para Schifter (1997) e Slavit (1999), o sentido de operação é distinto do sentido de número e estabelece uma ligação entre a Aritmética e a Álgebra. Slavit (1999) apresenta dez aspetos para clarificar o sentido de operação, envolvendo conceções flexíveis e relacionáveis pelo individuo que incluem as estruturas da operação, o seu uso e relação com outras operações matemáticas e estruturas e, numa fase mais evoluída, a capacidade de generalização.

Subjacente ao sentido de número e de operação, sejam estes considerados ou não de forma integrada, está a necessidade de compreender os significados e a forma como se relacionam as diferentes representações dos números racionais. As representações relacionam-se entre si e com cada um dos significados. Assim, a representação fracionária está associada aos cinco significados dos números racionais, a representação decimal à relação parte-todo e à medida, a percentagem à relação parte-todo, operador e razão.

Dada a complexidade de relações que envolvem os números racionais, numa primeira fase, a sua aprendizagem deve ser contextualizada para que os alunos compreendam os diferentes significados, representações e quantidades representadas e comecem a construir as suas referências, para, numa fase posterior, conseguirem trabalhar num nível mais formal. Partir da aprendizagem dos alunos para construir novos conhecimentos é um aspeto realçado por vários autores bem como a utilização de representações (por exemplo, material manipulativo, grelha $10 \times 10$, reta numérica e reta numérica dupla) para modelar situações que envolvam números racionais.

De todas as representações dos números racionais, a fração é a mais complexa, sendo a sua utilização em diferentes contextos fundamental para a aquisição do sentido de número racional. As restantes representações (decimal e percentagem) podem ser ensinadas partindo das frações, o que mais uma vez realça a importância da aprendizagem e compreensão desta representação e sua relação com as restantes representações. Ao trabalharem com frações, os alunos usam um conjunto de ações mentais (parte-todo; partilha equitativa; fracionamento partitivo da unidade; fracionamento iterativo; e fracionamento reversível partitivo) de complexidade crescente, que lhes permitem interiorizar progressivamente o conceito de fração. O conhecimento e consciencialização destas ações mentais dos alunos, por parte dos professores, pode ser uma mais-valia para o ensino dos números racionais.

A aprendizagem da Matemática deve ser dinâmica, levando os alunos a relacionar as aprendizagens que já possuem em novas situações a fim de ampliar os seus conhecimentos. Muitos autores consideram os conhecimentos dos alunos sobre números naturais e suas operações como um apoio ao trabalho com números racionais. No entanto, outros apontam que estes conhecimentos dificultam a aprendizagem dos números racionais levando os alunos a cometer erros. Esta dificuldade relaciona-se essencialmente com uma necessidade de reconceptualização de alguns conceitos como o de cardinalidade, representação simbólica dos números, ordenação e operações que do conjunto dos números naturais para o dos números racionais perdem algumas das suas interpretações, principalmente quando nos referimos à representação fracionária. Esta descontinuidade faz com que os alunos deixem de possuir modelos mentais que os apoiem nesta transição e reconceptualização. No caso das frações, alguns dos erros mais frequentes dos alunos estão associados à comparação e ordenação. A dificuldade em perceber as quantidades envolvidas e os conhecimentos que os alunos possuem sobre números naturais leva-os a considerarem uma fração, não como um número mas sim como um par de dois números, comparando numeradores e denominadores e não a fração como um todo.

Relativamente aos numerais decimais, os erros dos alunos estão associados à falta de compreensão do sistema de numeração, nomeadamente do valor de posição dos algarismos, mas também à relação entre numerais decimais e frações. A semelhança entre numerais decimais e números naturais é considerada por alguns autores como positiva para a aprendizagem dos decimais, enquanto outros consideram-na a base dos erros dos alunos pela dificuldade que estes têm em relacionar e transitar entre aprendizagens. Um dos erros mais frequente verifica-se na comparação de numerais decimais onde os alunos consideram que um número com mais algarismos é o que representa a maior quantidade. No caso das percentagens, os erros dos alunos surgem associados à falta de compreensão do significado do sinal de %, mas também à relação entre percentagens, frações e numerais decimais

O ensino das operações com números racionais, muitas vezes, centra-se na memorização e prática de algoritmos. Vários autores consideram que a prática excessiva e a introdução prematura dos algoritmos traz inconvenientes para a aprendizagem das operações. Realçam a importância da contextualização dos números e das operações, numa primeira fase da aprendizagem, bem como o uso de referências para que, posteriormente, os alunos consigam manipular símbolos com compreensão e sentido.

Das quatro operações com números racionais, a multiplicação e a divisão são aquelas onde os alunos manifestam maiores dificuldades. A adição e subtração envolvem a compreensão dos significados de relação parte-todo e medida e de equivalência e, mais uma vez, o forte conhecimento que os alunos possuem dos números naturais leva-os a cometer erros que passam pela adição e subtração de numeradores e denominadores nas frações. Contudo, este erro pode igualmente estar associado à generalização de procedimentos de umas operações para outras. No caso dos decimais, estas operações, por vezes, são realizadas ignorando a vírgula. Embora as regras operatórias entre números naturais e numerais decimais sejam semelhantes, o valor posicional dos algarismos é de extrema importância. A multiplicação e divisão com números racionais estão associadas aos significados de quociente, operador e razão e oferecem aos alunos uma nova visão destas operações. Deixa de se verificar a ideia de que multiplicar aumenta a gradeza dos números e dividir diminui, nomeadamente quando envolve números inferiores a 1. Esta é uma mudança na aprendizagem das operações com números racionais, que acrescenta novas dificuldades aos alunos. Alguns dos erros associados a estas operações prendem-se com a dificuldade em perceber o seu efeito sobre os números, os significados associados à divisão e a necessidade de uma linguagem cada vez mais formal e simbólica.

Os erros que os alunos cometem no cálculo mental são essencialmente concetuais, originados por falta de compreensão concetual acerca dos números e suas operações e procedimental associados essencialmente a erros de cálculo ou falhas na aplicação de um dado procedimento. A generalização e a extrapolação de propriedades aritméticas assumidas como válidas, sem que contraexemplos sejam considerados, são a base dos erros dos alunos, bem como a desfocalização do objetivo central de uma dada resolução por interferência de determinados factos em passos ou resoluções intermédias. Uma das formas de ajudar os alunos a ultrapassar os erros cometidos no trabalho com números racionais é conhecer e compreender estes erros, pedir justificações aos alunos acerca das respostas que apresentam e discuti-los na sala de aula. Outra forma é proporcionar aos alunos uma aprendizagem com recurso a contextos do quotidiano e que os ajude a interpretar e a dar significado aos números racionais. Ao longo da aprendizagem, os alunos devem criar números de referência que lhes permitam comparar, estimar e operar. A conversão entre diferentes representações de um número racional ajuda os alunos a compreenderem a grandeza dos números envolvidos, facilitando a manipulação destes números com compreensão. A fração decimal é a que melhor se relaciona com as outras duas representações.

Os números racionais, pela sua própria essência, estão intimamente ligados à Álgebra. O caracter algébrico, principalmente das frações, é realçado na resolução de problemas principalmente quando, nas suas estratégias, os alunos usam o pensamento relacional. O pensamento relacional envolve o uso das propriedades fundamentais das operações e da igualdade (aspetos fundamentais da Álgebra) na resolução de problemas. A forma como as crianças pensam e relacionam os seus conhecimentos, de forma flexível, para produzirem as suas estratégias de cálculo mental é abordado no capítulo seguinte.

# Capítulo 3

# Cálculo mental

Neste capítulo analiso as estratégias de cálculo mental dos alunos com números naturais e racionais e os níveis em que é possível posicioná-los face ao tipo de estratégias que mobilizam quando calculam mentalmente com números racionais. Discuto semelhanças e diferenças entre estas estratégias bem como a importância das representações mentais dos alunos para o cálculo mental. Por fim, abordo aspetos gerais referentes à aprendizagem do cálculo mental, nomeadamente a forma como pode ser planificado para a sala de aula e o papel do professor.

## 3.1. Estratégias de cálculo mental

Calcular mentalmente envolve a mobilização de estratégias que permitam um cálculo rápido e eficiente. Estratégias de cálculo mental podem ser mobilizadas sem que sejam ensinadas intencionalmente (Thompson, 1999), onde cada individuo usa os conhecimentos que tem sobre números para operar com eles, ou podem ser ensinadas (Bourdenet, 2007) e ampliadas à medida que se vão explorando e descobrindo novas relações numéricas. Para promover o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental nos alunos, é fundamental perceber o significado de estratégia, por que etapas devem passar os alunos no seu desenvolvimento e algumas estratégias a que estes recorrem no cálculo com números naturais e números racionais e de que forma estas se relacionam.

### 3.1.1. Estratégias e etapas de cálculo mental

Threlfall (2002, 2009) denomina de estratégia a forma como um individuo resolve um determinado problema. Na sua perspetiva, uma estratégia não é decidida, mas emerge tendo em conta as condições do problema (contexto, números envolvidos, etc.). Considera que se usam estratégias quando os números são tratados de forma holística, como quantidades e não como dígitos. Defende ainda que estratégias mais significativas e que envolvem o conhecimento sobre os números provocam um maior impacto no desenvolvimento de aprendizagens matemáticas e na eficiência das crianças no cálculo.

Em cálculo mental, Thompson (1999) considera que uma estratégia não é mais do que uma aplicação rápida de conhecimentos ou de factos numéricos conhecidos, em combinação com propriedades específicas dos números para encontrar a solução de um cálculo cuja resposta não é conhecida. Considera ainda que estratégias de cálculo mental incorporam a ideia de que, ao ser dada às crianças uma coleção de números para trabalhar, estas vão selecionar a estratégia mais adequada para os números específicos envolvidos na tarefa. Neste sentido, o contexto parece também ser um fator importante na seleção de uma estratégia, tal como defende Threlfall (2002, 2009).

Do ponto de vista da aprendizagem de estratégias de cálculo mental, Buys (2001) considera que os alunos passam por três etapas básicas, em que o desenvolvimento do cálculo mental é acompanhado de uma crescente compreensão dos números e das operações: (i) *etapa da partição* em que os números são primeiramente vistos como objetos sobre uma linha de contagem e em que as operações são movimentos ao longo da linha: para a frente $(+)$, para trás $(-)$, ou repetidamente para a frente $(\times)$, ou repetidamente para trás $(\div)$. Por exemplo, para resolver $325-249$ o aluno vê o primeiro número como um número por inteiro mas o segundo é subtraído por partes (e.g., $325-200=125;\ 125-20=105;\ 105-20=85;\ 85\ -9=76$); (ii) *etapa de decomposição*, em que os números são, numa primeira fase, vistos como objetos com uma estrutura decimal e em que as operações são realizadas por decomposição de números baseados nesta estrutura. Para realizar a operação anterior, o aluno decompõe ambos os números tendo em conta a sua estrutura decimal e subtrai as diferentes partes dos números (e.g., $300-200=100;\ 100-49=51;\ 51+25=76$); e, por fim, (iii) a *etapa da variação* de estratégias onde o cálculo é baseado em propriedades aritméticas nos quais os números são vistos como objetos que podem ser estruturados de várias maneiras e em que as operações são efetuadas com recurso às propriedades apropriadas. Neste caso, o aluno estrutura os números de diferentes formas em que as propriedades das operações são usadas para subtrair os números ou para determinar a sua diferença (e.g., $325 - 200 = 125;\ 125 - 50 = 75;\ 75 + 1 = 76$). As etapas vão sendo mais complexas, quanto maior a compreensão que os alunos têm dos números e das operações e podem ser usadas em diferentes níveis. Num nível mais básico, usando como modelo a reta numérica vazia ou um contexto de dinheiro ou, num nível mais alto, usando passos intermédios na linguagem aritmética ou simplesmente mental.

### 3.1.2. Cálculo mental com números naturais

O conjunto dos números naturais é o primeiro conjunto numérico que as crianças aprendem, mantendo-se esta aprendizagem até ao final da vida escolar. É com estes números que se começam a desenvolver as primeiras estratégias de cálculo mental.

A partir de um estudo realizado com 350 crianças, no início da escolaridade básica às quais não tinham sido ensinadas explicitamente estratégias de cálculo mental, Thompson (1999), verificou que as crianças desenvolveram um conjunto de procedimentos próprios para adicionarem ou subtraírem números até 20. Estes procedimentos foram agrupados em duas categorias: estratégias que envolviam contagem e estratégias associadas a factos numéricos ou derivações destes factos numéricos. O autor identificou cinco tipos de estratégias de contagem: a contagem a partir do primeiro número; contagem a partir do número maior; contagem para trás; contagem até ao subtrativo e contagem a partir de. As estratégias em que usam factos numéricos ou outros decorrentes destes são consideradas mais sofisticadas e contemplam a utilização de dobros; quase dobro para a adição e para a subtração; subtração como operação inversa da adição; uso de 5 como referência; e estabelecimento de pontes através do 10 na adição e na subtração; e a compensação.

Relativamente à estratégia de *contagem a partir do primeiro número* (e.g., 3+4 começa a contagem no 3…4, 5, 6, 7, é 7) é considerada uma das primeiras estratégias das crianças após aprenderem a contar e que envolve a atribuição de um número a um objeto, em que cada vez que iniciam a contagem esta começa no “um”. Ao nível da contagem, é importante que a criança perceba que a sequência dos números pode e deve ser interrompida podendo a contagem começar em qualquer ponto dessa cadeia. A *contagem a partir do número maior* (e.g., 4+6 opera 6+4) surge como uma necessidade para fazer o cálculo de forma rápida. Isto implica comparar dois números a fim de decidir qual o maior e a utilização da propriedade comutativa. A *contagem para trás* (e.g., 8-5 inicia a contagem no 8 e conta para trás 5 números, ou seja 8… 7, 6, 5, 4, 3 é 3) é uma das estratégias mais usadas pelas crianças na subtração. Para além de dizer os números numa ordem decrescente tem ainda que mentalmente memorizar quantos passos andou para trás e perceber que a resposta corresponde ao último número referido na contagem. Um erro comum das crianças é considerarem o número em que iniciaram a contagem como fazendo parte do resultado. A *contagem até ao subtrativo* (e.g., 8-5 inicia a contagem decrescente no 8… 7, 6, 5 e a resposta é 3, o número de dedos levantados caso as mãos tenham servido de apoio à contagem, e não o último número referido como no caso anterior). Esta estratégia identificada por Thompson (1999) foi pouco usada pela maioria das crianças. A *contagem a partir de*, (e.g., 10-4 parte do 4, conta até a 10 e responde 6) apesar de também não ser uma estratégia usual nas crianças é importante conhecê-la pois é uma estratégia potente nas operações com números com dois dígitos. Deste estudo emerge também a ideia de que, crianças que revelem dificuldades na interpretação do sinal de menos como retirar, podem ter dificuldade em usar este tipo de estratégias.

No que se refere às estratégias em que as crianças usam factos numéricos ou outros decorrentes destes, o autor inclui nesta categoria o *uso de dobros na subtração* (e.g., $12 - 6$ a resposta é $6$, pois reconhece que $12$ é o dobro de $6$) em que a criança duplica o valor do subtrativo para deduzir qual a diferença ou então usa a operação inversa. Os *quase dobro na adição* (e.g., $6 + 7$ é $13$ porque se $6 + 6$ é $12$ então basta adicionar mais 1) ou os *quase dobros na subtração* (e.g., $8 - 5$ é $3$ porque $10$ menos $5$ é $5$, mas como $8$ é menos $3$ que $5$ o resultado é $3$) envolvem a utilização da duplicação de números, que muitas vezes já e um facto interiorizado e que pode ser útil em diversas situações. O reconhecimento da *operação subtração como a inversa da adição* (e.g., $10 - 4$ é $6$, pois $6 + 4$ é $10$) é uma ferramenta potente, pois ao saber factos sobre a adição pode relacioná-los com a subtração. A utilização de *5 como referência* (e.g., $8 + 6$ é $14$, de $8$ tira-se $5$, de $6$ tira-se $5$ e sobram $4$) consiste em retirar grupos de $5$ unidades para construir uma dezena e adicionar o que sobrou, ou seja, visualizam $8$ como $5+3$ e $6$ como $5+1$. Ao *estabelecer pontes através do* $10$, quer na adição quer na subtração (e.g., $13-5$ é $8$, ao $13$ retira-se $3$ para ficar $10$ o que significa que só falta retirar $2$ uma vez que $5$ é considerado como $3+2$) envolve a decomposição de números e reconhecer e operar com $10$, sendo este considerado um número especial e facilitador da operação. Por fim, a *estratégia de compensação* (e.g., $9+5$ é $14$, uma vez que $10+5$ é $15$) é considerada como bastante sofisticada para este nível, pois implica a adição de um valor superior ao apresentado e que no fim deve ser compensado através da subtração ou com o recurso a uma operação equivalente (e.g., $10+4$ em vez de $9+5$) o que envolve o cruzamento de outras estratégias como é o caso da utilização de $10$ como uma referência facilitadora do cálculo. É uma estratégia que deve ser explorada com cuidado nos primeiros anos e que é útil no trabalho com outros números no futuro.

Num outro estudo, efetuado em escolas chilenas do ensino público, Gálvez, Cosmelli, Cubillos, Leger, Mena, Tanter, Flores, Luci, Montoya e Soto-Andrade (2011) identificaram entre quatro e seis estratégias diferentes de cálculo mental usadas pelos alunos do 1.º ao 4.º ano, tendo estes manifestando dificuldades em verbalizarem a forma como pensaram. Para além da aplicação mental de algoritmos escritos, algumas das estratégias dos alunos demonstraram que estes possuem algum grau de familiaridade com os números e as suas propriedades, como é o caso do uso da propriedade comutativa em adições, da distributiva na multiplicação em relação à adição ou à subtração, ou da decomposição de números. Muitas destas propriedades não tinham sido ensinadas, o que segundo os autores, revela que a partilha de estratégias na sala de aula permite construir conhecimento, com sentido, acerca das propriedades das operações.

Na multiplicação e divisão utilizaram factos conhecidos, associados por exemplo, à multiplicação e divisão por 10, 100 e 1000. No entanto, foi possível verificar em alguns casos, um retrocesso na escolha de estratégias para a realização de determinados cálculos, optando os alunos por estratégias mais primitivas. Este retrocesso relacionou-se com as dificuldades dos alunos em perceberem a ordem de grandeza dos números envolvidos. Estas estratégias, que os autores consideram mais primitivas, estão ao nível das estratégias de contagem identificadas por Thompson (1999).

As estratégias identificadas por Gálvez et al. (2011) representam um avanço quando comparadas com as identificadas por Thompson (1999). Esta evolução poderá estar relacionada com o facto de se contemplar a multiplicação e a divisão e o uso de números maiores. Quanto mais complexos são os números e as operações envolvidas, maior a possibilidade dos alunos estabelecerem relações e criarem estratégias pessoais mais complexas. A partir das estratégias identificadas por Thompson (1999) e Gálvez et al. (2011), organizei um quadro síntese (Anexo A) onde apresento possíveis estratégias de cálculo mental dos alunos com números naturais.

### 3.1.3. Cálculo mental com números racionais

No conjunto dos números racionais, o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental pode ser uma mais-valia para a compreensão destes números, facilitando a sua utilização em contextos diversos. Wolman (2006) refere que o cálculo mental com frações e numerais decimais pode ser desenvolvido diariamente quando os alunos comparam frações e decimais, trabalham com frações equivalentes e realizam operações.

Caney e Watson (2003) estudaram as estratégias de cálculo mental com números racionais dos alunos do 3.º ao 10.º ano e realçam a importância de perceber a relação entre diferentes representações de um número racional para que se consiga desenvolver o cálculo mental com números racionais. Algumas das estratégias utilizadas pelos alunos passam por usar uma regra anteriormente memorizada ou colocar de forma sequencial uma combinação de estratégias, por exemplo transformar numerais decimais em frações para construir o todo. Estas autoras referem onze estratégias (Anexo B) usadas pelos alunos no estudo que efetuaram: *mudança de operação* - estratégia que consiste na transição entre operações inversas; *mudança de representação* - utilização das diferentes representações de um número racional (fração, decimal, percentagem) convertendo uma representação noutra (e.g., $12 \div 0{,}25$ é visto como $12 \div \frac{1}{4}$) ou de números naturais referentes a $\frac{10}{100}$ (e.g., na operação, $0{,}19 + 0{,}1$ considera $0{,}19$ como 19 e $0{,}1$ como 10); *utilização de equivalências* – mudança para uma representação equivalente (e.g., na operação $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ a fração $\frac{1}{2}$ é reconhecida como $\frac{2}{4}$.); *utilizações de factos conhecidos* - os alunos fazem correspondências com o que já sabem, usando referências que possuem (e.g., no cálculo de 10% de 45, usam o conhecimento que têm sobre 10% para retirar primeiro 10% de 40 e depois 10% de 50); *repetição da operação adição/multiplicação* – transformação da operação inicial em adições/multiplicações sucessivas ou utilização de dobros e metades (e.g., para calcular $4 \times \frac{3}{4}$ os alunos multiplicam a fracção duas vezes e novamente duas vezes ou no cálculo de $25\%$ de 80, calculam a metade de 80 e depois novamente a metade da metade anterior); *estabelecimentos de ligações* - os alunos estabelecem relações entre números que já conhecem ou entre o todo e as partes que o constituem (e.g., na operação $6{,}4 + 1{,}9$ consideram 1,9 como 2); *trabalho com partes de um segundo número* – esta estratégia baseia-se na decomposição de números por valor posicional ou por partes. (e.g., $10\%$ de 45 é calculado dividindo 40 por 10 e posteriormente 5 por 10 ou dividem os números em partes sendo que $0{,}5 + 0{,}75$ pode ser visto como $0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}25$); *trabalho da esquerda para a direita* - primeiro operam com a parte inteira e só depois com a parte decimal (e.g., $4{,}5 - 3{,}3$ calculam $4 - 3 = 1$ e depois $0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$) ou dividem o número por valor posicional apenas após a vírgula, trabalhado primeiro com as décimas e depois com as centésimas (e.g., $0{,}18 + 0{,}2 = 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}08$); *utilização de imagens mentais* - os alunos constroem mentalmente representações pictóricas, especialmente de frações, e operam adicionando ou retirando partes; *utilização de formas mentais de algoritmos escritos* – estratégia que consiste em operar visualizando mentalmente o algoritmo; e, por fim, *utilização de regras memorizadas* – os alunos utilizam regras de cálculo memorizadas anteriormente e aplicam rapidamente um procedimento de cálculo (e.g., calculam $1{,}2 \times 10$ usando o conhecimento que têm sobre a multiplicação por 10, 100 e 1000).

Destas estratégias, numa primeira fase, os alunos começam por usar formas mentais de algoritmos escritos e imagens pictóricas mentais, passando depois para estratégias em que fazem correspondência com conhecimentos que já possuem do trabalho com números naturais, como é o caso do trabalho da esquerda para a direita ou com partes de um segundo número, estabelecem ligações, recorrem a adições e a multiplicações sucessivas e utilizam factos conhecidos. Numa fase mais avançada as suas estratégias passam por envolver o sentido de número e de operação pois potenciam a utilização de representações equivalentes, o uso de diferentes representações de um número racional e transição entre operações inversas. Caney e Watson (2003) caracterizam as estratégias dos alunos de instrumentais, se estes aplicam factos e regras memorizadas, ou de concetuais, se usa uma combinação de estratégias que envolve o conhecimento dos números e das operações.

No cálculo de percentagens os alunos usam estratégias concetuais. Recorrem à repetição de operação com o cálculo de metades sucessivas, à conversão da representação percentagem para fracionária, à utilização de factos conhecidos, nomeadamente, o conhecimento que têm sobre o que significa $10\%$ de algo e à utilização de regras memorizadas, como é o caso da divisão por $10$, $100$ e $1000$. Algumas das estratégias que surgiram no estudo de Caney e Watson (2003) assemelham-se a estratégias de cálculo com números naturais, como por exemplo a divisão de números de acordo com o seu valor posicional. Esta estratégia demonstra um bom conhecimento do valor posicional dos algarismos e das operações envolvidas no cálculo de percentagens. Nas operações com frações, surgiram em níveis de escolaridade mais elevados, estratégias associadas a um trabalho muito instrumental envolvendo o uso de regras e procedimentos, enquanto alunos de níveis de escolaridade mais baixos, usaram estratégias mais concetuais mobilizando equivalências ou a mudança da representação fracionária para um número referente a 100 (e.g., $\frac{3}{4}$ é visto como $75$ em $100$). No cálculo com numerais decimais, o tipo de estratégia foi mais instrumental quando comparando com o tipo de estratégias usadas nas operações com percentagens e frações.

Caney e Watson (2003) apontam como possível explicação o facto dos numerais decimais terem uma aparência e relações de valor posicional semelhantes aos números naturais podendo assim incentivar os alunos a usarem os conhecimentos que detêm sobre números naturais de forma instrumental. Outra explicação pode estar relacionada com a falta de oportunidades que foram criadas para que os alunos pudessem estabelecer conexões entre a representação decimal e as outras representações. Uma das estratégias considerada instrumental tem a ver com o cálculo de $0{,}5 + 0{,}5$, em que um aluno respondeu que “$5 + 5$ é $10$, tirando o zero o resultado é 1”. Quando questionado acerca do desaparecimento do zero, o aluno não conseguiu explicar e limitou-se a dizer que foi assim que aprendeu em Matemática. As estratégias concetuais usadas pelos alunos, passaram muito pela mudança da representação de decimal para fração, pela construção do todo através da decomposição ou composição dos números. Apesar das autoras considerarem que o trabalho da esquerda para a direita com numerais decimais é uma estratégia concetual, muitos alunos demonstraram que ela é instrumental uma vez que operam com os numerais decimais como se fossem números naturais mas tendo por base os algoritmos convencionais. Em termos globais os alunos usaram mais estratégias concetuais no cálculo de percentagens e frações e mais instrumentais no cálculo com numerais decimais. Também surgiram estratégias mistas, que embora em menor número, refletiram a combinação entre conceitos e estratégias instrumentais.

De acordo com as indicações que constam do currículo de Matemática em França, para o trabalho com números racionais, Bourdenet (2007) enumera um conjunto estratégias que se podem incluir nas referidas anteriormente por Caney e Watson (2003). O autor considera que os alunos, quando calculam mentalmente com números racionais devem, por exemplo: (i) fazer uma extensão das aprendizagens adquiridas com números naturais para os numerais decimais; (ii) usar a propriedade associativa e distributiva; (iii) usar a relação entre operações inversas; (iv) trabalhar com numerais decimais e fazer a ligação com a representação fracionária (pois isso permite consolidar o trabalho com estes números e dar sentido à utilização dos numerais decimais); (v) completar frações, podendo escrever sete em quartos ou cinco em terços; ou ainda, (vi) transformar numerais decimais em frações, ou usar o produto de dois números naturais em vez de decimais e dividir por 100.

Callingham e Watson (2004) realizaram um outro estudo sobre as competências de cálculo de alunos dos mesmos anos de escolaridade do estudo realizado por Caney e Watson (2003), tendo estes respondido oralmente a itens que envolviam operações com frações, decimais e percentagens. As autoras identificaram seis níveis de cálculo mental (Anexo C) tendo em conta as três representações dos números racionais. Esta categorização por níveis permite não só estabelecer uma correspondência com o estudo anterior, mas também perceber em que nível de desenvolvimento se situam os alunos tendo em conta as suas estratégias de cálculo mental com números racionais. Assim, no nível mais básico, o *nível A*, o aluno reconhece o significado de $\frac{1}{2}$ na forma de fração, identifica $\frac{1}{2}$ com uma metade e calcula a metade de um número inteiro.

No *nível B*, usa frações unitárias com denominadores 2, 3 ou 4, opera com essas frações ou calcula $\frac{1}{2}$ de números pares com um dígito. Numerais decimais e percentagens aparecem relacionados com outras representações simples como a metade (50%) e o todo (100%). Neste nível, o aluno mostra compreender a relação parte-todo e utiliza a fração para representar, nas suas diferentes partes, números naturais simples.

No *nível C* surge o cálculo com números mais complexos e a adição e subtração de numerais decimais com uma casa decimal relacionadas com a adição e subtração de frações unitárias com o mesmo denominador. O conhecimento de números que adicionados dão 10 são transpostos para a adição de numerais decimais e o conceito de múltiplo surge associado a frações e percentagens. Neste nível o aluno manifesta compreender a noção do todo e das partes que o constituem e começa a desenvolver o conceito de equivalência.

No *nível D* mostra que compreende e usa o conceito de equivalência entre todas as representações dos números racionais, o conceito de múltiplo e de fator está bem desenvolvido e começa a ser usado na divisão de frações simples. Começa a emergir a compreensão de valor posicional nas operações com numerais decimais.

No *nível E* usa representações e números menos familiares em que conceitos aprendidos anteriormente parecem consolidados. Constrói estruturas de base tendo em conta as diferentes representações dos números, equivalências e o valor posicional para realizar cálculos mais complexos. Adiciona e subtrai numerais decimais com diferentes casas decimais, frações com denominadores diferentes e multiplica um número inteiro por uma fração não unitária quando o cancelamento é possível (por exemplo, $5 \times \frac{2}{5}$). Calcula 90% de um número de dois dígitos estabelecendo relações com 10%.

Por último, no *nível F* o aluno mostra ter uma boa compreensão da estrutura dos números e usa este conhecimento no cálculo com números menos familiares e operações mais complexas. Resolve operações envolvendo $\frac{1}{3}$ e outras frações não unitárias com denominadores diferentes, multiplica e divide numerais decimais quando os números envolvidos são múltiplos e trabalha com percentagens envolvendo frações menos comuns. Assim, do *nível A* ao *nível F* os alunos mostram uma crescente compreensão acerca da estrutura dos números racionais, das operações e da aplicação de conhecimentos adquiridos com números naturais, como é o caso do conhecimento que possuem sobre fatores, múltiplos e valor posicional.

Este estudo permitiu a Callingham e Watson (2004) verificarem que, de um modo geral, questões com frações são mais fáceis de usar do que com numerais decimais e percentagens e que a familiarização com frações, especialmente com $\frac{1}{2}$ é o primeiro requisito para a exploração de números racionais. As diferentes representações dos números racionais (decimal, fração, percentagem) surgem para fornecer aspetos adicionais de cálculo mental com decimais, apresentado por questões que aparecem a um nível mais elevado do que a fração equivalente. Em geral, a multiplicação e divisão é mais difícil para os alunos do que a adição e subtração, à semelhança do que acontece nas operações com números naturais e é mais fácil adicionar numerais decimais com uma casa decimal do que com duas.

### 3.1.4. Cálculo mental com números naturais e racionais: Semelhanças e diferenças

A análise das estratégias de cálculo mental identificadas, quer para os números naturais (Anexo A) quer para os números racionais (Anexo B) permite identificar semelhanças e diferenças. As diferenças que existem entre os tipos de estratégias apresentadas prendem-se com a simplicidade ou complexidade dos números envolvidos ou até, com o uso de terminologias diferentes para estratégias que se podem considerar iguais na sua essência tendo em conta os exemplos apresentados pelos autores. Em termos gerais, é possível identificar cinco estratégias básicas comuns: (i) utilização de formas mentais dos algoritmos escritos; (ii) utilização de factos conhecidos; (iii) mudança de operação; (iv) compensação; e (v) decomposição.

Associadas aos números naturais surgem estratégias de contagem. Estas estratégias são consideradas das mais básicas em cálculo mental, pelo que não surgem associadas ao cálculo mental com números racionais. Uma das razões pode ser o facto do conjunto dos números racionais ser mais denso e complexo do que o conjunto dos números naturais exigindo assim a mobilização de estratégias mais sofisticadas. Outra razão prende-se com a possibilidade destas estratégias já terem evoluiu para outras mais eficazes. O mesmo poderá acontecer com o uso de quase dobros uma vez que também não surge associado ao cálculo mental com números racionais. Nos números racionais surgem estratégias de mudança de representação induzida, em parte, pelo uso das três representações de um número racionais (decimal, fração, percentagem), a utilização de equivalências, que apesar de ser possível com números naturais, é mais forte nos números racionais pelas relações que se estabelecem entre os números e, a utilização de regras memorizadas. Também a utilização de imagens pictóricas mentais surgem como estratégia de cálculo mental para os números racionais, possivelmente associada à representação gráfica da relação parte-todo, que ocupa um espaço significativo no início da exploração da representação fracionária.

No entanto, Caney e Watson (2003) descrevem estratégias de cálculo mental para os números racionais que podem ser integradas na terminologia usada por Thompson (1999) e Gálvez et al. (2011). Assim, pela descrição que as primeiras autoras fazem do que entendem pela estratégia de repetição de operação adição/multiplicação e, pelo exemplo que apresentam, esta inclui-se em parte na mudança de operação referida pelos segundos autores, embora Caney e Watson (2003) tenham colocado em separado incluindo nela também o uso de dobros e metades. A estratégia estabelecer ligações e, pelo exemplo que apresentam, tem subjacente a estratégia de compensação. O trabalho com partes de um segundo número ou da esquerda para a direita envolve, na minha perspetiva, a decomposição de um ou mais números envolvidos na operação.

Existem duas estratégias de cálculo mental usadas com números naturais, que apesar de não serem contempladas nos números racionais por Caney e Watson (2003) me parece relevante incluir. É o caso do uso de números de referências que autores como Behr et al. (1986), Cruz e Spinillo (2004) e McIntosh et al. (1992) consideram fundamentais no trabalho com números racionais e o uso das propriedades das operações.

Assim, parece possível admitir que existem sete estratégias básicas de cálculo mental comuns aos números naturais e números racionais: (i) utilização de formas mentais dos algoritmos escritos; (ii) utilização de factos conhecidos; (iii) mudança de operação; (iv) compensação; (v) decomposição; (vi) utilização de números de referência; e (vii) propriedades das operações. A complexidade dos números racionais apenas vai possibilitar o aparecimento de um maior número de relações numéricas.

## 3.2. Memória e representações mentais no cálculo mental

No estudo realizado por Caney e Watson (2003), imagens mentais, quer pictóricas quer de algoritmos escritos, surgem como estratégias de cálculo mental dos alunos com números racionais. Assim, importa perceber qual a importância destas imagens e eventualmente de outras representações mentais construídas pelo individuo no cálculo mental. As seções seguintes discutem a importância da memória e sua relação com as representações mentais e o cálculo mental, tal como são apresentadas na Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1980, 1983/90).

### 3.2.1. Módulos neurológicos e o papel da memória no cálculo mental

Desde tenra idade que o nosso cérebro começa a reter conhecimentos sobre números. Segundo Dehaene (1997), este conhecimento é "armazenado" em diversos módulos neurológicos com funções específicas. Estes módulos são formas de organização interna de informação, que seriam inúteis se não houvesse algum tipo de processamento por parte do sujeito (Otero, 2001). Alguns destes módulos reconhecem dígitos, enquanto outros os traduzem internamente numa quantidade. Outros, ainda, recuperam factos aritméticos da memória ou estabelecem uma ligação entre módulos, permitindo-nos por exemplo, dizer o resultado de uma operação em voz alta. Segundo o autor, na aprendizagem da língua entram ainda em ação outros módulos especializados, principalmente os responsáveis pela manipulação simbólica dos números e a contagem verbal. Por exemplo, a aprendizagem das tabuadas recruta um novo módulo especializado para a rotina de uma memória verbal. Estes módulos funcionam automaticamente num domínio restrito sem um objetivo específico em vista e cada um recebe *inputs* de informação num determinado formato transformando-o noutro. A informação contida nos módulos neurológicos é fundamental para a construção de modelos mentais, imagens mentais, esquemas, representações, etc. Na perspetiva de Dehaene (1997), a capacidade de cálculo do cérebro humano reside na habilidade em conectar estes módulos elementares numa sequência de ação útil, assumindo por isso a memória de trabalho (*working memory*) um papel fundamental. A orquestração entre diversos módulos, sob a proteção da zona do córtex pré-frontal do cérebro, é responsável pela flexibilidade necessária à execução de novas estratégias aritméticas. Contudo, o autor considera que o ser humano quando nasce já possui um "circuito acumulativo" ("*accumulator circuit*", com aspas no original) que nos dota de alguma intuição acerca de quantidades numéricas.

A memória de trabalho é um sistema de memória temporário que depende de outros sistemas, entre os quais os que estão envolvidos na memória a longo termo (*long-term memory*) e que constitui um mecanismo de processamento e armazenamento de informação que desempenha um papel fundamental em tarefas cognitivas como o raciocínio, a aprendizagem e a compreensão (Baddeley, 1993; Logie, Gilhooly & Wynn, 1994). A memória de trabalho, apesar de ser importante para a aprendizagem em geral, assume uma importância decisiva na aprendizagem da Matemática uma vez que o raciocínio matemático é uma atividade cognitiva de nível elevado que faz uso de conhecimentos prévios e factos básicos armazenados na memória a longo prazo. Neste sentido, Dehaene (1997), considera que a memória de trabalho tem um papel central no cálculo mental, seja ele exato ou aproximado, não só pela sua capacidade de guardar determinados factos numéricos, mas também pelos modelos mentais (noção abordada na secção seguinte) que vão sendo criados com base em conhecimentos prévios e que apoiam os alunos no seu processo de raciocínio e construção de estratégias. Caviola, Mammarella, Cornoldi e Lucangeli (2012) acrescentam ainda que o papel da memória de trabalho no cálculo exato é mais exigente do que no cálculo aproximado uma vez que o primeiro envolve mais cálculos e uma maior exigência na manutenção de resultados intermédios.

Baddeley (1993) criou um modelo sobre a forma como funciona a memória de trabalho. Na sua perspetiva, a memória de trabalho é constituída por um sistema de controlo de atenção – o executivo central (*controlling attentional system – central executive*) e dois subsistemas, o de repetição articulada ou fonológica (*articulatory or phonological loop*) e o esboço visual-espacial ou bloco de notas (*visual-spacial scratchpad or sketchpad*). O executivo central supervisiona e coordena as interações entre os subsistemas e a memória a longo prazo. A repetição fonológica é responsável pela manipulação de informação verbal e acústica, estando intimamente relacionada com o sistema de produção da fala. O esboço visual-espacial é responsável pela criação e manipulação de imagens visuais. O reconhecimento por parte do autor das limitações deste modelo levou-o mais tarde a apresentar um quarto componente, o *buffer* episódico (*episodic buffer*). Este quarto componente é responsável pela integração e armazenamento temporário de informações provenientes da repetição fonológica, do esboço visual-espacial e da memória a longo prazo (Baddley, 2000).

Machado e Golbert (2009) assumem uma perspetiva semelhante à de Dehaene (1997) relativamente à importância da memória de trabalho no cálculo mental. Estes autores referem que, para calcular mentalmente uma expressão escrita, a memória de trabalho recorre ao esboço visual-espacial para representar mentalmente a expressão e à repetição fonológica para traduzir os símbolos escritos em números pronunciáveis. Os conhecimentos prévios que possuímos, entre eles factos numéricos básicos, são ativados de forma integrada através do *buffer* episódico, enquanto o executivo central coordena o processamento destas informações até serem verbalizadas.

Na perspetiva de Dehaene (1997) a escola é importante não apenas porque ensina técnicas aritméticas mas também porque ajuda os alunos a estabelecerem conexões entre os mecanismos de cálculo e o seu significado, defendendo que se deve ajudá-los a criar um reportório rico de "modelos mentais" (entre aspas no original) para a Aritmética uma vez que a nossa memória tem dificuldade em reter factos numéricos, porque ao contrário dos computadores, ela é associativa. A memória estabelece múltiplas conexões entre diferentes dados “armazenados”. Estas conexões permitem reconstruir uma memória global com base em informação fragmentada contida nos módulos neurológicos. Nós invocamos este processo de reconstrução, consciente ou inconscientemente, sempre que tentamos recuperar um facto passado. Esta memória associativa é poderosa mas ao mesmo tempo frágil. É poderosa porque nos permite fazer analogias e ampliar conhecimentos adquiridos a novas situações. É frágil porque em determinados domínios as várias peças do conhecimento são mantidas de forma fragmentada, não se estabelecendo as conexões necessárias à criação de conhecimento. O autor refere ainda que, quando confrontado com a dificuldade em memorizar tabuadas, o nosso cérebro usa todos os artifícios disponíveis. Quando a memória falha, usa estratégias mais primitivas. O indivíduo pode assim voltar a estratégias de contagem, adições ou subtrações em série tendo por base referências conhecidas. Acrescenta ainda que a dificuldade em memorizar determinados factos numéricos, aliada à dificuldade em estabelecer relações entre os diversos módulos pode ser a explicação para alguns dos erros cometidos pelos alunos no cálculo mental. Refere ainda que a memorização e registo no cérebro de um conjunto de procedimentos a executar sem compreensão pode também originar erros por parte dos alunos, principalmente na realização de algoritmos formais. Como tal, realça a importância dos alunos compreenderem os algoritmos e o seu propósito. Estes erros e dificuldades podem estar relacionados com as limitações da memória de trabalho. Se, por um lado, esta memória tem um papel centrar no cálculo mental, por outro, as suas limitações podem colocar frequentemente restrições à realização de tarefas de raciocínio e compreensão sendo por vezes a causa de dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos (Caviola et al., 2012; Logie et al., 1994).

Ainda sobre a memorização de factos numéricos, Dehaene (1997) refere que a nossa memória tem dificuldade em manter em compartimentos factos de adição e multiplicação. Com frequência respondemos automaticamente a um problema de adição com um facto de multiplicação correspondente (2+3=6), mas o contrário raramente acontece (3×3=6). Também levamos mais tempo a apercebermo-nos de que 2×3=5 está incorreto do que 2×3=7, porque a adição de 2 e 3 corresponde a 5. A justificação reside no facto que quando começamos a aprender a multiplicação, o tempo que demoramos a resolver uma adição aumenta temporariamente enquanto a primeira memória dorme e surgem respostas do tipo 2+3=6. Assim, a integração de factos sobre multiplicação na memória a longo prazo parece ser difícil para os alunos porque factos aritméticos simples, que envolvem pequenas operações, são muitas vezes aprendidos antes dos que envolvem operações mais complexas.

### 3.2.2. Representações mentais

Representações mentais são representações internas que fazem parte das estruturas cognitivas de um individuo (Cruz, 2002). É através destas representações que damos sentido aos fenómenos e explicamos conceitos e ideias matemáticas. Na perspetiva de Cruz (2002) as representações internas (mentais) e as representações externas (usadas para comunicar ideias) estão diretamente relacionadas em Matemática, uma vez que nos movemos entre ambas para podermos explicar a forma como pensamos, embora por vezes inconscientemente. Como indica a autora, pelo facto das representações mentais ocorrerem na mente de cada individuo e não serem diretamente observáveis, tudo o que podemos dizer sobre elas é baseado em inferências.

A Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1980,1983/90) pretende explicar processos de conhecimento complexos e, em particular, processos de compreensão e inferência. Segundo esta teoria existem três tipos de representações mentais: modelos mentais, representações proposicionais e imagens mentais que são fundamentais na construção destes processos de pensamento. A diferença entre estas representações mentais reside na sua especificidade e função embora os modelos mentais sejam a base para a criação de imagens e de representações proposicionais. Se estes modelos mentais representam o mundo real com alguma especificidade, são considerados imagens, se fazem inferências acerca do mundo real representado por modelos mentais são representações proposicionais. Os termos usados em Psicologia Cognitiva para designar estes "entes mentais" estruturantes do conhecimento varia de teoria para teoria.

De acordo com a Teoria dos Modelos Mentais (Johnson-Laird, 1990), os modelos mentais são análogos estruturais do mundo real e as imagens são relações percetivas dos modelos a partir de um ponto de vista particular. O conceito de modelo mental, apesar de sujeito a diversas interpretações, parece ser aceite e entendido como fruto de representações pessoais e privadas de um individuo (Medeiros, 2001). Schnotz, Baadte, Müller e Rasch (2010), consideram que modelos mentais, enquanto representações mentais, são criados a partir de conhecimentos prévios e da compreensão de representações externas, que estão na base da compreensão e construção do conhecimento. É com base nesses conhecimentos que o modelo possui informação sobre atributos e relações que não estão incluídas na imagem ou diagrama que se visualiza. O modelo mental possui informação para além do que vemos. Por exemplo, a compreensão de um texto ou imagem não depende apenas de fontes externas (do que realmente observamos) mas também de conhecimentos prévios que estão na nossa memória a longo termo, enquanto fontes de informação internas.

A propósito da construção de modelos mentais, Dehaene (1997) salienta dois aspetos: a importância de, na resolução de problemas, se compreender o problema para que se possa formar um modelo mental da situação e não ser traído pelo acionar involuntário de determinados automatismos mentais e da intuição concreta como ponto de partida para aprendizagens mais formais com compreensão. No que se refere à intuição, o autor dá como exemplo a adição das frações $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Na sua perspetiva, uma criança que tem uma imagem intuitiva das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ como sendo porções de uma tarte, pode perceber facilmente que o resultado é inferior a 1 uma vez que $\frac{1}{3}$ é inferior a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ dá a unidade. Se lhe faltar essa intuição, pode imaginar o processo formal de cortar a tarte em 6 partes iguais (reduzir ao mesmo denominador) antes de as reagrupar para assim calcular o resultado exato. Pelo seu lado, uma criança que não tem sequer um significado intuitivo de fração e que vê uma fração como sendo dois dígitos separados por uma barra horizontal (modelo abstrato), facilmente cai no típico erro de adicionar numeradores e denominadores. Como tal, o autor sugere que no ensino e aprendizagem das frações se deve incentivar a criança a usar a sua intuição de quantidade para compreender e construir um reportório de modelos mentais que a ajude a distinguir situações como as apresentadas anteriormente.

Na teoria de Johnson-Laird (1990) os modelos e as proposições são usados no processo de inferência. Os modelos mentais fornecem uma base para a representação de premissas e a sua manipulação torna possível raciocinar sem lógica. A busca de interpretações alternativas exige a representação independente das premissas, uma representação que é proposicional na sua forma. Os modelos mentais desempenham um papel central e unificador na representação de objetos, afirmações, assuntos, sequências de eventos, a maneira como o mundo é, e as ações sociais e psicológicas do dia-a-dia. Os modelos mentais permitem ao individuo fazer inferências e previsões para compreender fenómenos, para decidir como agir e controlar a execução e, acima de tudo, para experienciar eventos através de representações. Permitem igualmente usar a linguagem para criar representações que comparem conhecimentos decorrentes do mundo e relacionam palavras com o mundo por meio de conceções e perceções. O autor refere ainda que a compreensão dos fenómenos se faz com recurso a modelos de trabalho ("*working model*" – entre aspas no original) que possuímos desses fenómenos na nossa mente. Se compreendemos um determinado fenómeno é porque temos uma representação mental que serve como modelo a essa entidade, assim como a função de um relógio serve como modelo para a compreensão da rotação da terra.

A representação proposicional, enquanto representação mental, refere-se à linguagem mental de uma proposição que é usada para fazer inferências. Estas proposições podem ser verdadeiras ou falsas e representam afirmações que não se parecem diretamente com o objeto que representam (não são estruturas análogas), mas são fundamentais para estabelecer relações. Uma representação proposicional é o resultado da compreensão e/ou tradução imediata do discurso para linguagem mental. Uma compreensão mais profunda leva à construção de um modelo mental, que é baseado numa representação proposicional, mas que pode contar com conhecimentos gerais e outras representações relevantes a fim de ir além do que é explicitamente afirmado. Os processos mentais subjacentes a uma representação proposicional são semelhantes aos subjacentes à perceção de um objeto ou figura. O mesmo elemento ou parte de um objeto pode ser referido através das diferentes proposições que constituem a descrição do objeto. Uma representação proposicional deve ser capaz de lidar de igual forma com relações espaciais determinadas e indeterminadas (uma vez que a linguagem pode ser vaga), enquanto um modelo mental deve lidar mais com relações determinadas. Os modelos são mais fáceis de relembrar, talvez por serem mais estruturados e elaborados (relações espaciais determinadas). Mas os modelos praticamente não codificam a forma linguística das afirmações a partir das quais foram criados, levando o sujeito a confundir o original com descrições deduzidas. As representações proposicionais são mais difíceis de relembrar e codificam a forma linguística das afirmações. Os modelos mentais e a representações proposicionais diferem essencialmente na sua função. Enquanto as representações proposicionais são afirmações verdadeiras ou falsas tendo em conta os modelos mentais que o ser humano possui do mundo real (uma vez que o mundo não é percecionado de forma direta), um modelo mental representa um estado de coisas e, consequentemente, a sua estrutura não é arbitrária como a de uma representação proposicional, mas representa diretamente o mundo.

As imagens mentais são classes especiais de modelos, representam objetos e correspondem a uma visão dos modelos, como resultado da perceção ou imaginação, representando as características percetíveis dos objetos do mundo real. Para Presmeg (1992), uma imagem mental é a construção mental de um objeto que descreve informação visual e espacial. Os processos mentais subjacentes à experiência de uma imagem são semelhantes aos subjacentes à perceção de um objeto ou figura. Uma imagem pode sofrer transformações mentais, tais como rotações ou expansões, que correspondem à transformação física do objeto real que representam. Modelos como imagens são altamente específicos. Por exemplo, não é possível formarmos uma imagem geral de um triângulo sem que esta esteja associada a um triângulo específico (equilátero, escaleno, ou isósceles).

Cruz (2002), baseando-se no trabalho de Presmeg (1986, 1992), considera que a atividade matemática envolve diversos tipos de imagens, nomeadamente imagens concretas, de padrão, de memória de fórmulas, cinestésicas e dinâmicas. A autora define imagens concretas como "*picture-in-the-mind*" (aspas no original), ou seja, uma imagem fotográfica sem movimento mas com muito detalhe. Imagens padrão representam relações descritas através de um esquema visual-espacial, sem no entanto apresentarem detalhes acerca do objeto que representam. A visualização mental dos movimentos das peças num jogo de xadrez são imagens padrão. As imagens de fórmulas são usadas pelos alunos sempre que estes desejam "ver" (entre aspas no original) uma determinada fórmula na sua mente, imaginando-a escrita no seu caderno ou no quadro. Este tipo de imagem, que pode ser bastante precisa e detalhada, constitui uma forma de recordar informação e são um poderoso meio de representar informação abstrata, embora em alguns casos não reflita a compreensão matemática dos alunos (nem contribua para essa compreensão). As imagens cinestésicas envolvem atividade muscular onde os alunos acompanham com gestos a exteriorização das suas representações internas (e.g., indicar com o dedo a desenho de um círculo dividido em duas partes congruentes). Por fim, as imagens dinâmicas envolvem a capacidade de mover e transformar, mentalmente, imagens concretas (e.g., transformar um retângulo que roda sobre um eixo dando origem a um cilindro de revolução). Cruz (2002) acrescenta ainda que uma aprendizagem significativa está fortemente associada à utilização de imagens mentais onde a visualização assume um papel importante. Se a Matemática escolar se basear unicamente na aprendizagem de regras e procedimentos, isto não permite aos alunos a criação de modelos mentais e de destreza na capacidade de encarar a Matemática de forma relacional e, tal como defende Dehaene (1997), pode inclusivamente ser a causa de alguns dos erros cometidos pelos alunos.

No que se refere à visualização, Duval (1999) acrescenta que esta, em conjunto com as representações são aspetos centrais da compreensão matemática. O autor faz uma distinção entre visão e visualização e acrescenta que a visualização não deve ser reduzida à visão uma vez que "a visualização torna visível tudo o que não é acessível à visão" (p. 13). A visão refere-se à perceção visual e proporciona um acesso direto ao objeto, enquanto a visualização se baseia na produção de uma representação semiótica que não mostra os objetos como eles são, mas sim as relações entre unidades de representação. A perceção visual refere-se ao tratamento de informação, ao nível cerebral, dos dados que recolhemos através dos olhos e relaciona-se com fenómenos como a formação de conceitos e de significados (Dias, 2008). A visualização refere-se a uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica, ou seja, nem mental nem física (Duval, 1999). Duval (1999) acrescenta que os termos "imagem mental" ou "representação mental" são ambíguos uma vez que podem ser considerados tanto como uma extensão da perceção visual, como uma mera visualização que origina uma representação mental semiótica, como o que acontece no cálculo mental. Para o autor, o cálculo mental envolve a transição entre dois tipos de imagens mentais: as quase-percetivas (*quasi-percepts*) que não são mais do que uma extensão da perceção visual e a interiorização da visualização semiótica (*internalized semiotic visualizations*).

Ainda no que se refere a representações mentais, Schnotz e Bannert (2003) e Schnotz et al. (2010), consideram que estas podem ser consideradas sinais uma vez que a exteriorização de um sinal é realizada tendo por base o conhecimento que o indivíduo tem sobre esse sinal. Este conhecimento não é mais do que a representação mental que o indivíduo possui do conteúdo (o referente do sinal). Acrescentam que a compreensão de sinais é um processo que cria representações mentais (estruturas do conhecimento) com base em sinais externos. Esta complementaridade entre representações internas e externas vai ao encontro da perspetiva de Cruz (2002) e, segundo Schnotz et al. (2010), permite-nos construir significados.

Schnotz et al. (2010) dividem estas representações em dois tipos, associando a ícones representações descritivas (*description*) e a símbolos representações representativas (*depiction*). As representações descritivas são símbolos, ou seja, sinais que não têm qualquer semelhança com o seu referente, mas que permitem perceber relações. A linguagem natural, falada ou escrita, expressões matemáticas ou fórmulas são representações descritivas. Os autores relacionam-nas com representações proposicionais. As representações representativas são ícones, ou seja, sinais tais como fotografias, desenhos, pinturas, mapas ou linhas de um gráfico associados ao seu referente por semelhança ou analogia e relacionam-nas com modelos mentais e imagens. Na sua perspetiva, ambas as representações servem propósitos distintos. Enquanto as representações descritivas são mais gerais, abstratas e poderosas a expressar o conhecimento abstrato, as representativas são mais concretas e específicas, mais seletivas, sendo fundamentais para fazer inferências e caracterizar objetos. Isto acontece porque, quando desenhamos um objeto não desenhamos apenas a sua forma, mas também as suas dimensões e orientação. Deste modo, as representações descritivas e representativas complementam-se. Por vezes, uma representação representativa (modelos e imagens) permite a criação de uma representação descritiva (representação proposicional) simples facilitando acesso rápido a um processo simbólico. Os modelos mentais são representações representativas porque são assumidas como *quase*-objetos internos hipotéticos que sustentam uma analogia funcional ou estrutural do objeto que representa com base nessa analogia. O uso destas duas representações é fundamental para o ensino da Matemática, pois são essenciais para atingir altos níveis de abstração e importantes para o pensamento criativo, a compreensão, para raciocinar, argumentar e resolver problemas (Schnotz et al., 2010; Otero, 2001). Para Schnotz e Bannert (2003) a construção de modelos mentais implica a transição entre representações descritivas e representativas. Representações proposicionais e modelos mentais interagem continuamente através de processos de construção de modelos e modelos de inspeção guiada por esquemas cognitivos.

## 3.3.Ensinar a calcular mentalmente

Para ensinar crianças a calcular mentalmente é preciso saber fazê-lo de forma coerente e estruturada (Brocardo & Serrazina, 2008). Desenvolver capacidades de cálculo mental não é tarefa fácil e requer intenção, método, persistência e deve iniciar-se logo nos primeiros de escolaridade. Para ensinar a calcular mentalmente é preciso estar atento a aspetos da aprendizagem do cálculo mental, perceber como pode este trabalho ser planificado e incluído na aula de Matemática e qual o papel do professor no seu processo de desenvolvimento.

### 3.3.1. Aprendizagem do cálculo mental

Para Brocardo (2011) o desenvolvimento do cálculo mental é um processo sistemático com maior ênfase no 1.º e 2.º ciclos, mas que deve ser continuado nos ciclos de ensino seguintes. Taton (1969) e McIntosh (2004) defendem que a aprendizagem do cálculo mental pode iniciar-se logo que a criança tenha contacto com números e operações de forma informal. Para Taton (1969), a primeira abordagem ao cálculo mental deve aparecer no momento em que a prática metódica das operações concretas leva a criança a conceber a possibilidade de resumir, com a ajuda de números abstratos, os resultados obtidos a partir de objetos de natureza diferente. Na sua perspetiva, as primeiras aulas de cálculo mental devem ser exercícios concretos que levem a criança a compreender a noção de número concreto e depois a de número abstrato. Acrescenta ainda que o cálculo mental é um complemento ao cálculo escrito e deve ser ensinado metodicamente e com regularidade, com lições frequentes mas breves, para que as aptidões de cálculo se mantenham.

A complementaridade entre cálculo mental e escrito é realçada também por McIntosh (2004). Este autor, no seu projeto *Developing computation*, envolveu professores e alunos dos 2.º, 3.º e 4.º anos de nove escolas do ensino público e privado na Austrália com o objetivo de observar processos informais de cálculo escrito de crianças que possuíam estratégias de cálculo mental desenvolvidas e, para isso, o estudo centrou-se primeiro no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental. Neste estudo, o processo de transição do cálculo mental para o cálculo escrito informal passou por seis patamares: (i) reforçar o cálculo mental com números de dois dígitos; (ii) incentivar as crianças a explicar as suas estratégias usando papel e lápis; (iii) comparar, discutir e aperfeiçoar as suas explicações por escrito; (iv) fortalecer as estratégias usadas, através de cálculos adicionais semelhantes; (v) alargar a utilização dessas estratégias a cálculos cada vez mais difíceis; e, por fim, (vi) consolidar estratégias.

Na perspetiva de McIntosh (2004), o projeto produziu resultados significativos, tendo os professores reconhecido potencialidades ao cálculo mental como um apoio ao cálculo escrito. Os professores envolvidos no projeto consideraram que a ênfase dada ao cálculo mental permitiu às crianças o desenvolvimento de capacidades de cálculo, maior confiança no trabalho com números e a compreensão do valor posicional dos algarismos. Consideraram também que é no jardim-de-infância que se deve iniciar todo este processo para a maioria das crianças, e que a inclusão dos algoritmos formais deve iniciar-se a partir do 4.º ano e não do 1.º ano, como antes consideravam, reconhecendo que a compreensão dos números e das operações adquirida através do cálculo mental fornece uma base mais sólida para a introdução dos algoritmos. Os professores do projeto consideraram ainda que é positivo trabalhar o cálculo mental antes de transitarem para o cálculo escrito formal não só para os alunos, como também para eles. Por um lado, o trabalho com cálculo mental permite às crianças criarem diferentes formas de trabalhar com números maiores e consciencializarem-se das estratégias mentais que usam através do registo escrito. Por outro lado, apoia o trabalho do professor, uma vez que, através dos registos dos alunos, este pode perceber as estratégias que usam e trabalhar, na sala de aula, as dificuldades e erros que manifestam.

Aprender a calcular mentalmente permite à criança desenvolver um conjunto de procedimentos pessoais, em que cada estratégia é pensada e utilizada tendo em conta os números com que está a trabalhar e os conhecimentos que cada uma possui (Wolman, 2006). Para Threlfall (2002) o facto de a criança conseguir desenvolver estratégias pessoais significa que possui um cálculo mental flexível. Para este autor, desenvolver um cálculo mental flexível não passa por ensinar um conjunto de estratégias, procedimentos ou modelos para imitar, embora considere que tem a sua cota parte de importância, mas sim por trabalhar com os números e sobre eles, descobrindo como podem ser decompostos, compostos ou arredondados. Na perspetiva do autor, o cálculo mental flexível realça os conhecimentos pessoais das crianças sobre os números, fazendo emergir o caminho para a solução do problema. No entanto, salienta a dificuldade de desenvolver um cálculo mental flexível apresentando duas razões. Uma prende-se com o facto dos professores, por vezes, se limitarem a explorar estratégias mais simples em prol de outras mais complexas só porque são mais difíceis de demonstrar e, ao restringir o número de estratégias que podem trabalhar com os alunos, estão a limitar a flexibilidade dos alunos ao nível do cálculo. Outra razão tem a ver com o facto de não se poder ensinar uma criança a escolher boas estratégias em função de um tarefa, uma vez que essa escolha é pessoal e uma estratégia com mais sentido para uma criança pode não o ser para outra. Threlfall (2002) considera que o cálculo mental flexível é uma reação pessoal com conhecimento, em função das características da tarefa. Apesar destas dificuldades, considera que o cálculo mental flexível deve ser valorizado não tanto por permitir que a criança seja eficiente nos cálculos, mas porque quando é usado é uma evidência de que algo mais do que a aquisição de conhecimentos factuais e processuais da Matemática está a acontecer.

Relativamente ao desempenho dos alunos no cálculo mental, estudos realizados por Gálvez et al. (2011) e por Guimarães e Freitas (2010) revelam que não são os alunos com melhor desempenho a Matemática os que manifestam melhor desempenho ao nível do cálculo mental. Guimarães e Freitas (2010) justificam este facto referindo que as dinâmicas de trabalho com cálculo mental são diferentes das dinâmicas usadas nas avaliações, por parte das escolas, e para as quais os alunos estudam exaustivamente na tentativa de memorizar procedimentos que depois aplicam. Também consideram que o cálculo mental exige domínio das propriedades dos números e das operações em vez do domínio de técnicas de cálculo algorítmico. Por norma estes alunos manifestam insegurança e dificuldades em verbalizar a forma como pensaram. Assim, o desenvolvimento do cálculo mental deve acompanhar a aprendizagem dos números e das operações, sendo fundamental um trabalho sistemático para que os alunos possam ampliar, criar e relacionar estratégias à medida que vão trabalhando com diferentes conjuntos numéricos.

### 3.3.2. Planificar o ensino do cálculo mental para a sala de aula

Na perspetiva de Taton (1969) o ensino do cálculo mental sem método é de fraca utilidade. Este deve ser regular e frequente para que as capacidades de cálculo dos alunos possam ser melhoradas e não esquecidas. Para o autor, a explicação e prática não devem durar mais de 10 minutos numa aula, pois obriga a uma atenção sustentada e prolongada, podendo causar fadiga. Salienta ainda alguns aspetos importantes do cálculo mental que devem ser tidos em conta na sua preparação e planificação, nomeadamente: (i) a extensão das operações que se podem calcular mentalmente depende em grande parte do número de algarismos que cada um poderá reter, quer numa só vez, quer em várias etapas relacionadas; (ii) a memória é fundamental no cálculo mental, quer facilitando algumas operações pelo conhecimento de algarismos-chave, quer permitindo reter dados e diversos resultados parciais, de diferentes tentativas realizadas; e (iii) a habilidade de calcular mentalmente não depende somente da memória de cada indivíduo, mas também do modo como sabe escolher e utilizar a técnica operatória mais apropriada ao problema que está a resolver. Como objetivo primordial, o autor considera que o cálculo mental visa melhorar a prática das quatro operações aritméticas, habituando a operar com números cada vez maiores com rapidez e segurança.

Defendendo uma prática regular do ensino de estratégias de cálculo mental, Bourdenet (2007) refere que esta deve ser no início da aula. Um trabalho regular permite que os alunos se familiarizem com números e operações, adquiram boas competências de cálculo mental, racionalizem o uso da calculadora, adquiram sentido crítico face ao resultado da calculadora e sejam flexíveis na mudança de registo dos números. O aluno é levado a julgar de modo crítico os resultados obtidos por escrito e, o cálculo mental permitir-lhe-á muitas vezes, senão controlar os resultados pelo menos verificar a sua ordem de grandeza (Taton, 1969). Neste sentido, Fosnot e Dolk (2001) sublinham a importância destes momentos de cálculo mental na aula e sugerem as *minilessons.* As *minilessons* consistem num conjunto de quatro ou cinco exercícios de cálculo onde é possível estabelecer relações entre eles e cujo objetivo principal é desenvolver estratégias de cálculo mental onde os alunos resolvem e partilham as suas estratégias durante cerca de 10 a 15 minutos em cada aula. Cada conjunto de exercícios é pensado com o objetivo específico de desenvolver determinadas estratégias de cálculo mental com grau de dificuldade crescente (Bourdenet, 2007; Fosnot & Dolk, 2001; Taton, 1969).

Brocardo (2011), em consonância com as ideias de Bourdenet (2007), Buys (2001), Fosnot e Dolk (2001) e Taton (1969), considera que o desenvolvimento do cálculo mental deve ser sistemático e intencional e que nos 1.º e 2.º ciclos a aula de Matemática pode começar com uma "cadeia numérica, um concurso de resposta rápida a questões numéricas colocadas pelo professor ou outro qualquer tipo de tarefa" (p. 8), que se centre no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental. No entanto, a autora salienta a importância dos contextos, numa fase inicial, do ensino e aprendizagem do cálculo mental.

A importância dos contextos é referida por diversos autores (e.g., Behr et al., 1986; Galen et al., 2008; McIntosh et al., 1992; Monteiro & Pinto, 2005), principalmente na aprendizagem dos números racionais e das suas operações, dada a complexidade destes números e os diferentes significados que possuem. Na perspetiva de Brocardo (2011) os contextos permitem aos alunos dar sentido aos números e relacionarem as suas diferentes representações. Por exemplo, no caso dos números racionais refere que, para os alunos, "$\frac{1}{60}$ tem sentido pois é visto como sendo 1 minuto em 60 minutos; $0,33$ pode ser pensado como $\frac{1}{3}$ por associação com a capacidade de algumas garrafas de água; $0,125$ como metade de $0,250$ por associação com o peso das embalagens de manteiga" (p. 7). Acrescenta ainda que os contextos apoiam a memorização de um conjunto de factos numéricos que podem servir de base ao desenvolvimento do cálculo mental. Por exemplo, "$\frac{1}{4} \times 60$ é 15 por associação com o relógio; $2 \times 24$ é igual a 48 por associação ao número de horas que têm 2 dias; $1000 \div 10$ é igual a 100 por associação com as notas de 10 euros que preciso ter para obter 1000 euros" (p. 7). Situações que envolvam dinheiro, tempo, massa e distância permitem aos alunos dar sentido aos números e leva-os a interpretar os números de forma adequada (ME, 2007) em função do contexto onde se inserem.

Apesar de defender a importância dos contextos no trabalho com cálculo mental, Brocardo (2011) considera que, à medida que o cálculo mental vai sendo desenvolvido, estes vão perdendo importância uma vez que os números e as operações passam a ter sentido quando manipulados simbolicamente. Assim, considera que o desenvolvimento do cálculo mental é um processo que passa por: (i) dar relevo aos contextos, ancorando neles o sentido de número, das operações e suas propriedades; (ii) dar importância aos procedimentos e à sua articulação com os contextos; e (iii) evoluir na articulação entre contextos e procedimentos, favorecendo progressivamente o uso de procedimentos mais sofisticados.

Os momentos de cálculo mental na sala de aula precisam de ser planificados e, preferencialmente integrados no percurso de aprendizagem dos alunos ao longo dos vários temas matemáticos. Para planificar, o professor deve não só ter conhecimento do tipo de estratégias de cálculo mental dos alunos, como também dos erros que estes cometem no cálculo e estar preparado para fomentar a discussão de estratégias na sala de aula. Num estudo realizado por Heirdsfield (2011) é possível perceber, de um modo geral, que aspetos podem ser favoráveis à preparação e condução de aulas com cálculo mental. A autora realizou uma experiência de ensino com dois professores, cujo objetivo era desenvolver na sala de aula estratégias de cálculo mental em alunos de 6, 7 e 8 anos. Este trabalho de investigação centrou-se no em três aspetos: (i) o estudo de estratégias de cálculo mental desenvolvidas pelos alunos; (ii) em modelos que suportam o desenvolvimento de um cálculo mental eficiente, nomeadamente a reta numérica vazia e uma grelha com 99 e outra com 100 números; e (iii) na elaboração de um mapa concetual que apoiasse o ensino do cálculo mental. Heirdsfield (2011) trabalhou em parceria com os dois professores, fornecendo-lhes literatura sobre cálculo mental e discutindo terminologias que lhes permitissem identificar as estratégias dos alunos. Envolveu-os nas entrevistas a alunos e apoiou-os na planificação de aulas que fossem ao encontro dos objetivos pretendidos e tendo por base os conhecimentos partilhados entre investigadora e professores participantes. O estudo centra-se na aprendizagem dos alunos, mas foi possível verificar desenvolvimento profissional dos professores, que se manifestou através da mudança de práticas letivas. O mapa concetual que desenvolveu para apoiar a experiência de ensino e que partilhou com os professores (Figura 2) foi considerado útil por estes para a planificação das aulas de cálculo mental. Este mapa fê-los perceber que o cálculo mental exige que os alunos compreendam conceitos, que os associem e que percebam que estes se relacionam entre si. Este mapa apresenta quatro conceitos fundamentais que estão na base do cálculo mental: numeração; efeito das operações sobre os números; estimação e factos numéricos. Apresenta ainda alguns exemplos que ajudam a clarificar alguns desses conceitos.

Na perspetiva de Heirdsfield (2011), para que possam desenvolver estratégias de cálculo mental, os alunos precisam de conhecer a numeração e compreender a grandeza e valor dos números, o efeito das operações sobre os números, ter capacidade para fazer estimativas para verificar a razoabilidade do resultado e, conhecer um conjunto de factos numéricos que lhes permita calcular rapidamente e com precisão. No início da experiência de ensino que realizou, foi possível verificar que, enquanto alguns alunos já tinham desenvolvido estratégias de cálculo mental, outros ainda continuavam a contar de um em um, enquanto outros, nem conseguiam resolver um problema.

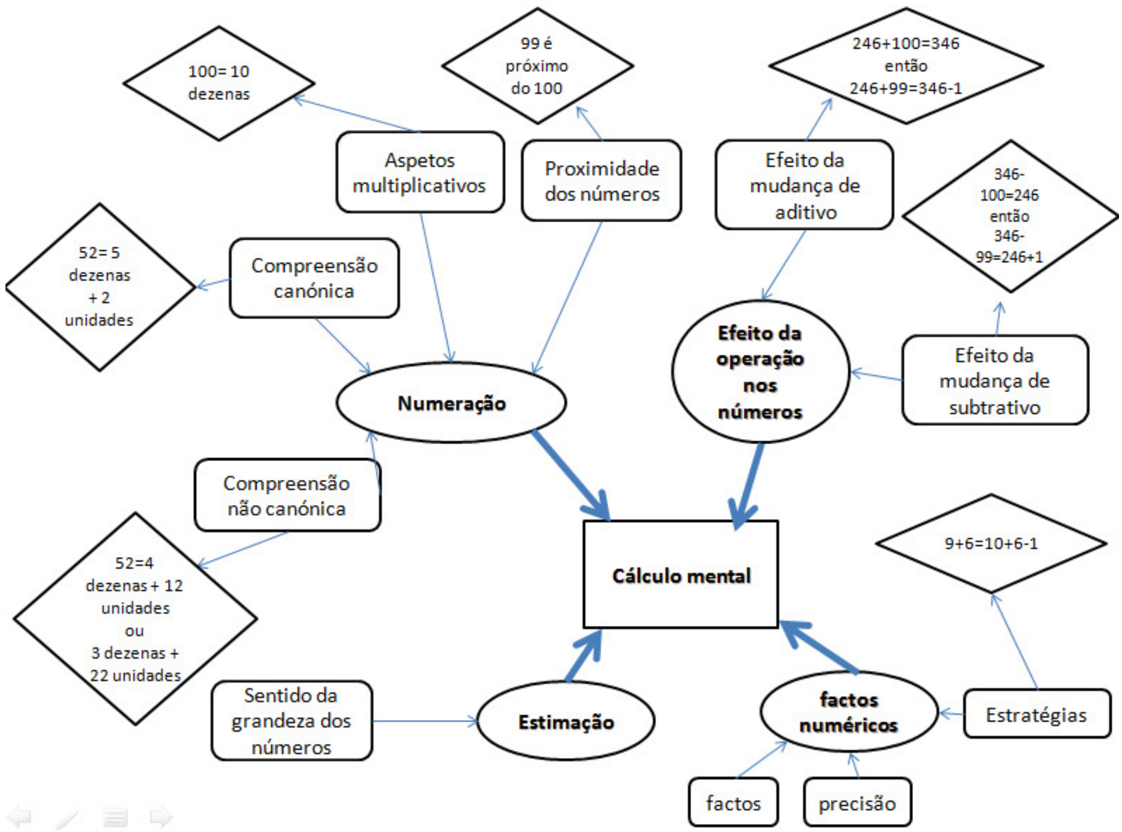



Figura 2. Mapa concetual para o cálculo mental (Heirdsfield, 2011).

Os professores facultaram aos alunos problemas e modelos (reta numérica vazia e uma grelha com 99 e outra com 100 números) que os apoiassem no cálculo mental, mas sem lhes explicar como estes os podiam ajudar a desenvolver estratégias diversificadas. O modo de atuação dos professores na sala de aula centrou-se no questionamento dos alunos: Como resolveste isso? Quem resolveu de forma semelhante? Que semelhança tem com a tua estratégia? Porque é que a tua estratégia é diferente da do teu colega? Enfatizando mais os processos do que os produtos, os professores verificaram que os alunos desenvolveram maior confiança na sua habilidade para fazer Matemática, bem como aumentaram a capacidade para usar uma maior variedade de estratégias. Gradualmente foram melhorando o seu gosto e empenho pela Matemática bem como a capacidade para partilhar ideias e ouvir os outros. No final do estudo, os professores participantes, consideraram que no ensino do cálculo mental a ênfase deve estar no desenvolvimento das estratégias pessoais dos alunos, na exploração, discussão e justificação da forma como pensam e das soluções que apresentam. Consideraram ainda que este tipo de trabalho requer uma mudança de conceção e atitude, por parte do professor, sobre o que é e como ensinar Matemática no ensino básico.

Através do envolvimento neste projeto, os professores passaram a entender e a contemplar na sua forma de ensinar, alguns princípios favoráveis e transversais à aprendizagem matemática dos alunos e, não apenas ao nível do cálculo mental, nomeadamente: determinar os conhecimentos prévios dos alunos; identificar conceitos fundamentais que favoreçam a compreensão de conexões; ensinar conceitos, associá-los e ajudar os alunos a ver conexões entre eles e por fim, fomentar um ambiente de sala de aula onde os alunos se sintam seguros para explorar, partilhar, criticar e justificar as suas estratégias e soluções, onde o processo é tão importante quanto o produto.

Heirdsfield (2011) considera que o objetivo não era só ajudar as crianças a desenvolverem estratégias de cálculo mental, mas ajudá-las também a desenvolver o seu raciocínio, capacidade crítica, sentido de número e de operação. A experiência de ensino que realizou foi fundamental para o conseguir. Para o sucesso desta experiência foi crucial o facto de os professores terem conhecimento de questões relacionadas com o cálculo mental e de terem sido apoiados na realização da experiência de ensino.

À semelhança do que defendem Taton (1969) e Fosnot e Dolk (2001), também este estudo sugere que os momentos de cálculo mental na sala de aula devem ser curtos e desenvolvidos com regularidade. O desenvolvimento de estratégias cada vez mais variadas e complexas, por parte dos alunos, requer do professor uma planificação cuidada e informada. O estudo de Heirdsfield (2011) mostra que o trabalho entre professores e/ou entre investigadores e professores facilita a planificação e realização de cálculo mental na sala de aula.

Brocardo (2011) apresenta algumas ideias para o desenvolvimento do cálculo mental que, apesar de não estarem testadas, resultam da sua experiência nesta área e do conhecimento que possui sobre esta temática em diversos países. A sua proposta assenta em três aspetos: devem ser contempladas três categorias de cálculo mental; devem ser identificados objetivos a atingir no final se cada ciclo; e devem apresentar-se numerosos exemplos sobre a evolução de relações numéricas que suportem o desenvolvimento do cálculo mental.

Relativamente ao primeiro aspeto, a autora baseia-se nas categorias indicadas por Buys (2001). Assim, numa primeira categoria os alunos calculam mentalmente, de forma quase imediata, recorrendo a factos memorizados, regras e a propriedades das operações. A segunda categoria contempla operações com números menos fáceis de operar com rapidez, mas onde devem ser estabelecidas relações numéricas com factos conhecidos. A terceira categoria contempla cálculos onde pode ser necessário recorrer a registos intermédios em papel.

Quanto ao segundo aspeto da sua proposta, Buys (2001) apresenta alguns objetivos a atingir no 1.º e 2.º ciclos. Assim, no final do 2.º ano do 1.º ciclo, considera que os alunos devem saber adicionar e subtrair até $100$, calcular o dobro de números naturais com dois algarismos e calcular metades de números pares até $100$. No final do 4.º ano, considera que os alunos devem ser capazes de adicionar e subtrair números naturais com dois algarismos, representados na forma decimal; multiplicar dois números de dois algarismos; multiplicar um número de um algarismo por um de três ou mais algarismos; multiplicar por $10$, $100$ e $1000$; relacionar a multiplicação e divisão por $10$, $100$ e $1000$ com a multiplicação e divisão por $0{,}1$, $0{,}01$, e $0{,}001$; calcular a metade de números até $100$; relacionar o dividir por 2 com o multiplicar por $0{,}5$ e determinar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ de números múltiplos de 4.

Para o final do 2.º ciclo, a autora considera que os alunos devem, por exemplo, ser capazes de multiplicar dois números de dois algarismos ou um número de um algarismo com um de três ou mais algarismos em que uma das parcelas deve estar na representação decimal; relacionar a divisão por 5 com a multiplicação por $0{,}2$ ou a divisão por 4 com a multiplicação por $0{,}25$ e usar este facto para resolver situações de divisão de um múltiplo de quatro por 4.

Quanto ao terceiro aspeto, Brocardo (2011) sugere a construção de um conjunto de exemplos de relações numéricas (e.g., relacionar $\frac{3}{4}$ com $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ou com metade de $\frac{3}{2}$ ou com $3\times\frac{1}{4}$ ou ainda com $1-\frac{1}{4}$) como suporte ao desenvolvimento do cálculo mental. Estas relações numéricas devem começar a ser desenvolvidas num nível mais elementar da aprendizagem devendo, ao longo do tempo, ser ampliadas e consolidadas passando a fazer parte do reportório de factos conhecidos que os alunos possuem para os apoiar no cálculo rápido e eficaz.

A necessidade dos alunos possuírem um reportório de factos numéricos conhecidos e memorizados, que Brocardo (2011) refere na sua proposta, é um aspeto que também Heirdsfield (2011) considera importante e que contempla no seu mapa concetual. Em linha com estas autoras, Wolman (2006) apresenta um conjunto de factos numéricos que os alunos devem desenvolver e memorizar ao longo dos 1.º e 2.º ciclos, sendo um pouco mais ambiciosos e específicos do que os referidos por Brocardo (2011). Para Wolman (2006) estes factos numéricos conhecidos não são mais do que a sistematização de um conjunto de somas, diferenças, produtos e quocientes disponíveis na memória, facilmente recuperáveis na reconstrução de resultados a partir de outros factos memorizados que permitem ao aluno progressivamente construir um conjunto de procedimentos pessoais. Na sua perspetiva, a construção de procedimentos pessoais permite aos alunos seguirem diferentes caminhos durante a resolução de uma tarefa embora estes caminhos não dependam só dos procedimentos pessoais mas em grande parte da compreensão da tarefa, assim como do desenrolar das suas resoluções e das diferentes relações numéricas que cada um estabelece baseadas nas propriedades das operações.

Wolman (2006) defende que a memorização de certos resultados é um apoio à construção e identificação de relações numéricas com sentido e que ajuda os alunos a perceber que existem cálculos mais simples que outros e que podem relacionar números mais simples para trabalhar com outros mais complexos. Segundo a autora, este conjunto de resultados deveria incluir, ao longo do 1.º e 2.º ciclos, para além do que é referido por Brocardo (2011): identificar decomposições aditivas do número $10$ e a diferenças associadas; identificar decomposições aditivas do número $100$ em números "redondos"[1] e as diferenças associadas; adicionar e subtrair números com o $10$, $100$ e $1000$; adicionar e subtrair números com números "redondos"; fazer a decomposição aditiva números; calcular complementos de um número para chegar a um número "redondo" (e.g., quanto adicionar a $123$ para obter $200$); saber produtos da tabuada da multiplicação e usá-los para compreender quocientes e restos de dividendos menores que $100$ e divisores de um algarismo; fazer a decomposição multiplicativa de números e outros cálculos associados (e.g., $3458 = 3 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 + 10 + 8$); ampliar conhecimentos que detêm sobre a tabuada da multiplicação no trabalho com números "redondos" com mais do que um algarismo; ampliar conhecimentos que detêm sobre os divisores a partir da tabuada da multiplicação e da divisão por $10$, $100$ e $1000$ para poder resolver outras divisões que envolvam números "redondos" e identificar múltiplos e divisores.

Desenvolver o cálculo mental é um processo demorado ao longo do qual se vão ampliando conhecimentos sobre os números e operações, de forma a criar-se uma rede de relações que nos permita ser flexíveis e eficientes. Neste sentido, o cálculo mental

[1] Para a autora números "redondos" (entre aspas no original) são números múltiplos de 10.

deve estar presente na sala de aula diariamente. A proposta de cinco cálculos no início de cada aula, para resolver em 5 ou 10 minutos é suficiente para, de forma sistemática, levar os alunos a apropriarem-se de estratégias de cálculo. Este tempo, que por vezes se julga perdido, é ganho mais tarde pois muitas noções são consolidadas ou introduzidas através da discussão do erro e de estratégias de cálculo que os alunos usam. Para além de se poder dedicar um momento específico da aula ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, é importante não esquecer que toda a aula constitui um bom momento para desenvolver o cálculo mental dos alunos. Neste sentido, o professor tem um papel importante na integração do cálculo mental na aula, na resolução de problemas, na articulação com o uso da calculadora e em momentos onde este se torna mais rápido que o cálculo pelo algoritmo usual ou possa auxiliar os alunos na crítica a um resultado ou num cálculo aproximado.

### 3.3.3. O papel do professor

Na base de um ensino centrado no desenvolvimento do cálculo mental está o professor enquanto elemento fundamental em todo este processo, pois dele dependem duas componentes essenciais da aula de Matemática, a escolha das tarefas que, devem de forma intencional, contribuir para o desenvolvimento do cálculo mental (Brocardo, 2011) e a comunicação na sala de aula, onde assume um papel importante (Matos & Serrazina, 1996).

Para Wolman (2006) as tarefas são ingredientes fundamentais numa aula de Matemática. A autora considera que o professor tem um papel essencial na organização e planificação de uma sequência de aprendizagem progressiva que contribua para o desenvolvimento das capacidades de cálculo dos alunos. Esta sequência de aprendizagem deve ser pensada para que novos conhecimentos se possam apoiar em conhecimentos anteriores, ao mesmo tempo que se introduzem novas aprendizagens. Salienta ainda que todo este trabalho de planificação deve ter presente que o desenvolvimento do cálculo mental deve ser programado a longo prazo, com tarefas que contemplem a aprendizagem de vários conceitos, onde as mesmas questões devem ser abordadas em diferentes momentos e de diferentes formas.

Relativamente à comunicação, Matos e Serrazina (1996) consideram que o professor tem um papel importante na sua regulação na sala de aula. Segundo estes autores, o professor deve encorajar os alunos a assumir um papel mais ativo na aprendizagem e fazê-los perceber que é importante aprender a questionar e demonstrar o seu pensamento aos colegas de modo a clarificarem ideias matemáticas. Indicam ainda que o professor precisa de ouvir os seus alunos e pedir-lhes que clarifiquem e justifiquem as suas ideias matemáticas. Os autores referem três modos de comunicação: (i) exposição; (ii) questionamento e (iii) discussão. A exposição de uma ideia, história ou experiência, envolve normalmente um interveniente que pode ser o aluno ou o professor; no questionamento, por norma o professor faz um conjunto de questões com um determinado objetivo e finalmente a discussão, permite uma multiplicidade de interações quer entre aluno(s)-aluno(s) quer entre aluno(s)-professor.

Relativamente ao questionamento, Matos e Serrazina (1996) referem que este pode envolver três tipos de perguntas: de focalização, de confirmação e de inquirição. As perguntas de focalização ajudam os alunos a seguir um determinado raciocínio. As de confirmação servem para verificar os conhecimentos dos alunos e no último, visam o esclarecimento do professor. As perguntas de inquirição são as que consideram verdadeiramente genuínas, em que o professor procura saber o modo como os alunos estão a pensar, como resolveram um certo problema, ou qual a sua opinião sobre um dado resultado ou estratégia. Na perspetiva dos autores, o questionamento sucessivo por parte do professor é uma forma de incentivar e apoiar atividade matemática do aluno.

São vários os autores (e.g., Bourdenet, 2007; Heirdsfield, 2005; Thompson, 2009; Wolman, 2006) que enfatizam a importância das tarefas e dos diferentes modos de comunicação na sala de aula, referidos por Matos e Serrazina (1996) no processo de desenvolvimento do cálculo mental. Num estudo em que analisou a influência das ações do professor no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos, Heirdsfield (2005) também realça a importância das tarefas, do questionamento do professor e da discussão, acrescentando a mais-valia do uso de modelos. Neste estudo a autora verificou que um questionamento planeado, a escolha de tarefas apropriadas, a utilização de modelos e a exploração e discussão de estratégias foram importantes para estabelecer conexões e incentivar o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental por parte dos alunos. Este estudo revelou ainda, que incentivar o pensamento de estratégias em vez de obter apenas uma resposta certa, contribuiu para que os alunos utilizassem os números de forma mais flexível e desenvolvessem o sentido de operação o que, no futuro, lhes facilitou a aprendizagem dos algoritmos com sentido, com recurso a conexões e não seguindo apenas procedimentos. Wolman (2006) também defende uma atitude de questionamento por parte do professor. Esta autora considera que o professor deve pedir explicações aos alunos e comparar procedimentos para que estes os analisem e expliquem. Defende ainda que a intervenção do professor passa também por identificar as questões que merecem discussão e as situações que podem ser suscetíveis de confronto de pontos de vista e identificar novos conhecimentos que se vão descobrindo. As intervenções do professor devem permitir a difusão, identificação e prática de procedimentos de cálculo mental para que os alunos progressivamente ganhem autoconfiança e melhorem a sua prestação ao nível das estratégias de cálculo.

Na perspetiva de Guimarães e Freitas (2010) o professor tem um papel fundamental na inclusão, nos momentos de discussão, de alunos com dificuldades no cálculo mental. O professor deve ter uma atitude que permita envolver este tipo de alunos gradualmente na discussão de estratégias de cálculo mental na turma, não os expondo demasiado mas solicitando a sua colaboração para comentar as estratégias dos colegas. Esta atitude do professor em conjunto com uma prática regular de cálculo mental ajuda o aluno a ser mais autoconfiante e a ampliar e construir novas estratégias de cálculo, tal como refere Wolman (2006). Na verdade, a discussão é um modo de comunicação na sala de aula referido por vários autores como sendo uma atividade essencial e propícia à aprendizagem e ao estabelecimento de conexões matemáticas. O cálculo mental não é facilmente observável (Threlfall, 2009) e a discussão na turma é o contexto ideal para perceber de que forma os alunos usam os seus conhecimentos sobre números e operações para calcular mentalmente. De acordo com o programa de Matemática (ME, 2007) "a discussão na turma dos vários tipos de estratégias desenvolvidas pelos alunos ajuda-os a construir um reportório de estratégias com os seus próprios limites e flexibilidade e ensina-os, também, a decidir quais são os seus registos mais apropriados e proveitosos" (p. 10). Para além de contribuir para a melhoria gradual da comunicação matemática oral dos alunos, a discussão na sala de aula, proporciona momentos ricos de aprendizagem entre aluno(s) e entre aluno(s) e professor.

Para Bourdenet (2007) os momentos de discussão de cálculo mental em sala de aula permitem comparar procedimentos, refletir, pensar, conjeturar, analisar os erros, desenvolver o sentido crítico e promover intenso debate, fundamental para estabelecer conexões entre aprendizagens matemáticas. Este autor salienta a importância da discussão de estratégias de cálculo e de erros com toda a turma como forma de aprender, uma vez que o momento de correção repetido com regularidade e contemplando diferentes procedimentos possíveis, promove uma aprendizagem mais sólida de certos saberes e permite uma manutenção dos conhecimentos, em que cada noção pode ser regularmente revista e repensada. Considera ainda importante a linguagem natural na análise e identificação do erro. A discussão de estratégias de cálculo com toda a turma permite igualmente identificar conhecimentos a reter relativamente aos números e às operações e validar procedimentos usados, podendo no futuro o próprio aluno saber se a sua estratégia está correta. Também Thompson (1999) considera que os professores devem discutir as estratégias dos alunos na turma para que estes possam explicar como procederam e para que as suas estratégias pessoais sejam legitimadas. Acrescenta ainda que um ambiente de aprendizagem onde se expõem e discutem estratégias na turma, deve ser considerado uma das recomendações acerca da forma como devem os professores desenvolver o cálculo mental na sala de aula.

Tal como Bourdenet (2007) e Thompson (1999), também Wolman (2006) considera que a validação de raciocínios durante a discussão, entre pares e com o professor, permite criar uma rede de conhecimentos acerca do funcionamento dos números e das operações. Para a autora, esta rede de conhecimentos constrói-se a partir da partilha e busca de estratégias, sua explicação, confronto e difusão, permitindo aos alunos identificarem e reterem informação relativa aos números e às operações, ao mesmo tempo que participam na construção de critérios de validação e de seleção de procedimentos. Acrescenta ainda que o ensino do cálculo mental permite a procura, reflexão, discussão, argumentação, produção e análises de ideias matemáticas dos alunos e a identificação de novos conhecimentos.

## 3.4. Síntese

O desenvolvimento do cálculo mental é um processo longo que deve acompanhar a aprendizagem dos números e das operações, ao longo da escolaridade, devendo esse desenvolvimento ser intensificado nos 1.º e 2.º ciclos. Alguns estudos sugerem que a aprendizagem dos números e das operações deve centrar-se primeiro no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, antes de transitar para o cálculo escrito formal.

Isto permite às crianças adquirirem destreza no trabalho com números, compreensão do valor posicional, compreensão dos números e das operações, fornecendo uma base sólida para a introdução dos algoritmos com sentido. À medida que se vai desenvolvendo o cálculo mental, vão sendo ampliados os conhecimentos sobre números e operações, de forma a criar-se uma rede de relações que permita um cálculo rápido e eficiente.

O cálculo mental contribui para o aumento do gosto e empenho pela Matemática e da capacidade de usar uma maior variedade de estratégias de forma cada vez mais flexível. Permite desenvolver conhecimentos matemáticos mas também capacidades transversais. Para além de contribuir para o desenvolvimento do sentido de número e de operação, o cálculo mental desenvolve o raciocínio, a capacidade critica, de conjeturar, refletir e de comunicar matematicamente.

No cálculo mental, existem etapas básicas pelas quais os alunos devem passar. Antes de serem capazes de criar estratégias pessoais diversificadas que envolvam um certo grau de conhecimento sobre os números e as operações, as crianças devem passar pela fase da partição e decomposição de números. O facto de uma criança mobilizar em certos momentos estratégias complexas não significa que o faça sempre pois o aparecimento de dificuldades, por exemplo, na interpretação do contexto da tarefa ou da grandeza dos números envolvidos, pode fazer com que ela volte a usar estratégias de nível mais básico.

Existem semelhanças entre as estratégias de cálculo mental com números naturais e números racionais. Basicamente, quando uma criança calcula mentalmente com números naturais e racionais pode usar sete tipos de estratégias diferentes: formas mentais dos algoritmos escritos; factos conhecidos; mudança de operação; compensação; decomposição; utilização de números de referência; e propriedades das operações. As diferenças que existem prendem-se com a simplicidade dos números envolvidos, como é o caso das estratégias de contagem ou de quase dobros numa fase muito inicial do desenvolvimento do cálculo mental com números naturais, ou com a complexidade dos números como é o caso da mudança de representação nos números racionais, utilização de imagens mentais e regras memorizadas ou utilização de equivalências.

A memória de trabalho e de longo termo desempenham um papel central na capacidade de cálculo mental de um individuo, não só pela capacidade em armazenar factos numéricos mas também pelos modelos mentais que vão criando a partir de conhecimentos prévios e que apoiam o raciocínio e o processo de construção de estratégias. O papel da memória de trabalho no cálculo exato é mais exigente do que no cálculo aproximado uma vez que este requer um maior número de cálculos e maior exigência na manutenção de cálculos intermédios. A memorização e registo, no cérebro, de procedimentos sem compreensão podem originar erros bem como a dificuldade em armazenar e relacionar informação contida em módulos neurológicos. As falhas de memória podem originar uma regressão para estratégias mais primitivas quando outras mais sofisticadas já foram utilizadas, enquanto um acionar automático da memória pode levar a que se respondam a factos de adição com factos de multiplicação (como $2+3=6$ baseado em $2\times3=6$).

As estruturas cognitivas de um individuo são constituídas por representações internas (mentais), essenciais para dar sentido a conceitos e ideias matemáticas e a transição entre estas representações, por vezes inconsciente, permite-nos explicar como pensamos. Contudo, tudo o que podemos dizer sobre as representações mentais baseia-se em inferências, por não serem diretamente observáveis. De acordo com a Teoria dos Modelos Mentais existem três tipos de representações mentais: modelos mentais, representações proposicionais e imagens mentais, que podem ajudar a explicar processos de conhecimento complexos como a compreensão e inferência. A diferença entre estas representações mentais reside na sua especificidade e função embora os modelos mentais sejam a base para a criação de imagens e de representações proposicionais. Os modelos mentais são criados a partir de representações externas. Se estes modelos mentais representam o mundo real com alguma especificidade, são considerados imagens, se fazem inferências acerca do mundo real representado por modelos mentais são representações proposicionais. As representações proposicionais referem-se a afirmações baseadas em proposições, que podem ser verdadeiras ou falsas e que, embora não sejam estruturas análogas aos objetos que representam, são fundamentais para estabelecer relações. No que se refere às imagens mentais, a atividade matemática faz uso de cinco tipos de imagens mentais: imagens concretas, de padrão, de memória de fórmulas, cinestésicas e dinâmicas sendo que uma aprendizagem significativa envolve a utilização de imagens mentais onde a visualização assume um papel importante. Estas imagens mentais podem ser consideradas uma extensão da perceção visual ou uma mera visualização que, no caso do cálculo mental, produz representações mentais semióticas.

As representações mentais podem ser classificadas de descritivas ou representativas se representam símbolos ou ícones, respetivamente. Representações descritivas são símbolos que não têm semelhança com o seu referente mas que permitem estabelecer relações, sendo por isso associadas a representações proposicionais. Representações representativas são consideradas ícones associados ao seu referente por semelhança e analogia e que, por isso, se relacionam com modelos mentais e imagens mentais.

O ensino e aprendizagem do cálculo mental deve ser intencional e sistemático e a aula de Matemática constitui um bom momento para o desenvolver. Alguns autores defendem que devem existir momentos específicos dedicados ao cálculo mental e que estes devem acontecer com regularidade. Diariamente, 10 a 15 minutos, seriam suficientes para melhorar e manter as capacidades de cálculo dos alunos. No entanto, é fundamental que estes momentos sejam pensados e planificados. Para planificar o cálculo mental para a sala de aula, o professor deve selecionar criteriosamente tarefas que permitam aos alunos, progressivamente, mobilizarem estratégias cada vez mais complexas, ter presente a importância dos contextos e perceber que à medida que se vão estabelecendo relações e memorizando factos numéricos, estes contextos vão perdendo importância passando os procedimentos a serem mais relevantes. Esta planificação requer um entendimento, por parte do professor, do que é o cálculo mental e do que este envolve, o que por vezes suscita uma mudança de conceção e de forma de ver o ensino, não só do cálculo mental, mas da Matemática em geral.

Acima de tudo, é importante perceber que o cálculo mental não é incompatível com registos de papel e lápis e que envolve o conhecimento dos números, o efeito das operações sobre os números, a capacidade de estimar resultados e avaliar a sua razoabilidade e a memorização de factos, que facilmente podem ser mobilizados para efetuar um cálculo rápido e eficaz. O professor deve definir os objetivos e metas que os alunos devem atingir, conhecer estratégias de cálculo mental e um conjunto de relações numéricas que apoiem a memorização de factos conhecidos. O trabalho entre professores ou entre investigadores e professores pode facilitar a planificação e realização do cálculo mental na sala de aula. Outro aspeto importante do papel do professor é a gestão da discussão na sala de aula. A discussão é o contexto ideal para desenvolver a comunicação matemática dos alunos e perceber as estratégias que estes mobilizam, uma vez que o cálculo mental não é observável, a não ser que haja partilha de estratégias. O professor deve ter uma atitude de questionamento que permita envolver os alunos nessa partilha, e também ajudá-los a refletir e a validar as estratégias que usam.

# Capítulo 4

# Metodologia de investigação

Neste capítulo começo por apresentar as opções metodológicas do estudo em termos de abordagem e *design*. De seguida, descrevo as várias fases do *design research* onde se inclui a preparação e a experimentação e apresento o processo de recolha e análise de dados e as opções tomadas em relação a instrumentos e à análise retrospetiva. As duas últimas seções discutem aspetos de ética, credibilidade e validade do estudo.

## 4.1. Opções metodológicas

A educação é um campo de investigação dinâmico em que permanentemente se procuram soluções que possam tornar o processo de ensino-aprendizagem mais eficaz. É nesta linha que pretendo perceber, no quadro de uma experiência de ensino centrada em tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos e não matemáticos com números racionais positivos envolvendo as quatro operações básicas e na discussão das estratégias dos alunos do 6.º ano, que estratégias e erros evidenciam os alunos no cálculo mental com números racionais, bem como contribuir para o desenvolvimento das suas estratégias de cálculo mental. Tendo em conta este objetivo, realizei um estudo qualitativo e interpretativo (Denzin & Lincoln, 2005) que segue uma abordagem metodológica centrada no *design research* (Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004). Dada a escassez de trabalhos sobre a aprendizagem do cálculo mental com números racionais, este estudo acrescenta conhecimento, para além de ser um estudo exploratório.

### 4.1.1. Investigação qualitativa e interpretativa

Na perspetiva de Merriam (1998) a investigação qualitativa tem em vista compreender e explicar o significado de fenómenos sociais com o mínimo de intervenção, num ambiente o mais natural possível, centrando-se nos processos e significados e na compreensão dos fenómenos. Esta autora apresenta um conjunto de caraterísticas associadas à investigação qualitativa referindo que: (i) o foco é perceber os significados construídos pelas pessoas, procurando compreender o mundo e as suas experiências; (ii) o investigador é o principal meio de recolha e de análise de dados, procurando maximizar as oportunidades de recolha de dados e de produção de informação significativa; (iii) envolve uma estratégia indutiva de investigação, pois permite construir teorias a partir da observação, e uma compreensão intuitiva adquirida no campo de investigação; e, finalmente, (iv) o seu produto é descritivo e rico uma vez que usa palavras e imagens, em vez de números, para descrever o que o investigador aprendeu sobre o fenómeno em estudo. Bogdan e Biklen (1994) referem que o foco de uma investigação qualitativa está nos processos e não nos resultados ou produtos e que o ponto de vista dos participantes assume grande importância. Denzin e Lincoln (2005) acrescentam, ainda, que numa investigação qualitativa o investigador assume uma postura inquiridora em que procura respostas para questões que enfatizam a forma como a experiência social é criada e como esta lhes dá significado.

O presente estudo enquadra-se nas características indicadas por estes autores na medida em que pretendo perceber, no ambiente natural de aprendizagem dos alunos que é a sala de aula, que estratégias e erros evidenciam quando calculam mentalmente com números racionais e compreender como evoluem estas estratégias ao longo de uma experiência de ensino. Como investigadora sou o principal agente de recolha e análise de dados e pretendo assumir uma atitude inquiridora que me leve a refletir e a melhorar a experiência de ensino ao longo de dois ciclos de experimentação.

Para Bogdan e Biklen (1994) a interpretação assume um papel importante em estudos de natureza qualitativa uma vez que as situações ou acontecimentos não são dotados de significados próprios, sendo esses significados atribuídos pelas pessoas de acordo com as suas experiências. Acrescentam que a interpretação não é um ato autónomo uma vez que os indivíduos interpretam com o auxílio de outros e constroem significados através de interações.

Neste sentido, este estudo assume uma natureza interpretativa, uma vez que pretendo compreender e interpretar as estratégias e os erros dos alunos no cálculo mental com números racionais assumindo uma atitude inquiridora que me permitirá encontrar respostas para as minhas questões de estudo. O meu conhecimento e experiência acerca do tema investigado, desempenham um papel orientador na recolha e análise de dados não podendo por isso ficar à margem da minha interpretação da realidade.

### 4.1.2. *Design Research*

O *Design Research* (DR) é uma abordagem em termos de metodologia de investigação que surgiu no campo das engenharias e que começa a ganhar espaço e importância em educação (Cobb, 2003; Collins et al., 2004; McCloskey & Norton, 2008). O "*design research*" ou os "*design experiments*" como referem Collins et al. (2004), surgem no âmbito da educação na década de 90 como forma de realizar investigação formativa para testar e refinar projetos educacionais baseados em princípios derivados de investigações anteriores. Esta perspetiva de refinamento progressivo envolve a colocação de uma primeira versão de um projeto ou de uma sequência de tarefas no terreno para ver como funciona e em seguida, esta sequência de tarefas é sucessivamente revista e analisada com base na experiência, até que todos os erros sejam afinados e trabalhados. Segundo Collins et al. (2004), esta análise leva a refinamentos no *design* da própria experiência mas também promove refinamentos na teoria. Assim, o DR tem sempre o duplo objetivo de aperfeiçoar a teoria e prática.

Nas secções seguintes abordo a finalidade do estudo e descrevo as respetivas fases do DR e opções tomadas em cada uma das fases. Nos capítulos 6, 7, 8 e 9, descrevo em pormenor a forma como se desenvolveram cada uma das fases.

#### 4.1.2.1.Finalidade

De acordo com a finalidade deste estudo, descrita no capítulo 1 e para dar resposta às questões de estudo, desenvolvi uma experiência de ensino que pudesse ser realizada na sala de aula e posteriormente avaliada e redefinida, onde as tarefas de cálculo mental e a sua discussão assumissem um papel importante. Tendo em conta que a sala de aula é um contexto educativo complexo, o DR constitui um meio privilegiado para realizar esta abordagem permitindo gerar e testar teorias. Além disso, como referem Cobb et al. (2003) contribui igualmente para uma compreensão do que é a *ecologia de aprendizagem (learning ecology)* através da conceção dos seus elementos e por anteciparem como estes elementos funcionam em conjunto para apoiar a aprendizagem. Estes autores definem *ecologia de aprendizagem* como um complexo sistema de interações que envolve múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis incluindo as tarefas que os alunos resolvem, o tipo de discurso que é encorajado na sala de aula, as normas de participação estabelecidas, as ferramentas e materiais relacionados com os meios previstos e as relações que os professores estabelecem em sala de aula entre estes elementos.

Para além de permitir compreender aspetos da aprendizagem dos alunos em contextos complexos como a sala de aula, o DR também constitui um meio privilegiado para o desenvolvimento profissional dos professores fornecendo um conjunto de informações importantes acerca da forma como os alunos trabalham e pensam, melhorando o conhecimento do professor acerca do ensino e da aprendizagem, o que se vai refletir ao nível da sala de aula (Collins et al., 2004; McCloskey & Norton, 2008).

Este é um estudo de desenvolvimento e não de validação (Nieveen, Mckenney & Van den Akker, 2006) que pretende resolver problemas identificados a partir da prática (i.e., dificuldades de aprendizagem dos números racionais e quase ausência de cálculo mental com este conjunto numérico) e formular uma teoria local de aprendizagem. Sendo um estudo de desenvolvimento, o foco é a praticabilidade da intervenção, cuja ênfase metodológica está no desenvolvimento interativo da experiência onde a avaliação formativa desta deve ser constante (Nieveen et al., 2006). Nieveen et al. (2006) acrescentam ainda que a experimentação deve ocorrer em contextos diferentes e que no final o conhecimento produzido deve traduzir-se num conjunto de princípios de *design* (*design principles*) que não pretendem ser receitas para o sucesso, mas sim linhas orientadoras para quem pretende aplicar o conhecimento produzido a novos contextos. Seguindo esta perspetiva os dois ciclos de experimentação irão ser desenvolvidos em escolas diferentes com turmas com características igualmente diferentes, para assim permitir a definição de linhas orientadoras úteis para possíveis ações na sala de aula que pretendam desenvolver o cálculo mental dos alunos com números racionais.

#### 4.1.2.2.Estrutura

Neste estudo, o DR estruturou-se em três fases: (i) a preparação; (ii) a experimentação na sala de aula; e (iii) a análise retrospetiva (Gravemeijer & Cobb, 2006). Sendo o DR uma abordagem interativa caracterizada por ciclos de intervenção e revisão onde se testam teorias durante o processo de criação de novas teorias (Cobb et al., 2003), estas três fases vão sendo continuamente revisitadas em cada ciclo de experimentação (Gravemeijer & Cobb, 2006). Para Cobb et al. (2003) este processo interativo caracteriza-se por ser prospetivo e reflexivo. Prospetivo no sentido em que as experiências de ensino são realizadas de acordo com um processo de aprendizagem hipotético (hipotético porque está sujeito a constantes refinamentos e reformulações), que inclui os meios de suporte a essa realização. Reflexivos porque envolvem testes-conjetura conduzidos, muitas vezes, a vários níveis de análise. O projeto inicial é uma conjetura sobre os meios de apoio a uma forma particular de aprendizagem que está a ser testada. Foi com base nestas três fases que desenvolvi e concretizei uma experiência de ensino que foi sujeita a diversos refinamentos ao longo de dois anos de recolha de dados. O quadro 2 apresenta a calendarização do estudo e respetivas fases do DR.

##### 4.1.2.2.1. Fase I – Preparação

A fase de preparação da experiência de ensino iniciou-se com uma revisão de literatura exaustiva acerca do DR enquanto abordagem metodológica, passando pelo aprofundamento de conhecimentos sobre as temáticas envolvidas no trabalho, como cálculo mental e estratégias, números racionais suas representações, operações e erros dos alunos e a relação entre cálculo mental e números racionais.

A escassez de literatura acerca de cálculo mental com números racionais a nível internacional e a sua ausência a nível nacional reforçaram ainda mais a minha convicção de que esta era uma boa área de estudo, bem como a minha opção pelo DR.

Quadro 2. Calendarização do estudo

| | | **2010** | | | | **2011** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | set. | out. | nov. | dez. | jan. | fev. | mar. | abr. | mai. | jun. | jul. | ago. |
| Fase de preparação/análise retrospetiva | Revisão de literatura | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| | Projeto de tese (CFA) | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| | Planeamento do estudo prelim. | | | | | | ■ | ■ | ■ | | | | |
| | Estudo prelim. recolha de dados | | | | | | | | ■ | ■ | ■ | | |
| | Análise do estudo prelim. | | | | | | | | | | ■ | ■ | ■ |
| | Planeamento da experiência de ensino | | | | | | | | | | | ■ | ■ |
| | | **2011** | | | | | **2012** | | | | | | |
| | | set. | out. | nov. | dez. | jan. | fev. | mar. | abr. | mai. | jun. | jul. | ago. |
| Fase experimentação/análise retrospetiva | Revisão de literatura | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| | Projeto de tese (CFA) | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | | | | | | | |
| | Planeamento da experiência de ensino | | ■ | ■ | ■ | ■ | | | | | | | |
| | Realização da experiência de ensino – Ciclo I | | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | | | |
| | Recolha de dados – Ciclo I | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | | | |
| | Análise de dados – Ciclo I | | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| | | **2012** | | | | **2013** | | | | | | | |
| | | set. | out. | nov. | dez. | jan. | fev. | mar. | abr. | mai. | jun. | jul. | ago. |
| | Revisão de literatura | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| | Realização da experiência de ensino – Ciclo II | | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | | | |
| | Recolha de dados – Ciclo II | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | | | |
| | Análise de dados – Ciclo II | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| | | **2013** | | | | **2014** | | | | | | | |
| | | set. | out. | nov. | dez. | jan. | fev. | mar. | abr. | mai. | jun. | jul. | ago. |
| Análise | Análise de dados e redação da tese (aprofundamento) | ■ | ■ | ■ | ■ | | | | | | | | |
| | Redação de conclusões e entrega da tese | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| | | 2014 | | | | 2015 | | | | | | | |
| | | set. | out. | nov. | dez. | jan. | fev. | mar. | abr. | mai. | jun. | jul. | ago. |
| | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |

Pretendia assim, realizar uma experiência interventiva na sala de aula encarada como banco de ensaio para a inovação (Cobb et al., 2003), uma vez que não tinha conhecimento de investigação que contemplasse o desenvolvimento do cálculo mental com números racionais de forma integrada, no percurso de aprendizagens dos alunos, e onde se privilegia o uso das três representações dos números racionais (fracionária, decimal e percentagem). Era minha intenção desenvolver o cálculo mental dos alunos e investigar e identificar as suas estratégias e erros, propondo novas formas de abordagem.

A revisão de literatura e a atualização de conhecimentos acerca das temáticas envolvidas foi algo constante ao longo do estudo, não só para aprofundar os meus conhecimentos mas também para apoiar a conceção de um estudo preliminar, a construção de conjeturas de ensino-aprendizagem e o refinamento destas conjeturas, do quadro teórico e da sequência de tarefas usada na experiência de ensino nos dois ciclos de experimentação. O resultado desta revisão de literatura encontra-se refletido nos Capítulos 2, 3 e 4.

Após uma primeira revisão de literatura construí um protótipo de experiência de ensino (Anexo D) com seis tarefas que realizei em 2011 num estudo preliminar (Plomp, 2007) em duas das minhas turmas de 5.º ano, uma vez que me encontrava a lecionar. Este estudo preliminar teve como objetivo de compreender o tipo de estratégias e erros dos alunos no cálculo mental com números racionais positivos, bem como as dinâmicas inerentes à condução da discussão das tarefas de cálculo mental na sala de aula. O quadro 3 apresenta uma síntese dos aspetos mais importantes tidos em conta na conceção e análise deste estudo preliminar.

As tarefas do estudo preliminar pretendiam ser semelhantes às que iria realizar nos dois ciclos de experimentação seguintes, pelo que foram propostas semanalmente aos alunos num *PowerPoint* temporizado. Estas tarefas envolviam as três representações dos números racionais em expressões e situações contextualizadas, mas apenas as operações adição e subtração uma vez que os alunos de 5.º ano ainda não tinham abordado as operações multiplicação e divisão. Na sequência de tarefas para o 6.º ano as operações multiplicação e divisão são contempladas.

A realização do estudo preliminar permitiu-me voltar a fazer investigação sobre a minha própria prática (Ponte, 2002), uma vez que já o tinha feito aquando do mestrado. Tendo em conta que me encontrava a lecionar no momento em que iniciei o doutoramento e fase de preparação, a investigação no contexto da minha própria prática foi a abordagem que melhor se adequou às circunstâncias. Esta abordagem proporcionou-me momentos de reflexão acerca das estratégias e erros dos alunos e do meu papel enquanto permanente impulsionadora e desafiadora de uma discussão na sala de aula rica e capaz de incentivar os alunos a explicitarem a forma como pensam.

Quadro 3. Aspetos tidos em conta no estudo preliminar

| | **Descrição** |
|---|---|
| **Estudo preliminar** | Ano letivo de 2010/2011 |
| O objetivo | Compreender as estratégias e os erros dos alunos no cálculo mental com números racionais e as dinâmicas inerentes à condução da discussão das tarefas na sala de aula. |
| Revisão de literatura | DR, Cálculo mental, Números racionais. |
| Protótipo de experiência de ensino | Seis tarefas de cálculo mental com números racionais na representação faccionária, decimal e percentagem, envolvendo adição e subtração; PowerPoint temporizado. |
| Experimentação | Semanal entre maio e junho de 2011; investigação sobre a própria prática da investigadora; duas turmas do 5.º ano. |
| Análise retrospetiva | Análise e reflexão acerca das tarefas, das estratégias e erros apresentados pelos alunos e da discussão em sala de aula. |

O conhecimento prévio de literatura sobre cálculo mental e números racionais e os dados empíricos recolhidos no estudo preliminar, permitiram-me planificar uma proposta de sequência de tarefas para uma experiência de ensino a realizar em dois ciclos de experimentação no 6.º ano. O quadro 4 sistematiza aspetos importantes que foram tidos em conta na fase de planificação da experiência de ensino, embora esta tivesse sido alvo de diversos reajustamentos ao longo dos ciclos I e II de experimentação, como é descrito no capítulo 6. Uma explicação mais detalhada acerca do conteúdo da experiência de ensino realizada em 2012 e 2013 é apresentada no capítulo 5 e 6.

A planificação da experiência de ensino começou com a clarificação da intenção teórica da experiência (Cobb et. al., 2003): identificar e compreender as estratégias e erros dos alunos no cálculo mental com números racionais e perceber como isto se relaciona com as condições em que ocorre a experiência. No entanto, é preciso não esquecer que, pela sua própria natureza, o estudo de fenómenos tão complexos como as *ecologias* *de aprendizagem* (Cobb et. al., 2003) não permite a especificação completa de tudo o que acontece, tornando-se fundamental distinguir quais os elementos essenciais, os que podem ser auxiliares, acidentais ou assumidos como condições de fundo.

Quadro 4. Aspetos tidos em conta na fase de planificação da experiência de ensino

| **Planificação da experiência de ensino** | **Descrição** |
|---|---|
| Intenção teórica | Identificar e compreender as estratégias e erros dos alunos no cálculo mental com números racionais e perceber como se relacionam com as condições em que ocorre a experiência. |
| Conjetura | Uma experiência de ensino realizada (…):<br>Permite aos alunos desenvolverem um reportório flexível de estratégias de cálculo mental; e<br>Contribui para uma melhoria gradual do seu desempenho em tarefas de cálculo mental, levando-os a cometerem cada vez menos erros. |
| Foco | *Cognitivo*: o raciocínio dos alunos no cálculo mental (estratégias); os erros que cometem no cálculo mental;<br>*Interpessoal*: a discussão na sala de aula (interações entre alunos);<br>*Grupo ou sala de aula*: características dos alunos e participação;<br>*Recursos*: *PowerPoint* temporizado, lápis e papel. |
| Variáveis dependentes | *Variáveis de ambiente*: envolvimento e participação dos alunos (normas sociais e sociomatemáticas);<br>*Variáveis de aprendizagem*: evolução das estratégias dos alunos;<br>*Variáveis sistémicas*: adaptação da experiência a dois contextos distintos. |
| Variáveis independentes | Contexto /ambiente de aprendizagem;<br>Suporte técnico (*PowerPoint* temporizado). |

Após a identificação da intenção teórica, e tendo por base a revisão de literatura sobre as temáticas em estudo e a análise do estudo preliminar, defini uma conjetura de ensino-aprendizagem a aperfeiçoar ao longo do primeiro ciclo de experimentação. Esta conjetura está descrita no Capítulo 5 e a sua evolução ao longo do estudo surge no Capítulo 6.

Collins et al. (2004) consideram que uma experiência de ensino deve desenvolver-se tendo em conta vários aspetos, entre eles as diversas formas de "olhar" a experiência, ou seja, o foco e as variáveis dependentes e independentes que poderão, por vezes, ser consideradas pontos críticos da experiência. É importante pensar previamente nestes aspetos para posteriormente perceber como se relacionam estes pontos críticos a fim de avaliar a experiência e sua realização. Os autores consideram que o foco deve ser contemplado a vários níveis: cognitivo, interpessoal, grupo ou sala de aula, recursos, escola ou instituição. Assim, referem que o foco de análise de uma experiência de ensino pode estar na relação entre as regras de sala de aula ou padrões de argumentação matemática e científica e a aprendizagem dos alunos, ou ainda na forma como a diversidade de experiências dos alunos pode ser um recurso para perceber as suas diferentes ideias.

Neste estudo, o foco a nível cognitivo centra-se na compreensão do raciocínio dos alunos, ou seja, nas estratégias que estes usam para realizar cálculo mental e nos erros que cometem quando calculam mentalmente (e.g., na tarefa de diagnóstico e a evolução das estratégias e erros dos alunos ao longo dos ciclos de experimentação); ao nível interpessoal, na compreensão da comunicação na sala de aula, nomeadamente nas interações entre alunos nos momentos de discussão e apresentação de estratégias e erros, que sejam promotoras de construção individual e coletiva de conhecimento; ao nível do grupo ou sala de aula as características dos participantes e a sua participação na discussão das tarefas; ao nível dos recursos na análise do dispositivo usado para desafiar os alunos a calcularem mentalmente (*PowerPoint* temporizado) e no uso dado pelos alunos ao lápis e papel para registo de resultados ou cálculos intermédios caso assim o entendam. Por fim, ao nível de escola ou instituição, tendo em conta que ambas as escolas onde foram realizadas os ciclos de experimentação se mostraram de imediato recetivas para acolher este estudo, não causando quaisquer impedimentos à sua realização, opto por não considerar este um foco relevante para a análise e avaliação do estudo.

Relativamente às variáveis, Collins et al. (2004) consideram que existem pelo menos três tipos de variáveis dependentes que são importantes avaliar e que, de certo modo, se relacionam com os diversos focos sobre o qual incide a análise e avaliação da experiência de ensino: variáveis de ambiente, ou seja, o envolvimento dos alunos na aprendizagem em sala de aula, a cooperação entre alunos, bem como o esforço que fazem para entender o tema que está a ser abordado; variáveis de aprendizagem, tais como o conhecimento do conteúdo, capacidades (*skills*), disposições, estratégias metacognitivas, estratégias de aprendizagem; e variáveis sistémicas, como a sustentabilidade, extensão, escalabilidade, facilidade de adaptação e a variável custos.

As variáveis de ambiente e de aprendizagem implicam a negociação de normas sociais onde é necessário acordar, para as discussões de sala de aula, formas organizadas de intervir e explicar raciocínios, mas também de normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996). No que se refere às normas sociais é importante que os alunos percebam, por exemplo, que a dinâmica de cálculo mental a ser instituída contempla um momento de trabalho individual e outro coletivo, que devem participar na discussão de forma ordenada explicando como pensaram para calcularam mentalmente, que devem ser apresentadas estratégias diferentes para discussão, que devem respeitar as intervenções dos colegas e ouvi-los mantendo uma postura crítica perante as estratégias apresentadas. As normas sociomatemáticas, segundo Yackel e Cobb (1996) referindo-se a aspetos específicos da atividade matemática dos alunos partilhados em momentos de discussão coletiva, relacionam-se com o que deve ser considerado como "matematicamente diferente, matematicamente sofisticado, matematicamente eficaz e matematicamente elegante numa sala de aula" (p.461). Neste sentido, o professor enquanto mediador de todo este processo de negociação e reconhecimento de normas sociomatemáticas, deve incentivar os alunos a apresentarem diferentes soluções para uma mesma questão de cálculo mental acompanhadas de explicações e justificações matematicamente aceitáveis e reveladoras do seu pensamento matemático, discutir exemplos e contraexemplos no processo de validação de estratégias, apoiar a construção de um reportório de estratégias eficientes de cálculo mental levando os alunos a perceber por que razão são determinadas estratégias mais eficientes do que outras e levá-los a terem um pensamento individual cada vez mais sofisticado matematicamente (Yackel & Cobb, 1996). Na perspetiva de Yackel e Cobb (1996) a oportunidade dos alunos escutarem as explicações e justificações dos colegas e de procurarem dar sentido às explicações dos outros validando-as ou tentando identificar semelhanças e diferenças entre várias estratégias, envolve uma atividade reflexiva que contribui significativamente para a aprendizagem matemática dos alunos.

Assim, e tendo em conta que o desenvolvimento de estratégias e clarificação dos erros dos alunos só é possível com a participação de todos, são variáveis dependentes deste estudo o envolvimento e participação dos alunos na discussão, onde normas sociais e sociomatemáticas regulam o funcionamento e qualidade destas discussões, bem como a forma como esta participação é incentivada pelo questionamento dos colegas e da professora; a evolução das estratégias dos alunos, uma vez que não era meu objetivo avaliar as suas aprendizagens individuais; e a extensão e facilidade de adaptação da experiência de ensino a dois contextos diferentes.

Para estudar diferentes variáveis, é necessária a utilização de uma variedade de técnicas de avaliação, entre elas a entrevista e a observação sistemática da sala de aula (Gravemeijer & Cobb, 2006). Avaliações qualitativas e quantitativas são partes essenciais da metodologia de DR embora neste estudo apenas opte por uma abordagem qualitativa, pelas razões que expliquei anteriormente.

No que respeita às variáveis independentes, os autores identificam seis variáveis que importam ter em conta: o contexto/ambiente de aprendizagem; as características dos alunos; o suporte técnico; o apoio financeiro; o desenvolvimento profissional; e a trajetória da implementação. Para Collins et al. (2004) o contexto/ambiente de aprendizagem é uma variável crítica para o desenvolvimento de qualquer experiência, bem como as características dos alunos, como idade, nível socioeconômico, taxa de rotatividade, e assim por diante. É importante determinar em que tipo de alunos a experiência é eficaz e de que forma, uma vez que a experiência pode não funcionar do mesmo modo com alunos com características diferentes. O suporte técnico é outra variável independente a ter em conta pois pode haver necessidade de recursos e suportes de vários tipos, incluindo materiais, apoio técnico, apoio administrativo e apoio aos pais. A experiência pode exigir que os professores reúnam materiais, despendam tempo na preparação ou outras atividades etc., pelo que essas exigências precisam de ser identificados. O apoio financeiro e custos associados à realização da experiência também são importantes, embora muitas vezes sejam ignorados pois quando comparados ao preço da própria inovação não fazem qualquer sentido. Outra variável independente considerada pelos autores é o desenvolvimento profissional. Para que uma experiência seja bem-sucedida os professores participantes são por vezes envolvidos em situações diversas que contribuem para o seu desenvolvimento profissional, como por exemplo, oficinas, reuniões do projeto, cursos, vídeos de prática, prática guiada por profissionais especializados, reuniões de reflexão e assim por diante. Identificar o que os professores necessitam de realizar na experiência com sucesso é um aspeto importante da conceção de uma inovação. Por fim, a variável independente trajetória de implementação, refere-se à forma como a experiência foi introduzida e desenvolvida, tais como, o tempo e duração da experiência e a sua utilidade. No final é importante perceber que variáveis influenciaram o processo de implementação da experiência e de que forma contribuíram para o seu sucesso.

Neste estudo, é relevante ter em conta as variáveis independentes contexto/ambiente de aprendizagem uma vez que as duas turmas que participam no estudo têm contextos socioeconómicos e de aprendizagem diferentes; a variável suporte técnico, embora restrito apenas ao uso do *PowerPoint* temporizado, deve ser analisada tendo em conta a sua influência na construção das estratégias pelos alunos; e a trajetória de implementação pois embora o número de tarefas tenha sido o mesmo em ambas as turmas bem como a sequência de apresentação das representações do número racional (frações, decimais e percentagens) houve necessidade de fazer algumas alterações do primeiro para o segundo ciclo de experimentação e mesmo dentro de cada ciclo de experimentação. Relativamente às variáveis independentes apoio financeiro e desenvolvimento profissional, são irrelevantes neste estudo uma vez que não foram envolvidos valores monetários que justifiquem considerar o apoio financeiro como uma vaiável importante e porque, sendo um estudo centrado na aprendizagem dos alunos, o desenvolvimento profissional dos professores é um aspeto secundário que não pretendo analisar embora possa ser referido se assim se justificar.

Nesta fase de preparação começou a emergir um quadro teórico que inicialmente se centrou num conjunto de conceitos e ideias que me pareceram importantes para apoiar o desenvolvimento e apropriação de estratégias de cálculo mental dos alunos com números racionais e que contemplava o uso de factos numéricos, regras memorizadas e relações numéricas por parte dos alunos, as tarefas e os processos de comunicação na sala de aula, nomeadamente a discussão, enquanto meios para atingir o fim pretendido. Este quadro teórico foi evoluindo ao longo dos dois ciclos de experimentação (ver capítulo 6) fruto de refinamentos que foram realizados com base na recolha de dados, na revisão de literatura e nas diversas reflexões que fui fazendo ao longo do estudo, tendo-se revelado uma ferramenta importante para a construção de categorias de análise e consequentemente para a análise de dados.

#### 4.1.2.2.2.Fase II - Experimentação na sala de aula

O objetivo da fase de experimentação é, ao longo dos ciclos de experimentação, avaliar a adequação e exequibilidade da experiência de ensino (tarefas e gestão da discussão na sala de aula) e refinar uma conjetura de ensino-aprendizagem previamente definida que visa ser uma teoria local de aprendizagem (Gravemeijer & Cobb, 2006).

A fase de experimentação na sala de aula, para além do estudo preliminar, já referido e que será descrito de forma sintética no capítulo referente à preparação (capitulo 5), contemplou dois ciclos de experimentação que decorreram em dois anos letivos consecutivos (2011/12 e 2012/13) em duas escolas diferentes. A experiência de ensino foi realizada semanalmente no início de uma aula de Matemática de 90 minutos. Foram realizadas 11 tarefas em cada ciclo de experimentação, que correspondem em média a aulas de aproximadamente 70 minutos, sendo que no segundo ciclo de experimentação e, dadas as características dos alunos, por vezes as aulas tiveram uma duração superior. A realização na sala de aula foi da responsabilidade das professoras com o meu apoio e contributo, principalmente em momentos onde, enquanto investigadora e observadora participante, senti necessidade de solicitar uma maior clarificação das explicações dos alunos questionando-os. Esta minha participação vai ao encontro do que defendem McCloskey e Norton (2008). Estes autores consideram que a realização de uma experiência de ensino pode ser suportada por um investigador-observador na sala de aula, que está atento às interações que ocorrem entre aluno(s)-aluno(s) e professor-aluno(s) e que também pode dar contributos questionando os alunos. Assim, o investigador-observador pode contribuir para as interações na sala de aula e fornecer *feedback* ao professor sobre essas interações aquando da reflexão em conjunto após a aula. O investigador-observador pode ainda gravar em áudio e/ou vídeo episódios de aula, para que posteriormente sejam discutidos e analisados por ambos, o que constitui uma mais-valia para a evolução da experiência de ensino.

Numa perspetiva semelhante, Cobb et al. (2003) salientam que deve existir um envolvimento direto da equipa de investigação no contexto da investigação e apresentam quatro aspetos importantes, que implicam: ter uma visão clara dos percursos de aprendizagem esperados e dos meios possíveis de apoio que devem ser mantidos e partilhados pela equipa de investigação; manter relações permanentes entre os profissionais; desenvolver uma profunda compreensão da *ecologia da aprendizagem* – não apenas para facilitar a logística, mas porque esse entendimento é um alvo teórico para a investigação; e realizar sessões regulares entre os elementos da equipa para interpretação de acontecimentos e planeamento de novas intervenções. Para estes autores é importante que a equipa faça um registo completo do processo em curso (através de registos em áudio de reuniões e registos escritos para documentar as conjeturas em evolução, juntamente com as observações que são vistas como um apoio ou forma de questionar uma conjetura). As experiências de ensino podem assim produzir vastos e complexos conjuntos de dados que incluem as tarefas e as estruturas de atividade, os produtos de aprendizagem, tais como o trabalho do aluno, o discurso em sala de aula, a postura corporal e gestos, padrões de interação social, inscrições, notas de campo, respostas às entrevistas, testes, ou outras formas de avaliação (Cobb et al., 2003; Collins et al., 2004; Gravemeijer & Cobb, 2006).

Seguindo esta perspetiva, toda a fase de experimentação foi áudio e/ou vídeo gravada e teve por base um trabalho direto entre a investigadora e as professoras em cada um dos ciclos de experimentação, quer na preparação das tarefas para a sala de aula, quer nos momentos de reflexão pós-aula e sua influência no reajustamento das tarefas e da sequência a apresentar aos alunos. O objetivo principal das reuniões de preparação era resolver as tarefas; adequar a proposta à realidade da turma e à planificação das professoras, quer em termos de números racionais usados quer em termos de ordem das tarefas e questões e sua interligação com as restantes aulas de Matemática; antecipar e discutir possíveis estratégias e erros dos alunos e modos de promover a discussão em torno do que antecipámos por parte dos alunos; e antecipar questões que pudessem ajudar os alunos a clarificar o seu discurso. A vertente de antecipação esteve muito presente nas reuniões de preparação e revelou-se um aspeto fundamental para a preparação da discussão na sala de aula.

Relativamente às reuniões de reflexão pós-aula, estas foram importantes para analisar de forma critica e construtiva a prestação dos alunos, momentos críticos da aula e aspetos a melhorar nas tarefas seguintes, quer em termos de dinâmicas de sala de aula quem em termos de sequência de tarefas. A descrição dos principais aspetos discutido e abordado nos momentos de preparação e de reflexão pós-aula é apresentada no capítulo 6. A fase de experimentação foi sem dúvida a fase de ouro da recolha de dados, dados estes que forneceram evidências importantes para a validação/refutação da conjetura de ensino-aprendizagem e que permitiram fazer inferências e responder às questões do estudo.

Neste estudo, e tendo em conta a perspetiva de Gravemeijer e Cobb (2006) e de McCloskey e Norton (2008) recorro a vários instrumentos de recolha de dados, onde se inclui a observação direta participante, a recolha documental, notas de campo e a entrevista semiestruturada. A observação direta teve lugar nas sessões de preparação da experiência de ensino e reflexão pós-aula com as professoras e na sala de aula nos momentos de realização da experiência. Embora este estudo tenha o seu foco na atividade dos alunos na sala de aula e não nas práticas das professoras, o trabalho de preparação da experiência de ensino bem como a reflexão sobre o trabalho realizado pelos alunos produzem dados importantes para a investigação, nomeadamente para a redefinição da experiência, como tenho vindo a referir. Estes dados permitiram ajustar o conteúdo e a forma como a experiência de ensino foi sendo levada à prática em cada uma das turmas e discutir a evolução das estratégias dos alunos.

*Observação direta.* A observação direta é um método de recolha de dados que ocorre no ambiente natural e representa um encontro em primeira mão com o fenómeno de interesse (Merriam, 1998). Este método pode contemplar a observação de reuniões, atividades de rua, salas de aula entre outras (Yin, 2010). Para Lüdke e André (1986) a observação direta permite verificar no momento o que se está a passar num determinado fenómeno, descobrir novos aspetos acerca desse fenómeno e chegar mais perto do ponto de vista dos participantes. Estes são aspetos que Yin (2010) aponta como pontos fortes, alertando para o facto da observação direta requerer tempo, não permitir uma ampla cobertura sem uma equipa de colaboradores e poder influenciar o ambiente natural de recolha de dados.

Por estas razões, decidi gravar em vídeo e áudio a realização dos dois ciclos de experimentação e em áudio as sessões de trabalho com as professoras, procurando assim minimizar os problemas de falta de cobertura da situação em estudo. As gravações áudio e vídeo, em conjunto com as minhas notas de campo, permitem interpretar de forma mais fiável a evolução das estratégias dos alunos e as reflexões realizadas nas sessões de trabalho com as professoras. As notas de campo realizadas em cada aula em conjunto com um guião de reflexão (Anexo E) revelaram-se úteis principalmente para as reuniões de reflexão pós-aula, permitindo-me centrar a reflexão em aspetos críticos da aula, nomeadamente erros dos alunos, estratégias inesperadas ou dinâmicas de sala de aula suscetíveis de serem realçadas e discutidas.

A minha observação é participante, quer no que diz respeito aos momentos de sala de aula quer às sessões de trabalho com as professoras. Embora pretendesse influenciar o menos possível o ambiente de sala de aula, o meu apoio e contributo no questionamento aos alunos permitiu a clarificação das explicações apresentadas na aula por estes o que posteriormente facilitou a interpretação de estratégias e erros. Nas sessões de trabalho com as professoras, desempenhei um papel ativo na preparação, discussão e reflexão acerca da realização da experiência de ensino e no seu refinamento.

*Recolha documental*. A recolha documental utilizada resume-se a documentos com informações sobre as turmas (projeto curricular de turma); o percurso de aprendizagem, que cada professora definiu para as suas turmas; e os registos dos alunos. Os documentos com informações sobre as turmas permitiram-me fazer uma breve caracterização sobre estas. Os percursos de aprendizagem definidos pelas professoras na escola foram essenciais para construir e adaptar experiência de ensino a cada turma, sempre numa perspetiva de integração e ligação entre a representação do número racionais usada nas tarefas de cálculo mental e aquela que estava mais fortemente a ser usada nas aulas de Matemática. Os registos dos alunos foram usados para perceber se estes, ao calcular mentalmente, recorriam a registos intermédios para os ajudar nos seus raciocínios e que tipo de registos eram esses.

*Entrevistas semiestruturadas.* As entrevistas podem classificar-se de estruturadas, não estruturadas e semiestruturadas. Neste estudo recorri a entrevista semiestruturadas por possibilitarem "recolher dados descritivos na linguagem do sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134). Outro aspeto importante deste tipo de instrumento é que parte de um guião que não é aplicado de forma rígida e onde o entrevistador pode efetuar adaptações com vista a esclarecer, corrigir ou adaptar a sequência do discurso do entrevistado tornando-o mais eficaz no que se refere à informação que deseja obter (Lüdke & André, 1988).

Este instrumento de recolha de dados foi usado em conjunto com a observação participante e análise documental para permitir uma triangulação de dado mais fiável. A entrevista às professoras (Anexo F) pretendia recolher informação acerca da forma como tinham sido trabalhados os números racionais e o cálculo mental antes da experiência de ensino, qual a opinião acerca da experiência de ensino e sua realização em sala de aula bem como a forma como percecionaram a articulação entre o que foi realizado na experiência e nas restantes aulas de Matemática e as aprendizagens realizadas pelos alunos.

Nas entrevistas aos alunos foi necessário fazer diversas opções. A primeira foi a escolha dos alunos a entrevistar. Tendo em conta a prestação dos alunos ao longo da realização da experiência de ensino, eu em conjunto com as professoras, decidimos que as entrevistas iriam recair sobre os alunos menos participativos e que tinham manifestado mais dificuldades no cálculo mental. Era meu objetivo perceber se estes alunos não participavam por falta de conhecimentos ou porque se sentiam pouco confortáveis em partilhar na turma a forma como pensavam; se alguns dos erros manifestados nas discussões ao longo da experiência de ensino tinham ou não sido clarificados/corrigidos e que tipo de estratégias tinham sido desenvolvidas por alunos com maiores dificuldades, para as poder relacionar com o trabalho realizado na sala de aula; e se, num ambiente diferente da sala de aula continuavam a revelar o mesmo tipo de estratégias e erros apresentados nas discussões coletivas. Outra opção prende-se com a estrutura do guião de entrevista (Anexo G). Optei por um guião semelhante às tarefas realizadas na sala de aula, constituído por expressões e situações contextualizadas e apresentadas aos alunos em *PowerPoint,* mas não temporizado. Optei por uma entrevista em que o cálculo mental fosse não temporizado, primeiro porque já não estava a desafiar os alunos num contexto de aula em que por vezes estes o encaram como uma competição e segundo porque considerei necessário dar mais tempo aos alunos para perceber se o cálculo mental temporizado era ou não um aspeto crítico do *design*. A dinâmica da entrevista foi a seguinte: o aluno visualizava o diapositivo, resolvia a questão usando o tempo que necessitava para o fazer e depois explicava como tinha pensado. Apesar da questão central ser "como pensaste?" o decorrer da conversa e a maior ou menor dificuldade do aluno em explicitar o seu raciocínio ditou o tipo de questões a realizar pelo entrevistador. Só depois do aluno explicar como pensou é que se avança para uma nova questão.

#### 4.1.2.2.3. Fase III - Análise retrospetiva

O objetivo desta fase depende da intenção teórica do estudo. Tendo em conta que este se trata de um estudo de desenvolvimento (Nieveen, McKenney & Van den Akker, 2006) só uma análise retrospetiva permanente acerca do *design* e da sua implementação na prática, permite ajustamentos e refinamentos constantes do quadro teórico e da experiência de ensino através de um processo iterativo de análise de dados. Para garantir a credibilidade da análise dos dados todo este processo, desde a preparação à experimentação, deve estar devidamente documentado (Cobb & Gravemeijer, 2006), o se irá refletir em diversos capítulos. Assim, a análise retrospetiva ao estar presente em todo o processo de DR, da conceção à realização, não irá concentrar-se num único capítulo uma vez que esta foi realizada ao longo do estudo, em vários momentos e com diversos propósitos. Esta reflete-se no capítulo 5 - preparação, através da análise e reflexão do estudo preliminar e das dinâmicas inerentes, que permitiu construir a experiência de ensino; no capítulo 6 – experimentação, através da constante análise e reflexão, em conjunto com as professoras, acerca da experiência de ensino e da prestação dos alunos (em reuniões de preparação e reflexão pós-aula) que produziram contributos importantes para o refinamento da experiência; nos capítulos 7 e 8 onde analiso as estratégias e erros dos alunos, respetivamente com o intuito de responder às questões do estudo; e no capítulo 9 através da avaliação da experiência de ensino no que se refere ao *design* e sua realização. O quadro 5 ilustra, de certo modo, esta análise transversal que foi realizada ao longo do estudo e relaciona os instrumentos de recolha de dados com o objetivo da análise de dados.

A análise de dados requer por parte do investigador uma grande capacidade de organização, sistematização e classificação de materiais (transcrições de episódios de aula, notas de campo, artigos de jornal, dados oficiais, memorandos escritos pelos participantes, etc.) de acordo com o potencial de informação que contém (Bogdan & Biklen, 1994) e face aos objetivos do estudo. No caso específico do DR, Collins et al. (2004) alertam para os desafios que esta abordagem acarreta, nomeadamente, ao nível da quantidade de dados produzidos, que requerem uma análise cuidada, e a necessidade de comparação entre experiências realizadas no mesmo âmbito.

Tendo em conta a quantidade de dados recolhidos (26 vídeos de sala de aula, 37 áudios de reuniões de preparação/reflexão pós-aula e 32 entrevistas) aspetos relacionados com organização, sistematização de ideias, categorização entre outros, foram sendo acautelados ao longo do estudo através do visionamento dos vídeos e transcrição de alguns vídeos e áudios, à medida que estes foram sendo realizados. Estes visionamentos e transcrições apoiaram-me na análise preliminar de dados e na reflexão acerca de aspetos mais concetuais fazendo emergir a necessidade de uma permanente revisão de literatura.

Quadro 5. Relação entre os instrumentos de recolha de dados e objetivo da análise de dados.

<table>
<tr><th>Fase</th><th>Instrumento de recolha de dados</th><th>Objetivo da análise</th></tr>
<tr><td>Preparação</td><td><u>Estudo preliminar</u>:<br>Observação direta<br>Vídeo das aulas<br>Registos dos alunos<br>Notas de Campo da professora/investigadora<br>Entrevistas aos alunos<br><u>Ciclos de experimentação I e II:</u><br>Recolha documental (sobre alunos e planificações)</td><td>Compreender e descrever as estratégias e erros de cálculo mental dos alunos;<br>Compreender as dinâmicas de sala de aula inerentes à discussão de tarefas de cálculo mental<br>Planificar a experiência de ensino</td></tr>
<tr><td>Experimentação</td><td><u>Ciclos de experimentação I e II</u>:<br>Observação direta (aulas e reuniões de trabalho)<br>Registos dos alunos<br>Notas de campo da investigadora<br>Vídeos de aula<br>Áudios de reuniões (preparação e reflexão pós-aula)<br>Entrevistas (alunos e professoras)</td><td rowspan="2">Refletir acerca da realização da experiência de ensino aula a aula;<br>Analisar previamente as variáveis dependentes e independentes;<br>Analisar previamente estratégias e erros dos alunos.<br>Avaliar a experiência de ensino (design e realização);<br>Interpretar a influência das variáveis dependentes e independentes;<br>Responder às questões do estudo;<br>Avaliação formativa do ponto de vista da relevância, consistência, praticabilidade e efetividade;<br>Apresentar a proposta final de experiência de ensino;</td></tr>
<tr><td>Análise retrospetiva final</td><td></td></tr>
</table>

Nesta fase do estudo, concluí a transcrição na íntegra dos vídeos de sala de aula, algumas das entrevistas aos alunos e apenas o essencial das sessões de preparação e reflexão pós-aula e entrevistas às professoras, para posteriormente avaliar a experiência de ensino e dar resposta às questões do estudo:

- Que estratégias usam os alunos quando calculam mentalmente com números racionais positivos, em questões que envolvem as quatro operações aritméticas básicas?

- Que erros evidenciam no cálculo mental com números racionais positivos nas operações referidas?
- Como evoluem as estratégias de cálculo mental dos alunos ao longo da experiência de ensino?

Uma reflexão acerca da relevância, consistência, praticabilidade e efetividade do estudo e uma proposta final de experiência de ensino será igualmente contemplada no capítulo referente a conclusões e considerações finais.

A análise de conteúdo foi a técnica usada para analisar todo o material empírico tendo-a realizado em três fases (Bardin, 2004): pré análise, exploração do material e tratamento dos resultados, inferência e interpretação. A pré análise foi realizada à medida que ia transcrevendo todo o material áudio e vídeo bem como a escrita de artigos e comunicações em encontros nacionais e internacionais. Saliento o papel que teve a escrita de artigos e comunicações para encontros nacionais e internacionais na evolução das categorias de análise, por me permitir apresentar e discutir o meu trabalho na comunidade científica, recolhendo dai contributos essenciais para a minha reflexão e aperfeiçoamento da experiência. Esta fase de pré análise foi importante para o processo de construção e refinamento das categorias de análise (Anexos H e I) que previamente tinha elaborado a partir da revisão de literatura, mas que evoluíram durante a análise dos dados e me apoiaram na identificação das estratégias e erros dos alunos. Na perspetiva de Merriam (1998) a elaboração de categorias de análise é em grande parte um processo intuitivo, mas também sistemático, e tem por base as finalidades do estudo, as orientações do investigador e o conhecimento sentido e explicitado pelos participantes. Indica ainda que as categorias de análise devem refletir o propósito do estudo, ser exaustivas e mutuamente exclusivas (ou seja, uma determinada unidade dos dados deve corresponder a uma e uma só categoria), ser sensíveis aos dados recolhidos para que qualquer pessoa fora do estudo possa perceber a sua natureza, e ser conceptualmente congruentes para que um mesmo nível de abstração possa caracterizar todas as categorias desse nível. A criação de categorias de análise é uma parte fundamental na análise de dados pois facilita a sistematização e análise de informação recolhida em função dos objetivos do estudo.

Na fase de exploração do material, codifiquei as estratégias e erros dos alunos com o apoio do *software NVivo 10* para poder concretizar a terceira fase desta análise de conteúdo, ou seja, tratar e interpretar os resultados obtidos. Nesta fase final da análise de conteúdo foi realizada a triangulação dos dados, através do uso das múltiplas fontes de recolha usadas (observação participante, recolha documental, entrevistas, vídeos de aula, áudios de reuniões) para confirmar as conclusões emergentes cruzando informação proveniente das várias fontes (Merriam, 1998).

## 4.2. Participantes

Este estudo contempla a recolha de dados em duas turmas de escolas diferentes, uma escola no concelho de Sintra no ano letivo de 2011/12 e outra no conselho de Loures, em 2012/13. Esta opção prede-se com o facto de usar como metodologia o *DR*, o que implica a realização de vários ciclos de experimentação. Assim, realizei uma experiência de ensino na primeira escola, refinei-a e posteriormente voltei a realizá-la na segunda escola o que me permitiu continuar a aperfeiçoar a sequência de tarefas que criei. Seria desejável que um novo ciclo de experimentação ocorresse noutra escola, mas as condicionantes temporais inerentes a um trabalho de doutoramento não me permitiram realizar mais ciclos de experimentação. Assim, participam neste estudo duas professoras de Matemática do 2.º ciclo, eu própria no papel de investigadora e 39 alunos de duas turmas do 6.º ano.

### 4.2.1 A professora Margarida

No ano letivo de 2011/12 solicitei a colaboração da professora Margarida, uma colega com quem nos últimos anos tenho mantido bom relacionamento pessoal e profissional e com quem já participei em alguns projetos. Margarida é professora do 2.º ciclo, licenciou-se em Economia, na área de Planeamento, em 1980, começando de imediato a lecionar. Em 1985 fez a profissionalização em Matemática e Ciências da Natureza, embora esteja mais ligada à Matemática do que às Ciências. Fez mestrado em Didática da Matemática em 1997 e tem participado em diversos projetos nacionais no âmbito da Matemática, dos quais destaco os projetos de experimentação dos Programas de Matemática do 2.º ciclo de 1991 e de 2007. Tem experiência na formação contínua de professores. Considera que o desenvolvimento profissional é essencial na sua profissão e assume que a sua participação neste estudo lhe pode proporcionar momentos de aprendizagem e reflexão.

### 4.2.2. A professora Laura

No ano escolar de 2012/13 convidei Laura a colaborar neste estudo. Laura é professora do 2.º ciclo na variante de Matemática e Ciências da Natureza. Começou a lecionar em 2000 e fez o mestrado em Didática das Ciências em 2006. Participou no programa nacional de formação contínua de Matemática para professores do 2.º ciclo, como formanda, sendo este um marco importante para o seu desenvolvimento profissional enquanto professora de Matemática. Tem experiência na formação inicial e contínua de professores nas áreas da Didática das Ciências e da Matemática e esteve envolvida no Programa de Acompanhamento do Plano da Matemática. Atualmente encontra-se a realizar doutoramento em Didática da Matemática. É uma professora com quem mantenho igualmente um bom relacionamento pessoal e profissional e cujo percurso profissional se cruzou com o meu, primeiro durante o mestrado e agora no doutoramento. Laura mostrou disponibilidade imediata para colaborar e realizar a experiência de ensino numa das suas turmas cujas características são diferentes das da turma de Margarida. Momentos de aprendizagem e reflexão foram aspetos que motivaram Laura a participar neste estudo.

### 4.2.3. A turma de Margarida

A turma de Margarida, que passarei a designar por turma "M", era constituída por 22 alunos, dos quais 20 participaram no estudo (oito do sexo feminino e doze do sexo masculino) tendo ficado excluídos dois alunos diagnosticados como tendo necessidades educativas especais. Dadas as dificuldades básicas reveladas por estes dois alunos na disciplina de Matemática, Margarida e eu decidimos não os incluir no estudo.

A turma transitou quase integralmente do 5.º para o 6.º ano verificando-se apenas a inclusão de dois novos alunos. De acordo com documentos disponibilizados pela diretora de turma, os alunos provêm de um meio sociocultural médio e as habilitações académicas dos pais oscilam entre o 4.º ano e a licenciatura. A Matemática é a disciplina preferida de, pelo menos, oito alunos e apenas dois manifestam ter dificuldades na disciplina. No final do 5.º ano, o aproveitamento a Matemática dos alunos que transitaram, situou-se principalmente nos níveis 4 e 5 (nove alunos com nível 5; seis alunos com nível 4 e três alunos com nível 3). No final do 6.º ano, a maioria dos alunos obteve nível 3 ou 4 (sete alunos com nível 3; seis alunos com nível 4; cinco alunos com nível 5 e dois alunos com nível 2).

A experiência de ensino sobre cálculo mental com números racionais foi realizada na turma M, entre fevereiro e maio de 2012. Este foi o primeiro ciclo de experimentação. Antes de iniciar a experiência de ensino foi realizada uma tarefa de diagnóstico no dia 28 de setembro de 2011 em duas das turmas de 6.º ano de Margarida. Esta sessão de diagnóstico foi realizada na mesma lógica em que iria ser realizada a experiência de ensino e foi conduzida por Margarida com o meu contributo, nomeadamente ao nível do questionamento dos alunos. Era meu objetivo conhecer os alunos e perceber a forma como reagiriam a tarefas de cálculo mental com números racionais para, posteriormente, em conjunto com a professora, decidir qual a turma onde iriamos realizar o estudo para assim construir as tarefas.

Para a tarefa de diagnóstico eu e Margarida decidimos que tarefas de cálculo mental envolvendo adição e subtração com números racionais na representação decimal seriam as mais adequadas pois esta representação era a que estava a ser usada no momento na abordagem ao tópico de Geometria (revisão e aprofundamento de perímetros de figuras planas). Nesta tarefa de diagnóstico os alunos das duas turmas apresentaram alguma diversidade de estratégias no cálculo mental com números racionais na representação decimal. As estratégias basearam-se no uso de números de referência, na decomposição e na mudança de representação operando com números racionais na representação decimal como se fossem números naturais. Surgiram indícios de dificuldades na linguagem matemática oral, por exemplo, com leitura incorreta de numerais decimais e os erros resumiram-se a operar com décimas e centésimas sem considerar o valor posicional dos algarismos e ao uso indevido de propriedades das operações (como a comutatividade na subtração).

Após análise e reflexão acerca da tarefa de diagnóstico realizada nas duas turmas, foi selecionada a turma M por ter apresentado maior diversidade de estratégias no momento da discussão coletiva e que, apesar de também manifestar algumas dificuldades na comunicação matemática oral, se evidenciou pela positiva relativamente à outra turma. Sendo este o primeiro ciclo de experimentação, considerei importante selecionar uma turma que desse algumas garantias de que iriam surgir estratégias diversificadas e de que as explicações iriam ser suficientemente claras para que eu pudesse proceder à sua análise e interpretação.

### 4.2.4. A turma de Laura

A turma de Laura que passarei a designar por turma “L” era constituída por 20 alunos. Destes, 19 participaram no estudo (oito do sexo feminino e onze do sexo masculino), uma vez que um aluno com necessidades educativas especais não frequentava a maioria das aulas com a turma, em especial a aula de Matemática. É uma turma com alguma heterogeneidade não só a nível cultural, mas em termos de aproveitamento. A maioria dos alunos é de nacionalidade portuguesa (catorze alunos de nacionalidade portuguesa, um aluno são tomense, um cabo verdiano, um angolano, um moçambicano, um brasileiro). De acordo com documentos disponibilizados pela diretora de turma, os alunos provêm de um meio sociocultural médio/baixo e as habilitações académicas dos pais oscilam entre o 4.º ano e o secundário, sendo que, uma parte dos pais diz desconhecer as habilitações que possui.

A turma sofreu alterações na sua constituição do 5.º para o 6.º ano, uma vez que 8 dos 19 alunos (cerca de 42%) que participaram no estudo ficou retido no 6.º ano no ano letivo de 2011/12. A Matemática é uma disciplina onde os alunos revelam ter dificuldades uma vez que no ano letivo anterior 14 dos 19 alunos (cerca de 74%) beneficiou de apoio à disciplina. No final do 5.º ano, o aproveitamento a Matemática dos alunos que transitaram, situou-se principalmente nos níveis 3 e 4 (quatro alunos com nível 4; cinco alunos com nível 3 e dois alunos com nível 2), sendo que os restantes alunos da turma obtiveram nível 2 no 6.º ano estando a frequentar este ano de escolaridade pela segunda vez. No final do 6.º ano, a maioria dos alunos obteve nível 2 ou 3 (dois alunos com nível 4; sete alunos com nível 3; dez alunos com nível 2).

A experiência de ensino sobre cálculo mental com números racionais foi realizada na turma L, entre Janeiro e maio de 2013. Este foi o segundo ciclo de experimentação. Antes de iniciar a experiência de ensino foi realizada uma tarefa de diagnóstico no dia 13 de dezembro de 2012 na única turma do 6.º ano de Laura. Esta sessão de diagnóstico foi realizada na mesma lógica em que iria ser realizada a experiência de ensino e foi conduzida por mim, a pedido de Laura, com o seu contributo. Era meu objetivo conhecer os alunos da turma e perceber a forma como iriam reagir a tarefas de cálculo mental com números racionais, que estratégias usariam e como as iriam comunicar na sala de aula, à semelhança do que fiz com a turma de Margarida.

No momento em que realizámos a tarefa de diagnóstico, Laura estava a abordar as operações multiplicação e divisão de frações, pelo que coloquei a hipótese da tarefa de diagnóstico ser com a representação fracionária e não decimal, para que esta primeira experiência com cálculo mental com números racionais não estivesse muito distante daquilo que os alunos estavam a realizar na aula de Matemática. Contudo, a professora considerou mais adequado usar a adição e subtração de números racionais na representação decimal, não são só porque também tinha sido esta a opção com a turma de Margarida, mas porque a representação decimal é mais familiar para os alunos do que a fracionária uma vez que foi mais trabalhada no 1.º ciclo.

Nesta tarefa de diagnóstico os alunos da turma L apresentaram alguma diversidade de estratégias no cálculo mental com números racionais na representação decimal. As estratégias basearam-se no uso de regras memorizadas, na decomposição de números, na mudança de representação de decimal para fração ou para número natural (operando com números racionais na representação decimal como se fossem números naturais). Verificaram-se algumas tentativas de uso de estratégias de compensação, mas nem sempre com sucesso. Relativamente à comunicação, os alunos apresentaram uma linguagem matemática oral confusa, por vezes incorreta, como por exemplo, na leitura de numerais decimais. Os erros manifestados passaram por operar com décimas e centésimas sem considerar o valor posicional dos algarismos (um erro muito frequente), erros de cálculo e o uso indevido de propriedades das operações (como a comutatividade na subtração) apenas na parte decimal do numeral decimal quando a parte decimal do subtrativo possui um valor superior à parte decimal do aditivo (e.g., na operação 7,2-0,9 o aluno calcula 9-2).

## 4.3. Questões éticas

Os aspetos éticos são de grande importância numa investigação em educação assumindo especial importância num estudo com uma abordagem qualitativa (Lüdke &

André, 1986; Merriam, 1998). A *American Educational Research Association* (AERA) publicou em 2011 um código de ética onde enumera um conjunto de princípios que devem orientar qualquer investigador em educação e que se referem a questões relacionadas com: (i) competência profissional; (ii) integridade; (iii) responsabilidade profissional, científica e escolar; (iv) respeito pela diversidade, direitos e dignidade dos participantes na investigação; e (v) responsabilidade social. Estes princípios relacionam-se entre si e centram-se na atitude do investigador perante a investigação.

A preocupação com a competência profissional tem-me levado a participar em diversas oportunidades de formação, entre elas a formação avançada. Um aspeto essencial da competência profissional é a integridade do investigador que associo a preservar e valorizar a honestidade, justiça e respeito para com aqueles que me acompanham no processo de investigação. Outro aspeto essencial é a responsabilidade não só profissional, científica e escolar, mas também social. Assumo responsabilidade na preparação e realização da investigação, na divulgação e partilha de ideias e resultados junto da comunidade cientifica e, sociedade em geral, e na produção de conhecimento científico e académico que possa ser útil no âmbito da educação. Sempre que for oportuno, participarei em encontros e outras iniciativas onde possa divulgar e discutir o meu trabalho, com o intuito de recolher contributos para melhorar e partilhar conhecimento útil para novas investigações. Esta responsabilidade requer igualmente da minha parte respeito pela diversidade, direitos e dignidade dos participantes na investigação.

Lüdke e André (1986) referem-se também a questões éticas, salientando que as interações entre investigador e participantes suscitam questões relacionadas com o consentimento informado e o anonimato dos participantes. Assim, é importante que todos os intervenientes estejam informados do propósito, objetivos e condições em que se realiza o estudo e que participem nele em consciência e por sua livre vontade. Neste sentido, pedi autorização, por escrito, para realizar este estudo e gravar em vídeo episódios de sala de aula e em áudio sessões de trabalho com a professora. O pedido foi dirigido ao diretor de cada um dos agrupamentos de escolas, das escolas envolvidas (Anexo J) e aos encarregados de educação dos alunos (Anexo K) que participaram. Previamente, já tinha auscultado a opinião das professoras e dos alunos quanto à disponibilidade para colaborarem nesta investigação. Todos os intervenientes aceitaram colaborar no estudo. Além disso, o anonimato dos participantes é assegurado através do uso de nomes fictícios, tendo o especial cuidado em não divulgar informações que os identifiquem.

Outra questão relacionada com o investigador que deve ser considerada num estudo qualitativo é a subjetividade (Lüdke & André, 1986). A este propósito procuro clarificar, ao longo desta investigação, o meu ponto de vista relativamente ao assunto em estudo, de que forma a investigação mudou ou manteve a minha visão inicial e quais os critérios que considerei para selecionar os participantes e analisar determinados dados em detrimento de outros. Merriam (1998) realça igualmente a importância de justificar o caminho seguido pelo investigador na análise e divulgação dos dados uma vez que esta escolha depende muito dele e dos objetivos de traçou para o estudo.

## 4.4. Credibilidade do estudo

Na perspetiva de Goetz e LeCompte (1984), a credibilidade de um estudo pode ser ameaçada por falta de fiabilidade e de validade interna e externa. Estes são critérios que conferem credibilidade a um estudo e que o investigador deve considerar. Em termos globais, a fiabilidade relaciona-se com o facto de saber se as descobertas científicas realizadas vão ao encontro das já existentes e a validade tem a ver com a precisão dessas descobertas. O facto da recolha de dados ocorrer em dois momentos distintos, um em 2012 numa escola e outro em 2013 noutra escola diferente, uma sequência de tarefas semelhantes na sua essência mas ajustada às diferentes realidades do público-alvo, vai permitir verificar se os resultados produzidos são semelhantes e em que aspetos se relacionam ou divergem, contribuindo para um estudo mais fidedigno.

A validade interna prende-se com o facto das conclusões apresentadas se relacionarem de forma autêntica com a realidade dos participantes. A validade externa refere-se ao grau de comparação possível entre as conclusões obtidas e outros casos já existentes. Merriam (1998) considera que existem seis princípios básicos que contribuem para aumentar a validade interna de um estudo: a triangulação através do uso de múltiplas fontes de recolha de dados para confirmação de resultados; a interpretação de resultados por parte dos participantes de onde provêm esses resultados; observação prolongada no tempo para confirmar a validade dos resultados; exame dos resultados por parte dos pares, com o intuito de angariar comentários; colaboração envolvendo os participantes em todas as fases do estudo e clarificação das ideias e orientações teóricas do investigador no início do estudo. Assim, no que respeita à validade interna e tendo em atenção o que refere Merriam (1998), procuro: (i) recorrer à triangulação de dados provenientes das várias fontes de recolha de dados e recolhidos durante dois anos letivos; (ii) envolver as professoras na experiência de ensino, desde a preparação até à sua reflexão partilhando toda a informação teórica que possuo e que possa ser útil para se apropriarem de todo o processo; (iii) analisar e refletir acerca de episódios de aula, em conjunto com as professoras que participam no estudo, com o intuito de recolher contributos relevantes ao nível da prestação dos alunos; e (iv) partilhar relatos de aula e de sessões de trabalho com as professoras, para que estas possam validar a informação descrita. Procurando acautelar a validade externa, e uma vez que este estudo tem por base outros estudos realizados no mesmo âmbito, procuro enumerar pontos de contato e de divergência entre o meu trabalho e outros já realizados.

Ponte (2006), para além de contemplar os critérios referidos por Goetz e LeCompte (1984), considera ainda importante a validade conceptual. Esta diz respeito à caraterização de conceitos-chave e de critérios operacionais para classificar dados de forma a exemplificar conceitos. Neste estudo, a validade concetual é assegurada pela construção de categorias de análise para a análise das estratégias de cálculo mental dos alunos e erros cometidos por estes, elaboradas em função da literatura em que me baseei para este estudo e da análise dos dados.

Contudo, tal como refere Ponte (2006), numa investigação qualitativa as questões de credibilidade nunca são completamente resolvidas uma vez que o investigador desempenha um papel fundamental em todas as etapas, pelo que o saber construído vive muito da sua perspetiva teórica e estilo pessoal.

A par destes critérios de credibilidade, Goetz e LeCompte (1984) referem ainda mais quatro critérios que ajudam a conferir mérito a uma investigação: apropriação, clareza, abrangência e relevância. Nesta perspetiva, o estudo que me proponho realizar é apropriado uma vez que existe pouca investigação internacional e nenhuma investigação nacional especificamente sobre cálculo mental com números racionais, sendo o meu trabalho mais um contributo para a produção de conhecimento. Espero que os resultados me permitam responder às questões do estudo de forma clara e que possam dentro do tema, ser suficientemente abrangentes, dai a opção por analisar as estratégias de cálculo mental dos alunos em função das representações dos números racionais. Espero igualmente que este estudo seja um contributo significativo para o ensino e aprendizagem do cálculo mental na disciplina de Matemática.

# Capítulo 5

# Preparação

Neste capítulo apresento o trabalho realizado na fase de preparação do *design research*. Descrevo o estudo preliminar e suas principais conclusões e implicações para a construção da experiência de ensino, bem como aspetos relativos à preparação desta experiência que serve de base aos dois ciclos de experimentação, como é o caso da conjetura inicial de ensino-aprendizagem, quadro teórico, proposta inicial de tarefas, objetivos de aprendizagem visados e condução da experiência de ensino.

## 5.1. O estudo preliminar

A realização do estudo preliminar teve como propósito construir um protótipo da experiência de ensino, compreender as estratégias e os erros dos alunos do 5.º ano no cálculo mental com números racionais positivos bem como as dinâmicas relativas à condução da discussão das tarefas de cálculo mental na sala de aula. Este estudo preliminar apoiou igualmente a formulação de conjeturas de ensino-aprendizagem (teoria local de instrução e intenção teórica, de Gravemeijer & Cobb, 2006).

### 5.1.1 Protótipo da experiência de ensino

Durante o 3.º período do ano letivo de 2010/11 realizei um estudo-piloto na disciplina de Matemática em duas das minhas turmas do 5.º ano para detetar aspetos da prática de cálculo mental dos alunos potencialmente importantes para a planificação da experiência de ensino a desenvolver e a aperfeiçoar nos dois ciclos de experimentação a realizar em 2012 e em 2013. Partindo da conjetura de que um trabalho sistemático na sala de aula, devidamente orientado, pode promover o desenvolvimento do cálculo mental, pretendia compreender como os alunos reagiam à proposta de tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos e de resolução de problemas, com números racionais envolvendo adição, subtração e cálculo de percentagens, centrada na discussão das suas estratégias e erros, e saber se isso lhes permite desenvolver estratégias de cálculo mental e clarificar erros, bem como perceber qual o papel do professor no desenvolvimento do cálculo mental dos alunos. Enquanto professora da turma, fui uma participante ativa neste estudo em conjunto com 35 alunos de duas turmas do 5.º ano onde já tinham sido lecionadas as operações de adição e subtração com números racionais e o cálculo de percentagens.

Sendo o cálculo mental com números racionais um campo de investigação novo para mim, para a planificação da experiência de ensino deste estudo preliminar baseei-me em diversos autores nacionais e internacionais que já realizaram e publicaram estudos sobre esta temática. Assim, tive em atenção aspetos como os níveis de cálculo mental (Callingham & Watson, 2004), as estratégias de cálculo mental com números racionais que os alunos podem mobilizar (Caney & Watson, 2003; Wolman, 2006) e os erros mais comuns que cometem quando trabalham com números racionais (e.g., Galen et al., 2008; Lamon, 2006; Monteiro & Pinto, 2005, 2007; Parker & Leinhardt, 1995).

O protótipo da experiência de ensino era constituído por seis tarefas de cálculo mental (Anexo D) que foram realizadas semanalmente durante 15 a 20 minutos no início da aula de Matemática. Destas, cinco tarefas eram em contexto matemático (expressões) com dez questões de cálculo mental cada e uma tarefa tinha oito situações contextualizadas relacionados com os tópicos que tinham sido abordados ou estavam a ser abordados na aula (números racionais, organização e tratamento de dados, perímetros de figuras planas). Estas tarefas envolviam adição e subtração de números racionais nas suas diferentes representações e cálculo de percentagens. A tarefa 1 envolvia apenas frações, a 2 frações e numerais decimais, a 3 e 4 apenas numerais decimais, a 5 percentagens e a 6 situações contextualizadas envolvendo as três representações.

As tarefas foram projetadas com recurso a um *PowerPoint* com diapositivos temporizados, tendo os alunos 15 segundos para resolver cada expressão ou situação contextualizada. Em cada tarefa, após a resolução das quatro (no caso da tarefa 6) ou cinco primeiras questões discutiram-se, em grande grupo, as estratégias usadas pelos alunos, sistematizaram-se oralmente essas estratégias e só depois se realizou a segunda parte da tarefa seguindo-se um novo momento de discussão.

### 5.1.2. Recolha e análise de dados

Os dados foram recolhidos recorrendo à gravação áudio e vídeo de episódios de aula e entrevistas a oito alunos. A opção por gravar episódios de aula teve como intuito permitir uma análise e reflexão mais cuidada acerca dos momentos de discussão de estratégias dos alunos na sala de aula. Sendo eu a professora destes alunos, alguns aspetos interessantes da aula são difíceis de percecionar no momento pois as minhas preocupações como professora estão principalmente centradas na gestão da discussão das estratégias e erros dos alunos. A gravação das entrevistas também me permitiu analisar de forma mais cuidada, a prestação destes alunos fora da sala de aula. A seleção dos oito alunos para as entrevistas teve em conta dois critérios: (i) número de cálculos realizados corretamente ao longo da experiência de ensino; e (ii) a participação ativa nas discussões na sala de aula. As entrevistas (Anexo L) estiveram de acordo com as tarefas desenvolvidas na sala de aula, sendo constituídas por nove exercícios e três problemas de cálculo mental envolvendo as três representações dos números racionais.

Para a análise de dados, visionei os episódios de aula para identificar o número e o tipo de estratégia de cálculo mental que os alunos referem nos momentos de discussão e os erros que cometem quando calculam mentalmente. A Tabela 1 mostra o número de alunos que referiu cada uma das estratégias indicadas durantes as seis sessões (S1 a S6) em que se realizaram tarefas de cálculo mental e a Tabela 2 o número de alunos que manifestou um determinado tipo de erro no primeiro momento de discussão (M1) e no segundo momento de discussão (M2). Posteriormente, analisei as entrevistas dos oito alunos tendo em vista perceber se surgiam novas estratégias ou se a comunicação matemática clarificava os raciocínios usados. Usei como categorias de análise as estratégias de cálculo mental (Anexo B) referidas por Caney e Watson (2003).

### 5.1.3. Discussão de resultados

Começo por identificar o número de estratégias de cálculo mental referidas pelos alunos nos momentos de discussão na aula para posteriormente analisar nos diferentes tipos de tarefas usadas, o tipo de estratégia apresentada bem como os erros que os alunos manifestam quando apresentam a sua estratégia de cálculo mental.

Tabela 1. Número de alunos que referiu cada uma das estratégias nas tarefas de cálculo mental.

| | **Tarefas** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Estratégias dos alunos** | **Frações** | **Frações/decimais** | **Decimais** | | **Percentagens** | **Resolução de problemas** |
| | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 |
| Mudança de operação | | | 1 | 3 | | |
| Mudança de representação | | 5 | 10 | 8 | 4 | |
| Utilização de equivalências | 5 | 1 | | | | 1 |
| Utilização de factos conhecidos | 2 | 5 | | 1 | | 3 |
| Repetição da operação adição/multiplicação | | | | 1 | 5 | 2 |
| Estabelece ligações | | | 2 | 3 | 3 | 5 |
| Trabalho com partes de um segundo número | | | 3 | 1 | | |
| Trabalho da esquerda para a direita | | | 5 | | | |
| Utilização de imagens mentais | | 1 | | | | 1 |
| Utilização de formas mentais dos algoritmos | 6 | 1 | 1 | | | |
| Utilização de regras memorizadas | | | | | 1 | |

*Número de estratégias apresentadas*. Em termos globais, a Tabela 1 mostra que na tarefa envolvendo situações contextualizadas (S6) houve um menor número de alunos a apresentar uma estratégia para a resolução das situações. Note-se que cada tarefa envolvendo uma situação contextualizada foi primeiro lida em voz alta por mim, tendo depois os alunos 15 segundos para a resolver. O número de estratégias apresentadas foi muito inferior ao registado em outras questões, embora este número, depois da discussão da primeira parte da tarefa na sala de aula, tivesse aumentado ligeiramente. A seguir às situações contextualizadas, as tarefas onde os alunos apresentaram menos estratégias foram as que envolviam o cálculo de percentagens, havendo um grande número de alunos com respostas em branco na folha de registo, seguindo-se as tarefas envolvendo a representação fracionária. Os alunos apresentaram um maior número de estratégias em questões envolvendo numerais decimais.

*Estratégias nos diferentes tipos de tarefa.* 1. A partir da análise da Tabela 1, é possível verificar que na tarefa que envolvia apenas a representação fracionária (S1), os alunos usaram no cálculo mental formas mentais dos algoritmos escritos e equivalência de frações. Após a discussão o reconhecimento de metades apareceu como um facto numérico. Nesta tarefa, e de acordo com a Tabela 2, os erros mais comuns foram a adição ou subtração de numeradores e denominadores, subtração de numeradores e divisão de denominadores e subtração de numeradores com escolha do maior denominador para a fração resultante.

2. Na tarefa que envolvia frações e numerais decimais (S2), os alunos, para além das estratégias que usaram na tarefa anterior, recorreram também a imagens mentais das representações de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ e à mudança da representação fracionária para decimal e vice-versa, possivelmente por consequência das duas representações surgirem em conjunto uma vez que no cálculo envolvendo apenas frações esta estratégia não surgiu. Um erro frequente na operação com frações foi a adição de numeradores com o objetivo de obter 10 associando-o à unidade, relacionando erradamente o todo com as partes que o constituem (e.g., na operação $\frac{6}{12}+?=1$ alguns alunos responderam $\frac{4}{12}$ porque $6+4=10$). Este erro foi mais frequente na tarefa em que se usou a representação fracionária em conjunto com a decimal (S2).

3. Na primeira tarefa que envolvia apenas numerais decimais (S3), os alunos usaram preferencialmente a mudança de representação em que consideraram os numerais decimais como números naturais referentes a $\frac{10}{100}$ (e.g., $0{,}18$ foi usado no cálculo como 18 e $0{,}2$ como $20$), trabalharam com parte de um dos números envolvidos na operação ou então da esquerda para a direita e relacionaram o todo com as partes que o constituem. Poucos foram os alunos que usaram a imagem mental do algoritmo escrito como estratégia. Na segunda tarefa com numerais decimais (S4), os alunos passaram também a utilizar nas suas estratégias a operação inversa, a utilização de factos numéri-

cos com recurso a dobros e subtrações sucessivas. Dois alunos recorreram às propriedades das operações (e.g., para calcular o número desconhecido na operação $1{,}4 - ? = 0{,}5$, efetuam $1{,}4 - 0{,}5 = 0{,}9$).

Tabela 2. Número de alunos que manifestou erros, nas tarefas de cálculo mental.

| | **Tarefas** | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Erros dos alunos** | **Frações** | | **Frações/ decimais** | | **Decimais** | | | | **Percentagens** | | **Resolução de problemas** | |
| | S1 | | S2 | | S3 | | S4 | | S5 | | S6 | |
| | M1 | M2 | M1 | M2 | M1 | M2 | M1 | M2 | M1 | M2 | M1 | M2 |
| Leitura incorreta dos números | | | | | 2 | | 1 | | | | | |
| Não respeita o valor posicional | | | | | 6 | 2 | 1 | 2 | | | | |
| Converte erradamente um número racional nas suas diferentes representações | | | 2 | | | | | | | | | |
| Compara erradamente números | | | | | | | | | | | | |
| Comete erros de cálculo | | | | | 2 | 3 | 1 | 1 | | | | |
| Usa uma propriedade das operações que não se aplica | | | | | | 1 | | | | | | |
| Adiciona/subtrai numeradores e denominadores | 3 | 2 | | | | | | | | | 1 | |
| Relaciona erradamente o todo com as partes que o constituem | 1 | 2 | 4 | | | | 1 | | 1 | 1 | 2 | 1 |
| Opera com percentagens como se fossem números naturais, ignorado o sinal % | | | | | | | | | | 3 | 1 | |

Da primeira para a segunda tarefa, envolvendo apenas com numerais decimais, os alunos passaram a usar estratégias mais complexas optando alguns deles por recorrer a factos e a relações numéricas (e.g., para calcular $1{,}7 - ? = 0{,}8$ a aluna considerou que $8 + 8 = 16$ e $16 + 1 = 17$ logo $8 + 1$ será o resultado por isso $0{,}9$. Mudou de representação e usou o conhecimento que tinha sobre dobros). Um dos erros centrou-se na adição/subtração de numerais decimais sem considerarem o valor posicional dos algarismos. Este erro pode estar relacionado com a leitura errada que os alunos fazem dos numerais decimais, não evidenciando o valor posicional (e.g., 0,5 é lido como "zero virgula cinco" e não "cinco décimas"). Muitas vezes iniciam corretamente uma estratégias, mas cometem pequenos erros ou de cálculo ou de colocação da vírgula na apresentação do resultado final. Algumas vezes a falta de concentração leva-os a adicionar quando a questão indica uma subtração.

4. No cálculo mental com percentagens (S5), as estratégias dos alunos centraram-se na mudança de representação, quando estão envolvidos números de referência (e.g., $50\% = \frac{1}{2}; 25\% = \frac{1}{4}; 20\% = \frac{1}{5}$), na repetição da operação (e.g., recurso a metade para calcular $50\%$, a metade de metade para calcular o $25\%$ e a metade mais metade de metade para o caso do $75\%$) e na relação parte- todo. Poucos foram os alunos que usaram regras memorizadas como o caso da multiplicação por uma décima. Alguns recorreram ainda à combinação de várias estratégias como a mudança de representação seguida da relação parte-todo (e.g., para calcular $20\%$ de 25 uma aluna considerou que: "se $20\%$ é $\frac{1}{5}$ quantas vezes preciso do 5 para ter 25"). Os erros cometidos relacionam-se com a falta de compreensão do sinal "%", ignorando-o e adicionando ou subtraindo os números que visualizam na questão como se fossem números naturais.

5. Por fim, na tarefa envolvendo situações contextualizadas (S6) com as três representações dos números racionais, as estratégias apresentadas pelos alunos passaram essencialmente pela relação parte-todo, utilização de factos numéricos (metades) mas também pela utilização de equivalências, de imagens mentais das representações de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ ou repetição de uma operação para calcular metade de um número seguido novamente do cálculo de metade da metade desse número. Nesta tarefa, as dificuldades foram mais notórias do que os erros, nomeadamente a dificuldade de interpretação da situação ou a decisão relativamente à operação adequada para a resolver. Contudo, foi possível verificar que alguns alunos relacionaram erradamente a parte-todo, subtraíram numeradores e denominadores na adição/subtração de frações e operaram com percentagens como se fossem números naturais, ignorando o significado do sinal "%".

### 5.1.4. Conclusões do estudo preliminar

Deste estudo emergiram vários aspetos relativamente ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos e aos erros por estes cometidos. Assim, evidencia-se que os alunos, quanto mais trabalham cálculo mental com números racionais, mais estratégias conseguem mobilizar e menos erros cometem. Estes resultados reforçam a conjetura inicial de que um trabalho sistemático na sala de aula, devidamente orientado, pode promover o desenvolvimento do cálculo mental dos alunos.

Este desenvolvimento da capacidade de cálculo mental dos alunos verificou-se essencialmente nos números racionais na representação decimal em que os alunos realizaram duas tarefas apenas com esta representação e uma envolvendo decimais e frações. Em todas as outras representações foi apenas realizada uma tarefa o que poderá não ser suficiente para percecionar a evolução das estratégias dos alunos. Ao longo das três tarefas envolvendo numerais decimais, as estratégias dos alunos foram sendo mais complexas verificando-se o desaparecimento de alguns erros, nomeadamente no que se refere à relação parte-todo. Estas foram as tarefas onde os alunos mais participaram e onde apresentaram um maior número de estratégias, talvez pela semelhança que têm com os números naturais, conjunto numérico com que trabalham desde o 1.º ciclo.

Em comparação com as verificadas na representação decimal, verifica-se que as estratégias apresentadas pelos alunos são em menor número nas tarefas envolvendo as outras representações. A reduzida diversidade de estratégias nas tarefas envolvendo percentagens pode estar associada ao facto de esta ter sido uma das últimas representações dos números racionais a ser abordado na aula de Matemática e, por isso, não estar devidamente consolidada. A tarefa envolvendo apenas a representação fracionária foi a primeira desta experiência de ensino o que pode ter causado alguns constrangimentos nos alunos no que se refere à dinâmica do dispositivo e da discussão na sala de aula. Assim, o número de estratégias apresentadas pelos alunos pode não estar relacionado com o uso desta representação, uma vez que a seguir, quando resolveram questões envolvendo frações e numerais decimais os resultados foram melhores que os anteriores. Deste modo, a origem do desempenho dos alunos pode estar no facto de ter sido a primeira experiência de cálculo mental que tiveram com esta dinâmica de trabalho. Finalmente, o fraco desempenho dos alunos na tarefa envolvendo situações contextualizadas pode estar relacionado com dificuldades de interpretação dos alunos e da relação entre o contexto e o cálculo a efetuar. Esta é uma componente que McIntosh et al. (1992) associam ao desenvolvimento do sentido de número. Assim, futuramente, em tarefas envolvendo situações contextualizadas, os alunos, numa primeira fase, deverão ter mais do que 15 segundos para realizar o cálculo, uma vez que na discussão percebi que alguns não tinham respondido porque não conseguiram completar o raciocínio dentro do tempo estabelecido.

Os momentos de discussão revelaram-se importantes para os alunos partilharem e interiorizarem estratégias, detetarem e corrigirem alguns erros e validarem as respostas dos colegas. Na verdade, muitos foram os alunos que, embora não tendo apresentado resposta ou tendo-o feito de forma incorreta, no momento da discussão detetaram o seu próprio erro e partilharam estratégias de cálculo com a turma. Pelo seu lado, o questionamento do professor ajudou os alunos a melhorar a comunicação matemática uma vez que a dificuldade na verbalização de estratégias de cálculo mental por parte destes foi diminuindo gradualmente ao longo da experiência.

Nas entrevistas, os alunos usaram estratégias semelhantes às que apresentaram na discussão na sala de aula e continuaram a manifestar dificuldades na resolução de situações contextualizadas e em questões envolvendo frações e percentagens. O que surgiu de novo foi o facto de dois dos alunos entrevistados terem usado um registo intermédio em papel na resolução de uma situação, o que não tinha acontecido na aula e um terceiro, após o questionamento do professor, baseou a validação do seu raciocínio numa estimativa, o que nunca tinha acontecido antes. Nas entrevistas, o questionamento direto do professor levou os alunos a chegarem a uma estratégia de resolução para algumas das questões que não tinham respondido inicialmente. Uma das vantagens da entrevista é a possibilidade do aluno estar mais concentrado para efetuar o cálculo, mas perde-se a riqueza do confronto de ideias entre alunos, que se verifica na discussão em grande grupo.

### 5.1.5. Implicações para a preparação da experiência de enino

Deste estudo preliminar emergem diversos aspetos a ter em conta na preparação e condução da experiência de ensino a realizar nos ciclos de experimentação I e II que se relacionam não só com a definição da conjetura de ensino-aprendizagem mas com a construção de uma experiência de ensino mais completa que permita perceber a evolução das estratégias e erros dos alunos. Assim, este estudo preliminar fez emergir a necessidade de ter como ponto de partida uma conjetura de ensino-aprendizagem mais específica que evidencie as características das tarefas e as dinâmicas de sala de aula que possam contribuir para o desenvolvimento de estratégias e a clarificação de erros dos alunos. Considerei assim necessário construir uma experiência de ensino que contemple várias tarefas com a mesma representação de um número racional ou várias representações em simultâneo para potenciar o uso de estratégias diferenciadas por parte dos alunos e permitir revisitar representações e relações numéricas ao longo da experiência. Na minha perspetiva, este aspeto irá permitir fortalecer o trabalho com a representação percentagem uma vez que será trabalhada em conjunto com a representação fracionária e decimal. A resolução de situações contextualizadas deve merecer um trabalho mais intenso com ênfase na interpretação e com mais tempo para a sua resolução. A discussão na sala de aula deve ser cuidadosamente preparada pelo professor antecipando-se estratégias e erros dos alunos, com a aposta num questionamento que possa contribuir para o desenvolvimento de estratégias diferenciadas ao longo da experiência e para promover a melhoria da comunicação matemática dos alunos. As entrevistas não acrescentaram elementos significativos aos obtidos na sala de aula. Contudo, poderão continuar a ser um dos instrumentos de recolha de dados optando possivelmente por eventuais alterações na seleção de alunos a entrevistar.

## 5.2. Preparação da experiência de ensino

### 5.2.1. Aspetos gerais

O tema Números e Operações ocupa uma grande parte do programa de Matemática permitindo estabelecer conexões com os temas Organização e Tratamento de Dados (OTD), Álgebra e Geometria. É nesta perspetiva que em termos gerais a experiência de ensino é planificada, prevendo momentos de trabalho com cálculo mental, em sala de aula, ao longo de cerca de quatro meses, primeiro na escola de Margarida no ano de 2012 (ciclo de experimentação I) e posteriormente em 2013, na escola de Laura (Ciclo de experimentação II). A planificação da experiência de ensino que está na base destes dois ciclos de experimentação realizou-se entre novembro e dezembro de 2011. Esta planificação foi influenciada pelas leituras que realizei durante o ano de 2011 sobre cálculo mental e números racionais, pelos resultados do estudo preliminar que apresentei anteriormente e pelos documentos de organização dos temas e tópicos matemáticos a lecionar, produzidos por Margarida e pelos professores do grupo de Matemática do 2.º ciclo. Através da planificação a longo prazo (Anexo M) percebi qual o percurso de aprendizagem definido para os alunos do 6.º ano de Margarida e em que fase desse percurso, esta experiencia de ensino poderia ser realizada. Uma das minhas preocupações era integrar a experiência de ensino na planificação de Margarida, ajustando-a o melhor possível à organização previamente definida por esta e pelo seu grupo disciplinar. A proposta inicial de sequência de tarefas, de representações dos números racionais e de operações envolvidas manteve-se no ciclo de experimentação II, uma vez que Laura e o grupo de professoras da sua escola optaram por um percurso de aprendizagem igual ao de Margarida (Anexo N). Todas as tarefas da experiência de ensino foram criadas e propostas por mim a Margarida e Laura, tendo estas liberdade total para sugerir reformulações de acordo com o desenvolvimento das suas planificações ou características dos alunos. De salientar que no caso de Laura, embora a estrutura base das tarefas apresentadas fossem as que irei apresentar na secção seguinte, estas contemplaram todo o trabalho do ciclo de experimentação I o que apoiou a tomada de decisões relativamente às eventuais reformulações na experiência de ensino, como explicarei no Capítulo 6.

### 5.2.2. A experiência de ensino

#### 5.2.2.1. Conjeturas de ensino-aprendizagem e quadro teórico

De acordo com os objetivos e questões do estudo que referi no Capítulo 1, a conjetura definida no estudo preliminar foi refinada por forma a torná-la mais específica tendo em conta o trabalho que se seguirá, dando origem a uma nova conjetura: uma experiência de ensino realizada durante dois períodos letivos, baseada em tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos e não matemáticos com números racionais positivos envolvendo as quatro operações e centrada na discussão das estratégias e erros dos alunos no 6.º ano:

a) Permite aos alunos desenvolverem um reportório flexível de estratégias de cálculo mental;
b) Contribui para uma melhoria gradual do seu desempenho em tarefas de cálculo mental, levando-os a cometerem cada vez menos erros.

O foco de análise centra-se na atividade dos alunos na sala de aula, mais concretamente, na forma como calculam mentalmente. Pretendo compreender que estratégias usam os alunos, que erros manifestam e em que medida os momentos de discussão apoiam esta compreensão.

No que se refere à intenção teórica, pretendo identificar e compreender as estratégias e erros dos alunos no cálculo mental com números racionais e perceber como se relacionam com as condições em que ocorre a experiência. Assim, desenvolvi um quadro teórico (Figura 3) que, nesta fase do *design research,* foi concebido com base em aspetos indicados na literatura e considerados como fundamentais para o desenvolvimento e apropriação de estratégias de cálculo mental com números racionais. O quadro teórico baseia-se em aspetos do sentido de número e sentido de operação (Empson et al., 2010; McIntosh et al., 1992; Schifter, 1997; Slavit, 1999) onde se incluem as relações numéricas e as operações com números racionais. Apoia-se também na ideia da necessidade dos alunos dominarem um conjunto de factos numéricos (Brocardo, 2011; Heirdsfield, 201; Wolman, 2006) e regras memorizadas que os apoie num cálculo rápido e eficiente. Como aspetos impulsionadores e essenciais em todo este processo de desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos, estão as tarefas de cálculo mental em contextos diversos e os processos de comunicação na sala de aula, nomeadamente a discussão.

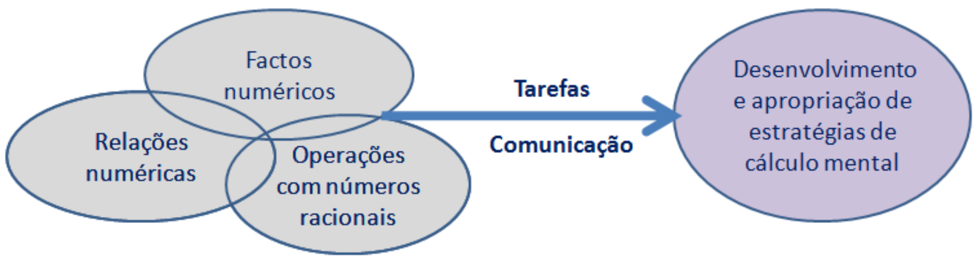



Figura 3. Quadro teórico para o desenvolvimento e apropriação de estratégias de cálculo mental com números racionais.

Os erros dos alunos no cálculo mental com números racionais surgem quando os alunos têm conceções erróneas acerca dos números e das operações ou algum tipo de dificuldade ou distração na aplicação de algumas regras ou factos numéricos. Inicialmente não previ um quadro de análise para os erros dos alunos por julgar ser possível, a partir do quadro teórico apresentado, analisar os erros dos alunos. Posteriormente, a necessidade de categorizar os erros levou-me a adotar a ideia de McIntosh (2006), que considera que os alunos cometem fundamentalmente dois tipos de erros no cálculo mental: concetuais e processuais. Esta categorização será alvo de reflexão e refinamento no decorrer da realização da experiência de ensino.

#### 5.2.2.2. Objetivos de aprendizagem e capacidades transversais

O enquadramento curricular da experiência de ensino foi realizado com base no programa de Matemática para o ensino básico (ME, 2007) em vigor no momento em que se realizaram os dois ciclos de experimentação. Em termos gerais, as tarefas de cálculo mental que fazem parte da experiência pretendem contribuir para "desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações, e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos" (ME, 2007, p. 32). Em relação aos objetivos gerais e específicos de aprendizagem que constam deste programa e, tendo em conta que a abordagem aos números racionais não se limita ao tema Números e Operações, considero que as tarefas contribuem para o desenvolvimento de objetivos no âmbito de outros temas matemáticos. No Quadro 6 apresento os objetivos gerais e específicos de aprendizagem definidos para esta experiência de ensino.

Para além dos objetivos relacionados com os temas matemáticos, a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação são capacidades transversais a desenvolver ao longo de todo o programa de Matemática a par com os temas e tópicos matemáticos. De acordo com as orientações curriculares, "a resolução de problemas é uma capacidade que se articula com as outras capacidades matemáticas e deve ser trabalhada em todos os temas matemáticos, conferindo coerência à aprendizagem matemática" (ME, 2007, p. 45). Segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007) a resolução de problemas permite construir novos conhecimentos matemáticos, aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas à resolução de um problema. É neste sentido que considero que a resolução de problemas deve estar presente no cálculo mental. Além disso, o envolvimento dos alunos em situações de aprendizagem diversificadas pode ajudá-los a perceberem que a capacidade de calcular mentalmente não está associada apenas a contextos matemáticos, mas também à resolução de problemas.

Quadro 6. Objetivos gerais e específicos de aprendizagem da experiência de ensino (de acordo com ME, 2007).

| | Objetivos gerais | Objetivos específicos |
|---|---|---|
| **Números e Operações** | - Compreender e ser capazes de usar propriedades dos números inteiros e racionais;<br>- Compreender e ser capazes de operar com números racionais e de usar as propriedades das operações no cálculo;<br>- Ser capazes de apreciar a ordem de grandeza de números e compreender os efeitos das operações sobre os números;<br>- Desenvolver a capacidade de estimação, de cálculo aproximado e de avaliação da razoabilidade de um resultado;<br>- Desenvolver destrezas de cálculo numérico mental e escrito;<br>- Ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos (p. 32). | - Adicionar, subtrair, multiplicar e dividi números racionais não negativos, representado em diferentes formas;<br>- Compreender o efeito de multiplicar (dividir) um número racional não negativo por um número menor que 1;<br>- Identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração e escrever uma fração na sua forma irredutível;<br>- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades;<br>- Compreender a noção de percentagem e relacionar diferentes formas de representar uma percentagem;<br>- Calcular e usar percentagens;<br>- Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos (pp. 34-35). |
| **Geometria** | - Ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em situações que envolvam contextos geométricos (p. 36). | - Resolver problemas que envolvam volumes de cubos, paralelepípedos e cilindros (p. 39). |
| **Álgebra** | - Compreender a noção de proporcionalidade direta e usar o raciocínio proporcional;<br>- Ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar recorrendo a representações simbólicas (p. 40). | - Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade;<br>- Resolver (…) problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta (p. 41) |
| **Organização e tratamento de dados** | | - (…) interpretar tabelas de frequências absolutas e relativas (…) (p. 43). |

Na perspetiva de Behr et al. (1986), os alunos manifestam dificuldades na resolução de problemas com números racionais. Esta é mais uma razão que me faz optar pela inclusão de pequenos problemas (situações contextualizadas) nesta experiência de ensino, considerando que este tipo de tarefas pode ser uma mais-valia para a aprendizagem do cálculo mental, proporcionando uma oportunidade para que os alunos desenvolvam a capacidade para identificar os dados, as condições e o objetivo de um problema, para conceber e pôr em prática estratégias de resolução e para verificar a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados (ME, 2007). Relembro ainda que, na perspetiva de Schifter (1997), a resolução de problemas proporciona situações de aprendizagem que favorecem a construção do sentido de operação e da estrutura do sistema de numeração.

Pelo seu lado, o raciocínio matemático é uma capacidade que deve ser estimulada através de experiências que proporcionem aos alunos a "oportunidade de acompanhar raciocínios matemáticos e de elaborar e justificar os seus raciocínios" (ME, 2007, p. 46). Para Heirdsfield (2011), realizar tarefas de cálculo mental na sala de aula proporciona aos alunos momentos para desenvolverem o seu raciocínio matemático. Mas realizar tarefas de cálculo mental não chega, é necessário encorajar os alunos a exporem as suas ideias para que possam ser verificadas (NCTM, 2007) e para que "progressivamente sejam capazes de explicar e justificar o seu raciocínio, dando explicações claras e coerentes, incorporando propriedades e relações matemáticas" (ME, 2007, p. 46). Perceber como calculam mentalmente os alunos, é perceber o raciocínio subjacente às estratégias que utilizam no cálculo.

É na explicação e justificação de processos e ideias matemáticas que a comunicação se torna "uma parte essencial da atividade matemática dos alunos em aula, desempenhando um papel fundamental na aprendizagem da disciplina" (ME, 2007, p. 46). De acordo com o programa de Matemática, os alunos devem ser envolvidos em situações de comunicação oral e escrita e em interações entre professor-aluno(s), e entre aluno(s)-aluno(s). A comunicação na sala de aula, nomeadamente através da partilha de ideias, estratégias e erros dos alunos durante a discussão, constitui o processo através do qual os alunos podem adquirir linguagem matemática (NCTM, 2007) e aprender a justificar os seus raciocínios e a estabelecer conexões matemáticas (Wolman, 2006). Nesta experiência de ensino, a comunicação é desenvolvida através da discussão coletiva na sala de aula pois é a forma por excelência que os alunos têm para apresentarem como pensam. A comunicação permite aos alunos organizar e consolidar o seu pensamento matemático, partilhá-lo de forma coerente e clara com colegas, professores e outros, analisar e avaliar as estratégias e o pensamento matemático usados por outros e usar a linguagem matemática para expressar ideias matemáticas com precisão (NCTM, 2007).

#### 5.2.2.3. *Design das tarefas*: Princípios orientadores

O desenvolvimento de estratégias de cálculo mental nos alunos deve ser sistemático e intencional (Taton, 1969) o que requer a criação de tarefas que promovam o desenvolvimento de capacidades de cálculo com compreensão, tanto com números naturais como com números racionais. Sendo as tarefas o ponto de partida para a atividade matemática dos alunos, a sua realização na sala de aula deve, promover a reflexão e ser objeto de discussão e partilha. É nesta perspetiva que construi uma experiência de ensino composta por dez tarefas de cálculo mental projetadas na sala de aula com recurso a um *PowerPoint* temporizado, à semelhança do que aconteceu no estudo preliminar. A opção por um *PowerPoint* temporizado pretendia desafiar os alunos a calcular mentalmente com números racionais e a desenvolver estratégias cada vez menos baseadas nos procedimentos algorítmicos que estavam habituados a realizar de papel e lápis. Seguindo as sugestões de Reys et al. (1995), que consideram que o modo de apresentação visual contribui positivamente para o desempenho dos alunos no cálculo mental, mais do que o modo oral, o dispositivo de apresentação das tarefas combinava uma componente visual (a projeção) com uma oral (a leitura no caso das situações contextualizadas) de acordo com os resultados da investigação. Assim, no caso das situações contextualizadas, usei estes dois modos de apresentação em conjunto, tendo em conta as dificuldades reveladas pelos alunos neste tipo de tarefas, no estudo preliminar.

Destas dez tarefas, sete são em contexto matemático (expressões), duas com situações contextualizadas e uma tarefa mista envolvendo ambas. Cada tarefa é constituída por duas partes e deverá ter uma duração aproximada de 15 minutos. Os alunos têm 15 segundos para resolver cada expressão e 20 segundos para resolver cada situação contextualizada. Tendo em conta os resultados do estudo preliminar decidi aumentar em 5 segundos o tempo para a resolução de cada situação, sendo que, primeiro o professor lê em voz alta e só depois os alunos têm 20 segundos para realizar o cálculo.

Nas tarefas em contexto matemático, a primeira parte contém cinco expressões de cálculo mental, tendo os alunos que calcular o valor de cada expressão, seguindo-se um momento de discussão de estratégias e erros. A segunda parte da tarefa é constituída por mais cinco expressões, em que os alunos resolvem expressões de valor em falta, indicando qual o valor que torna a igualdade verdadeira. Segue-se um novo momento de discussão. Nas situações contextualizadas, a dinâmica é semelhante. A primeira parte tem quatro situações em contexto, sendo seguida de um momento de discussão e a segunda parte tem mais quatro situações contextualizadas e novo momento de discussão. Na tarefa mista, a primeira parte contém cinco expressões de cálculo mental e a segunda parte quatro situações contextualizadas. A dinâmica de realização desta tarefa é igual à utilizada nas outras nove tarefas.

A opção de dividir as tarefas em duas partes, tem como objetivo promover um primeiro momento de discussão de estratégias e erros dos alunos que possa influenciar de forma positiva a realização da segunda parte da tarefa. Pretendo com esta dinâmica contribuir para ampliar as estratégias de cálculo mental dos alunos e minimizar os erros que cometem a curto e a longo prazo (da parte 1 para a parte 2 em cada tarefa e ao longo da experiência de tarefa para tarefa).

As tarefas que denominei de "*Pensa rápido*!" para além de terem subjacentes os objetivos gerais e específicos indicados no Quadro 6 e os aspetos importantes identificados no estudo preliminar, a sua construção seguiu quatro princípios que considero importantes ter em conta na construção de tarefas que pretendam promover o desenvolvimento do cálculo mental. Estes princípios relacionam-se com os contextos, as representações dos números racionais, as estratégias e erros dos alunos, e o nível cognitivo das tarefas.

*Princípio 1 – Usar contextos que possam ajudar os alunos a dar significado aos números.* Na perspetiva de Bell (1993) os contextos e os conceitos a trabalhar com os alunos são aspetos importantes na construção das tarefas. Segundo o autor, um conhecimento estruturado, por norma, está relacionado com o contexto em que foi aprendido, sendo difícil para o aluno transpor esse conhecimento para novas situações. Também Galen et al (2008) e Rathouz (2011) consideram que os contextos podem ajudar os alunos a dar significado aos números. Para perceber como os contextos podem promover ou dificultar o cálculo mental dos alunos, criei dois tipos de questões envolvendo números racionais que por vezes surgiram na mesma tarefa. Questões envolvendo expressões com e sem valor em falta (contexto matemático) e situações contextualizadas (contexto não matemático). Nas situações contextualizadas, optei por contextos de medida, dinheiro, escalas, receitas e proporcionalidade direta (Galen et al., 2008; Llinares & Garcia, 2000) por serem estes os contextos previstos a serem abordados pelas professoras no tempo de realização da experiência de ensino.

*Princípio 2 – Usar diversas representações de um número racional*. Nas várias tarefas os alunos têm a oportunidade de trabalhar com números racionais em diferentes representações (decimal, fração e percentagem) estando a representação usada em cada tarefa de acordo com o tópico que a professora está a trabalhar. No momento em que se estudam volumes usa-se sobretudo a representação decimal, no estudo das relações e regularidades usa-se a representação em fração, em OTD usam-se as três representações. Esta opção irá permitir aos alunos o desenvolvimento do cálculo mental de forma integrada com a aprendizagem dos números racionais prolongada no tempo e estabelecendo relações entre diferentes tópicos matemáticos. As diversas representações vão surgindo repetidamente e, por vezes, em simultâneo ao longo da experiência. O uso de diferentes representações dos números racionais permite aos alunos estabelecerem equivalências (Caney & Watson, 2003) bem como relações entre estas representações e imagens mentais que possuem acerca dos conceitos matemáticos (Swan, 2008).

*Princípio 3 – Ter em conta a investigação sobre o cálculo mental e os números racionais na construção de tarefas (níveis e estratégias de cálculo mental e aspetos da aprendizagem dos números racionais)*. No domínio do cálculo mental Heirdsfield (2011) considera que existem quatro elementos fundamentais que estão na base do desenvolvimento de estratégias dos alunos: (i) conhecer a numeração e compreender a grandeza e valor dos números; (ii) o efeito das operações sobre os números; (iii) ter capacidade para fazer estimativas para verificar a razoabilidade do resultado; e (iv) conhecer um conjunto de factos numéricos que permita calcular rapidamente e com precisão. No domínio dos números racionais e tendo em conta a perspetiva de vários autores (e.g., Behr, Post & Wachsmuth, 1986; Galen et al., 2008; Lamon, 2006; Rathouz, 2011), para além das decisões relativas aos contextos e representações já referidas, privilegiei o uso de números de referência. Tendo em atenção o que referem Empson et al. (2010), também considerei os conhecimentos prévios dos alunos relativos aos números racionais, incluindo as operações estudadas no 5.º e 6.º ano, importantes para o desenvolvimento de estratégias. Segundo os autores, cada estratégia surge em função da compreensão que cada a criança tem acerca dos números e operações e das relações numéricas que lhe são familiares e que usa para estabelecer novas relações e efetuar o cálculo. Os autores denominam de pensamento relacional esta rede de relações que os alunos estabelecem. Relativamente às estratégias de cálculo mental com números racionais, Caney e Watson (2003) realçam a importância de perceber a relação entre diferentes representações de um número racional para desenvolver o cálculo mental com estes números e identificam um conjunto de estratégias que os alunos usam no cálculo mental com números racionais (Anexo B). No que se refere aos níveis de cálculo mental referidos por Callingham e Watson (2004) (Anexo C), estes revelaram-se um contributo importante para a construção das tarefas na medida em que, associadas a cada nível de cálculo mental, estão capacidades de cálculo que os alunos podem desenvolver ou demonstram ter, e este aspeto foi tido em conta na seleção de números racionais e situações contextualizadas. De um modo geral, privilegiei o uso de valores de referência como $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ou $\frac{3}{4}$ e representações dos números racionais equivalentes (decimal e percentagem) a estas, usei frações com denominadores múltiplos um do outro, numerais decimais divisíveis entre si e até à centésima para melhor correspondência com a representação em percentagem.

*Princípio 4 – Usar tarefas com diferentes níveis de exigência cognitiva.* Tarefas com características diferentes podem levar os alunos a desenvolverem níveis de raciocínio diferentes (Henningsen & Stein, 1997). As tarefas permitem o uso de diferentes representações dos números racionais e o desenvolvimento de diferentes estratégias e formas de comunicação matemática, uma vez que os alunos têm de explicar e justificar os seus raciocínios e ser críticos face às explicações dos colegas. Neste sentido, e tendo em conta a necessidade de construir tarefas com diferentes níveis cognitivos, considerei para cada tarefa: (i) os níveis de desenvolvimento de cálculo mental (Callingham & Watson, 2004) dos alunos a alcançar em cada representação dos números racionais; (ii) as possíveis estratégias de cálculo mental dos alunos em cada expressão ou situação contextualizada propostas; e (iii) os possíveis erros que podem surgir no cálculo mental realizado em cada expressão ou situação. Assim, tive em atenção que, num nível mais básico de cálculo mental (níveis A, B e C de Callingham e Watson, 2004) os alunos devem reconhecer metades na forma de $\frac{1}{2}$pelo que as primeiras tarefas proporcionaram trabalho neste sentido. Num nível mais desenvolvido (níveis D, E e F), devem ser capazes de usar estruturas de base (isto é, conhecimentos baseados em números de referência) para calcular com números menos familiares ou frações com denominadores diferentes, sendo propostas tarefas que gradualmente vão apelando ao uso, por exemplo, de terços ou sextos. Tendo em atenção as estratégias de cálculo mental com números racionais referidas por Caney e Watson (2003), as tarefas pretendiam potenciar o uso e desenvolvimento de relações numéricas, onde se incluem a mudança de representação e as propriedades das operações. Para promover este tipo de atividade matemática, usei fundamentalmente: números de referência tais como $\frac{1}{4}$, 0,5 ou 75%; múltiplos; números racionais na representação decimal com uma ou duas casas decimais, para facilitar a equivalência entre frações decimais e percentagens; diferentes representações de um número racional na mesma tarefa e em tarefas diferentes; expressões equivalentes que permitam o uso de propriedades das operações e relações numéricas e entre operações; e situações contextualizadas que os alunos podem resolver recorrendo a expressões previamente discutidas na aula . Enquanto algumas tarefas permitem aos alunos operar facilmente recorrendo a factos ou regras, outras requerem o recurso a relações numéricas. Por exemplo, para calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ os alunos apenas têm de usar factos numéricos conhecidos (duas metades formam a unidade). Esta é uma tarefa de nível cognitivo reduzido. Mas para calcular ?×0,5=30 os alunos têm de relacionar números, mudar de representação ou usar propriedades das operações, o que confere à tarefa um nível cognitivo mais elevado. Saliento ainda o facto das tarefas em contexto matemático contemplarem dois tipos de expressões: expressões em que os alunos apenas têm de indicar o resultado de uma operação e expressões de valor em falta. Na perspetiva de Carpenter, Franke e Levi (2003) as expressões de valor em falta representam um contexto de aprendizagem flexível pois promovem o uso de relações numéricas entre diferentes representações dos números e suas operações ao invés de promoverem a aplicação de um procedimento de cálculo. Conduzem igualmente à aprendizagem de factos mais facilmente e são a base para um trabalho futuro no âmbito da Álgebra.

Em todas as representações dos números racionais os alunos cometem erros (e.g., Lamon, 2006; Parker & Leinhardt 1995; Rathouz, 2011). Por exemplo, na adição e subtração na representação fracionária operam com numeradores e denominadores, na representação decimal operam ignorando o valor posicional dos algarismos e na representação em percentagem operam com os números ignorando o sinal “%”. Erros estes que podem ser concetuais ou processuais (McIntsoh, 2006). Neste sentido, algumas tarefas podem proporcionar o aparecimento de certos erros para que estes possam ser discutidos e clarificados no momento da discussão coletiva. Assim, na adição e subtração de números racionais representados por frações existem situações em que os denominadores são diferentes, na representação decimal surgem operações envolvendo décimas e centésimas e na representação em percentagem selecionei números que permitissem obter um resultado correto seguindo uma estratégia errada (e.g., no cálculo de 20% de 25, 25-20 origina o mesmo resultado que 0,2 × 25). Para mim, era importante perceber as estratégias e erros dos alunos e discuti-las na sala de aula para clarificar conceções erradas dos alunos acerca dos números e das operações com números racionais.

De um modo geral, as tarefas permitiam não só rever e consolidar o trabalho com um conjunto de números racionais de referência, mas também ampliar estratégias de cálculo mental e conduzir à clarificação e consequente minimização dos erros dos alunos. A conjugação das quatro operações básicas e das três representações dos números racionais, apesar de proporcionar maior flexibilidade na combinação de estratégias, também proporciona um grau de dificuldade superior.

De seguida descrevo com algum pormenor o objetivo de cada uma das questões das dez tarefas da experiência de ensino proposta inicialmente. As capacidades de cálculo envolvidas nestas tarefas, antecipação de estratégias e erros dos alunos encontram-se no Anexo O. As diversas reformulações realizadas nas tarefas propostas inicialmente estão devidamente descritas no capítulo referente à realização da experiência de ensino (Capitulo 6) uma vez que a necessidade de efetuar alterações emergiu com a realização da experiência e a partir das diversas sessões de preparação e/ou reflexão pós-aula com as duas professoras.

#### 5.2.2.3.1.Proposta de tarefas

As tarefas 1 (Figura 4) e 2 (Figura 5) são formuladas em contexto matemático, na representação fracionária, tendo dez expressões de cálculo mental cada. A tarefa 1 envolve adição e subtração de frações e a tarefa 2 multiplicação e divisão. Estas tarefas estão enquadradas no tópico relações e regularidades. Optei por iniciar o cálculo mental com números racionais pela representação em fração, pelo facto da professora do ciclo de experimentação I (Margarida) ter terminado a abordagem os números racionais positivos com a multiplicação e divisão de frações e ter iniciado relações e regularidades onde deu continuidade ao trabalho com frações no âmbito das expressões numéricas e proporcionalidade.

Na parte 1 da tarefa 1, os alunos têm de calcular mentalmente o resultado de uma operação simples. Em a), começam por calcular a soma de duas frações unitárias (de referência) com denominadores iguais que representam “metade”; em b) operam igualmente com frações de referência, com o mesmo denominador, para obter uma fração ainda mais simples (“metade”); em c) voltam a operar com frações que representam um meio (“metade”) e equivalentes à expressão calculada em a), cujas frações têm denominadores diferentes; em d) operam com frações com denominadores diferentes que se relaciona com o que realizaram em b); e em e) voltam a operar com frações com denominadores diferentes que representam um meio e cuja expressão é equivalente à apresentada em a) e em c).

---

**Tarefa 1**

**Parte 1**

$a)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ b)\ \frac{3}{4}-\frac{1}{4}\ c)\ \frac{1}{2}+\frac{2}{4}\ d)\ \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ e)\ \frac{4}{8}+\frac{2}{4}$

**Parte 2**

$f)\ \frac{1}{2}\ +?=1\ g)?\ -\frac{5}{10}=\frac{3}{10}\ \square)\ \frac{3}{6}\ +?=1\ i)\ \frac{1}{2}-\ ?\ =\frac{1}{4}j)\ \frac{1}{2}+?=\ \frac{3}{4}$

---

Figura 4. Proposta de tarefa 1 para o ciclo de experimentação I.

Na parte 2, os alunos têm que resolver expressões de valor em falta e indicar o valor que torna a igualdade verdadeira. Em f) surge uma expressão equivalente à apresentada em a) em que os alunos podem usar os conhecimentos discutidos em c) e em e) ou relacionar a parte-todo; em g) operam com frações decimais podendo recorrer à mudança de representação (de fração para decimal); em h) surge uma expressão equivalente à apresentada em f) envolvendo uma fração equivalente a um meio; em i) uma diferença que pretende relacionar "meios" e "quartos"; e em j) uma expressão que se relaciona com d) e que continua a relacionar "meios" e "quartos". As expressões que apresentam frações com denominadores diferentes surgem com o intuito de verificar se os alunos cometem o erro de adicionar/subtrair denominadores e as que representam a unidade, para detetar eventuais dificuldades no estabelecimento da relação parte-todo.

Na tarefa 2 (Figura 5), na parte 1, em a) e c) os alunos multiplicam um número pelo seu inverso sendo que em a) se apresenta o inverso de um número inteiro (multiplicação de um inteiro por uma fração) e em c) o inverso de um número fracionário (multiplicação de duas frações); em b) operam com duas frações de denominadores diferentes, que podem ser simplificadas e cujo resultado corresponde a um meio ou fração equivalente; em d) dividem frações com denominadores iguais; e em e) dividem frações com denominadores múltiplos um do outro.

Na parte 2, surgem novamente expressões de valor em falta. Em f) uma expressão que se relaciona com c) pois envolve a multiplicação de um número pelo seu inverso; em g) uma expressão que relaciona $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{4}$, a divisão por $\frac{1}{2}$ com a multiplicação por 2 e onde não é possível recorrer à operação inversa da divisão para resolver a expressão; em h) uma expressão que potencia o uso da divisão como operação inversa da multiplicação; em i) a relação entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$, onde não é possível recorrer à operação inversa da divisão; e em j) a multiplicação de duas frações onde o recurso à propriedade comutativa apoia a simplificação do cálculo. Para esta tarefa, não foram previstos erros, uma vez que as regras da multiplicação de números naturais continuam a verificar-se quando multiplicamos frações (Lamon, 2006).

---

**Tarefa 2**

**Parte 1**

$a)\ 5\times\frac{1}{5}\ b)\ \frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\ c)\ \frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\ d)\ \frac{4}{6}\div\frac{2}{6}\ \ e)\ \frac{4}{8}\div\frac{1}{2}$

**Parte 2**

$f)\ \frac{3}{4}\times ?=1\ g)\ \frac{1}{4}\div ?=\frac{1}{2}$ □$)?\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\ i)\ \frac{3}{4}\div ?=\frac{1}{4}\ j)\ \frac{15}{20}\times\frac{20}{3}$

---

Figura 5. Proposta de tarefa 2 para o ciclo de experimentação I.

A tarefa 3 (Figura 6) marca uma mudança ao ser realizada na transição do tema Álgebra para a Geometria, com a introdução da representação decimal e da resolução de situações contextualizadas. A primeira parte desta tarefa é constituída por cinco expressões de cálculo mental envolvendo as quatro operações básicas com frações e numerais decimais. A representação decimal surge nesta fase, por ser uma representação dos números racionais forte no tópico volumes. A utilização das duas representações em simultâneo, pretende mostrar aos alunos a importância, no cálculo mental, da conversão entre representações dos números racionais e, por isso, privilegiei o uso de valores de referência como forma de facilitar o cálculo e a conversão.

Na parte 1 desta tarefa, em a) os alunos adicionam dois números de referência, um na representação fracionaria e outro na decimal surgindo assim mais uma representação de "metade" (0,5); em b) subtraem uma fração decimal e um numeral decimal; em c) dividem um numeral decimal par por $\frac{1}{2}$ para reforçar a relação com a multiplicação por 2; em d) multiplicam uma fração unitária por um numeral decimal onde a conversão entre representações (de decimal para fração) pode facilitar o cálculo; e em e) dividem e relacionam quantidades divisíveis, uma na representação decimal e outra na representação fracionária.

---

**Tarefa 3**

**Parte 1**

$a)\ \frac{3}{4} + \ 0{,}50\ b)\ \frac{8}{10} - \ 0{,}2\ c)\ 2{,}4\ \div \frac{1}{2}\ d)\ \frac{1}{5} \times 0{,}25\ e)\ 0{,}75\ \div \frac{1}{4}$

**Parte 2**

$f$) Uma embalagem de 250g de cereais custa 0,80€. Qual o preço de 750g dos mesmos cereais?

$g$) Quatro livros de banda desenhada custam 12,8€. Qual o preço de cada livro?

□) O João desenhou, numa folha de papel, a distância de casa à escola através de um segmento de 1,5 $cm$. Sabendo que a escala que usou foi de 1:200, qual a distância real de casa à escola?

$i$) Para fazer refresco de laranja é necessários $\frac{1}{10} l$ de concentrado por cada $\frac{1}{2} l$ de água. Que quantidade de concentrado se deve usar para fazer $1,5l$ de refresco.

---

Figura 6. Proposta de tarefa 3 para o ciclo de experimentação I.

Na parte 2, os alunos resolvem quatro situações contextualizadas envolvendo os conceitos de razão e proporção, uma vez que irão terminar o tópico relações e regularidades. A opção por uma tarefa mista (expressões e situações contextualizadas) surge com o intuito de diversificar contextos, de fazer perceber aos alunos que o cálculo mental não é possível apenas em contextos matemáticos e que a discussão de questões em contexto matemático pode apoiar a compreensão e escolha da operação adequada para resolver uma situação contextualizada. Em f) relacionam duas quantidades múltiplas uma da outra à semelhança do que fizeram em e), embora a operação a realizar não seja a mesma, e mobilizam conceitos de razão e proporção; em g) operam com dois números divisíveis, um numeral decimal e um número inteiro; em h) estabelecem relações entre distâncias reais e distâncias num mapa, usam o conceito de "metade de" (1,5 é $1 + 0{,}5$) e voltam a mobilizar conceitos de razão e proporção; e em i) relacionam números racionais em representações diferentes ($\frac{1}{2}$ $e$ 1,5) e podem multiplicar uma fração por um número inteiro.

A tarefa 4 (Figura 7) envolve adição e subtração e a tarefa 5 (Figura 8) multiplicação e divisão de numerais decimais. Estas tarefas foram enquadradas no tópico volumes e, por isso, a opção pela representação decimal como já referido anteriormente. Sendo os processos de cálculo com numerais decimais semelhantes aos usados com números naturais é esperado que os alunos recorram com frequência à conversão entre representações não de decimal para fração mas para números naturais referentes a $\frac{10}{100}$, ou seja, que operem com numerais decimais como se fossem números naturais, repondo o valor posicional dos algarismo aquando da indicação do resultado.

**Tarefa 4**

**Parte 1**

$a)$ $0{,}5+0{,}25$ $b)$ $0{,}18-0{,}03$ $c)$ $0{,}75+0{,}5$ $d)$ $1{,}9-0{,}50$ $e)$ $0{,}6+0{,}04$

**Parte 2**

$f)$ $0{,}7+?=1$ $g)$ $?-4{,}3=0{,}5$ □) $0{,}04+?=1$ $i)$ $1{,}25-?=\ 0{,}75$
$j)$ $0{,}07+?=\ 0{,}84$

Figura 7. Proposta de tarefa 4 para o ciclo de experimentação I.

**Tarefa 5**

**Parte 1**

$a)$ $0{,}25\times 4$ $b)$ $12{,}2\ \div 0{,}5$ $c)$ $0{,}6\ \times 0{,}30$ $d)$ $0{,}14\ \div\ 0{,}2$ $e)$ $4{,}2\ \times 0{,}2$

**Parte 2**

$f)$ $?\times 0{,}5=\ 30$ $g)$ $2{,}1\ \div ?=8{,}4$ □) $?\times 0{,}4=0{,}16$ $i)$ $0{,}82\ \div ?=1{,}64$
$J)$ $25{,}5\ \times ?=5{,}1$

Figura 8. Proposta de tarefa 5 para o ciclo de experimentação I.

Na parte 1 da tarefa 4, em a) os alunos operam com dois numerais decimais de referência, que se relacionam com a operação realizada em j) na tarefa 1 na representação fracionária; em b) subtraem centésimas de décimas realçando-se a importância do valor posicional dos algarismos; em c) adicionam dois numerais decimais de referência, cuja expressão se relaciona com a); em d) subtraem centésimas de décimas sendo possível o recurso a estratégias de compensação; e em e) voltam a adicionar décimas com centésimas.

Na parte 2, resolvem expressões de valor em falta e em f) e h) relacionam um numeral decimal com a unidade através da relação parte-todo, sendo que em h) podem manifestar a correção, ou não, de um possível erro cometido em e) onde o não respeito pelo valor posicional pode levar a que os alunos indiquem que $0{,}6 + 0{,}04 = 1$; em g) podem recorrer à relação entre as operações adição e subtração; em i) relacionam múltiplos de 25 (caso operem com numerais decimais como se fossem números naturais) e esta expressão com a apresentada em c); e em j) mobilizam a operação inversa da adição.

Na parte 1 da tarefa 5, em a) os alunos multiplicam um numeral decimal de referência por um número inteiro obtendo a unidade, onde a quarta parte da unidade é evidenciada; em b) dividem um decimal par por 0,5 reforçando a relação com a divisão por $\frac{1}{2}$ e a multiplicação por 2; em c) multiplicam numerais decimais que representam décimas e centésimas para enfatizar a importância do valor posicional e o sentido de operação; e em d) e e) operam com numerais decimais pares sendo que em d) são divisíveis.

Na parte 2, em f) surge uma expressão que pretende de novo enfatizar a relação entre o multiplicar por 0,5 e o dividir por 2 ou o recurso à operação inversa da multiplicação; em g) uma expressão que se relaciona com b) uma vez que envolve a divisão por 0,5 ou $\frac{1}{2}$ e que sendo trabalhada depois de f) mostra a diferença entre multiplicar por 0,5 e dividir por 0,5; em h) a relação entre dois numerais decimais com casas decimais diferentes para reforçar a importância do valor posicional; em i) reforçam-se as relações numéricas trabalhadas em b) e g); e em j) a relação entre dois numerais decimais e entre operações inversas. Todas as expressões da tarefa 5 têm um forte intuito de trabalhar e discutir o sentido de operação multiplicação e divisão de números racionais.

A tarefa 6 (Figura 9) envolve resolução de situações contextualizadas com as quatro operações básicas e a representação decimal e fracionária uma vez que tinham sido estas as representações usadas até ao momento no cálculo mental. Mais uma vez, estas duas representações surgem em simultâneo, mas agora na resolução de situações contextualizadas e com o objetivo de perceber se os alunos se têm vindo a apropriar das estratégias partilhadas e discutidas até ao momento e de que forma as mobilizam na resolução de situações em contexto, uma vez que o nível de exigência em termos de interpretação e relações numéricas é superior. As situações envolvem contextos de medida uma vez que é previsível que Margarida se encontre a trabalhar o tópico volumes com os alunos.

---

**Tarefa 6**

**Parte 1**

$\boldsymbol{a}$) O Luís encheu $\frac{3}{6}$ de um depósito de água e a Joana $0{,}5$ desse mesmo depósito. Quem colocou mais água no depósito?

$\boldsymbol{b}$) O perímetro da face de um tanque cúbico é $8{,}8\ m$. Qual a medida do lado?

$\boldsymbol{c}$) O avô do João já gastou $\frac{5}{10}$ da capacidade de um depósito de água na rega do jardim. Quanto lhe falta para esvaziar o depósito?

$\boldsymbol{d}$) A Rita construiu um cubo em que a área da base era $0{,}36\ m^2$. Qual a medida do lado?

**Parte 2**

$\boldsymbol{e}$) O sólido A tem $8{,}4\ l$ de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. Calcula a capacidade do sólido B

$f$) Uma tina tem de capacidade $22{,}5\ l$ . Quantos baldes de $\frac{1}{2}\ l$ são necessários encher para despejar por completo a tina?

$\boldsymbol{g}$)A área da base de um paralelepípedo retângulo é de $12{,}4\ cm^2$ . Sabendo que a altura é $0{,}25\ cm$, qual o volume do paralelepípedo?

$\boldsymbol{h}$) A área da base de um cilindro é $4{,}2\ m^2$ e o seu volume $6{,}3\ m^3$. Calcula a altura.

---

Figura 9. Proposta de tarefa 6 para o ciclo de experimentação I.

Na parte 1 da tarefa 6, em a) surge uma situação de comparação envolvendo a representação fracionária e decimal; em b) o conceito de perímetro associado à divisão de um decimal por um inteiro; em c) uma situação que pode ser resolvida recorrendo a uma expressão de valor em falta, onde se pretende reconstruir a unidade e que se relaciona com a questão f) da parte 1 da tarefa 1; e em d) o conceito de área associado ao produto de dois fatores iguais e que se relaciona com a questão h) da parte 2 da tarefa 5. Nesta última questão a importância do valor posicional será reforçada através do cálculo do produto entre dois numerais decimais inferiores a 1.

Na parte 2 desta tarefa, em e) surge uma situação que envolve o produto de um numeral decimal por uma fração, à semelhança do que foi realizado na questão d) da parte 1 da tarefa 3; em f) a divisão de um numeral decimal por uma fração que representa "metade" enfatizando relações numéricas trabalhadas na tarefa 5; em g) a multiplicação de um numeral decimal por 0,25 e cujo objetivo é incentivar a conversão entre representações ($0{,}25 = \frac{1}{4}$); e em h) uma situação que pode ser resolvida recorrendo a uma expressão de valor em falta, semelhante à apresentada na questão f) da parte 2 da tarefa 5, e que envolve a operação inversa da multiplicação.

Na tarefa 7 (Figura 10) surge pela primeira vez a representação em percentagem. Os alunos resolvem dez expressões de cálculo mental com diferentes níveis de exigência cognitiva tal como sugerido por Parker e Leinhardt (1995). São privilegiadas percentagens de referência múltiplas de 5 e de 10.

---

**Tarefa 7**

**Parte 1**
$a)\ 50\%\ de\ 40\ \ b)\ 25\%\ de\ 20\ \ c)\ 75\%\ de\ 80\ \ d)\ 10\%\ de\ 350$
$e)\ 90\%\ de\ 30$

**Parte 2**
$f)\ 10\%\ de\ ? = 5\ \ g)\ 50\%\ de\ ? = 60$ □$)\ 5\ \%\ de\ ? = 3\ \ i)\ 25\%\ de\ ? = 20$
$j)\ 30\%\ de\ ? = 15$

---

Figura 10. Proposta de tarefa 7 para o ciclo de experimentação I.

Na parte 1 da tarefa 7, em a) os alunos calculam 50% de um valor, reforçando assim o trabalho com "metades" que tem vindo a ser realizado ao longo da experiência de ensino mas antes com a representação fracionária e decimal; em b) e c) pretendo incentivar o recurso à divisão por 4 para o cálculo de 25% e percentagens múltiplas de 25, ou o recurso ao cálculo de "metade de metade" partindo de conceitos discutidos na questão a); em d) o cálculo de 10%associado à divisão por 10 (uma regra memorizada); em e) o calculo de uma percentagem próximas do todo (100%) incentivando o cálculo não de 90%, mas sim do valor que falta para obter o todo, relacionando-se este cálculo com o realizado em d). Na parte 2, as questões envolvem essencialmente a relação parte-todo ou parte-parte permitindo assim, aos alunos, desenvolverem múltiplas relações numéricas.

Na tarefa 8 (Figura 11) os alunos têm de resolver dez expressões, envolvendo as três representações dos números racionais, cujo principal objetivo é perceber de que forma a conversão entre representações é potenciada nas estratégias que partilham e mais uma vez reforçar esta conversão.

---

**Tarefa 8**

**Parte 1**

$a)\ \frac{3}{4}\ de\ 60\ b)\ 0{,}2\ de\ 10\ c)\ \frac{1}{3}\ de\ 120\ d)\ 20\%\ de\ 50\ e)\ \frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$

**Parte 2**

$f)\ \frac{1}{2}\ de\ 0{,}18\ g)\ 0{,}25\ de\ 40$ □$)\ 90\%\ de\ 60\ i)\ 1\%\ de\ 20\ j)\ \frac{1}{5}\ de\ 40$

---

Figura 11. Proposta de tarefa 8 para o ciclo de experimentação I,

Na tarefa 8 não foram propostas expressões de valor em falta e os números racionais surgem com o significado de operador. Pretendo essencialmente fazer a ponte entre as representações fracionária e decimal e a percentagem, uma vez que esta última representação surge com o significado de operador. Em a) os alunos calculam o produto de uma fração de referência por um número inteiro; em b) o produto de um numeral decimal por um inteiro, em que o decimal pode ser convertido em $\frac{1}{5}$; em c) o cálculo de $\frac{1}{3}$ de um valor, uma fração que tem sido pouco usada por representar uma dizima infinita mas que surge nesta tarefa com o intuito de perceber quais as estratégias dos alunos com este tipo de números racionais; em d) o cálculo de uma percentagem múltipla de 10; e em e) o produto entre duas frações que representam dízimas infinitas, mantendo-se o intuito referido em c).

Na parte 2, em f) é retomado o conceito de "metade de" relacionado a multiplicação por $\frac{1}{2}$ com a divisão por 2, como tem vindo a ser trabalhado em tarefas anteriores; em g) o produto de um numeral decimal por um número inteiro e que se relaciona com expressões anteriormente trabalhadas (i.e., questão b) da tarefa 7); em h) uma expressão semelhante à apresentada em e) na tarefa 7 que pretende reforçar o cálculo da parte que falta para o todo em vez do cálculo direto de 90%; em i) o cálculo, pela primeira vez, de percentagens de pequeno valor para promover a construção de estratégias de reconstrução do todo, eficientes e que podem passar pelo recurso a múltiplos de 10; e em j) uma expressão que se relaciona com b) e d) desta tarefa e com a) da tarefa 2.

A tarefa 9 (Figura 12) proporciona aos alunos o cálculo mental com as três representações e com as quatro operações básicas, através de dez expressões com e sem valor em falta. Esta tarefa pretende revisitar relações numéricas trabalhadas ao longo da experiência de ensino e assim perceber que estratégias desenvolveram os alunos e que opções fazem em termos de estratégias tendo em conta as representações e as operações envolvidas. Apesar dos erros dos alunos serem alvo de análise e discussão ao longo de toda a experiência de ensino, esta tarefa permitirá também perceber se esses erros continuam a surgir quando os alunos têm que tomar opções perante propostas de trabalho mais complexas.

---

**Tarefa 9**

**Parte 1**

$a)\ \frac{5}{10}+\frac{1}{4}\ b)\ 0{,}68-0{,}02\ c)\ \frac{4}{6}\times\frac{6}{7}\ d)\ \frac{9}{10}\div\frac{3}{10}\ e)\ 75\%\ de\ 20$

**Parte 2**

$f)\ \frac{6}{12}+?=1\ g)\ ?\ -2{,}2=\frac{1}{5}$ □) $\frac{2}{3}\times?=1\ i)\ 0{,}75\div?=3\ j)\ 20\%\ de\ ?=$
8

---

Figura 12. Proposta de tarefa 9 para o ciclo de experimentação I.

Na parte 1 da tarefa 9, em a) surge a adição de duas frações de denominadores diferentes em que uma representa “metade” e que se relaciona com questões realizadas na tarefa 1; em b) a diferença entre dois numerais decimais, como realizado na tarefa 4; em c) o produto de duas frações onde é possível recorrer à propriedade comutativa para simplificar o cálculo; em d) o quociente entre duas frações com denominadores iguais, como realizado na tarefa 2; e em e) o cálculo de uma percentagem múltipla de 25 como realizado na tarefa 7.

Na parte 2, em f) surgem expressões de valor em falta envolvendo frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ (metade) tal como na tarefa 1; em g) a relação entre as operações subtração e adição, tal como na tarefa 4; em h) o produto de um número racional pelo seu inverso como na tarefa 2; em i) a relação entre dividendo e quociente como na tarefa 5; e em j) a relação parte-todo ou parte-parte envolvendo percentagens múltiplas de 10 como realizado na tarefa 7.

A última tarefa da experiência de ensino, a tarefa 10 (Figura 13), volta a proporcionar aos alunos a realização de oito situações contextualizadas. As quatro primeiras situações enquadram-se no tópico representação e interpretação de dados e as quatro situações seguintes referem-se a volume e relações e regularidades, tópicos estes trabalhados durante a experiência de ensino. À semelhança da tarefa 9, mas agora com situações contextualizadas, o objetivo desta tarefa é revisitar algumas das estratégias usadas pelos alunos durante a experiência e perceber que tipos de erros ainda persistem nas estratégias que apresentam.

Na parte 1 da tarefa 10, em a) a situação contextualizada envolve o conceito de frequência relativa em que os alunos podem recorrer a uma expressão de valor em falta para resolver problema situação e pensar na reconstrução da unidade, tal como realizado em questões da parte 2 da tarefa 4; em b) surgem duas representações diferentes de um número racional e os conceitos de “metade” e quarta parte onde é necessário reconstruir o todo; em c) tal como na tarefa 8, surge a fração como operador; e em d) a diferença entre numerais decimais como na tarefa 4.

Na parte 2, em g) uma situação de adição/subtração de frações e de comparação onde a expressão que resolve esta situação é semelhante às apresentadas e discutidas na tarefa 1; em h) o produto entre um numeral decimal e uma fração tal como realizado na tarefa 3; em i) uma situação envolvendo percentagens e que pode ser resolvida com recurso a expressões apresentadas na tarefa 7; e em j) o quociente entre duas frações com denominadores múltiplos um do outro como realizado na tarefa 2.

**Tarefa 10**

**Parte 1**

$a$) Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, qual a frequência relativa da face nacional?

$b$) Na turma da Rita $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e $25\%$ pratica natação. Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade?

$c$) Diariamente, 400 alunos almoçam no refeitório da escola do João. Destes alunos, $\frac{3}{4}$ comem sempre sopa. Quantos alunos comem sopa?

$d$) Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de $30{,}2°$ e a temperatura mínima de $15{,}9°$. Qual a amplitude térmica?

**Parte 2**

$e$) A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$ .Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?

$f$) A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com $8{,}16\ m$ retirou $\frac{1}{8}$ . Que porção de tecido usou?

$g$) Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. Calcula o valor do desconto.

□) A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $\frac{3}{4}l$ de refresco?

Figura 13. Tarefa 10 do ciclo de experimentação I.

#### 5.2.2.4. Condução da experiência de ensino

No que respeita à condução da realização das tarefas de cálculo mental na sala de aula, considero que as interações sociais, principalmente as que se verificam durante as discussões coletivas, são fundamentais para a aprendizagem da Matemática em geral e para o desenvolvimento de estratégias e clarificação de erros dos alunos em particular. Estas interações promovem a reflexão e ajudam o aluno a dar sentido aos conceitos matemáticos abordados. É nos momentos de discussão coletiva que os alunos têm oportunidade para partilharem como pensam quando calculam mentalmente, evidenciando estratégias e erros, e apresentarem os seus argumentos e justificações que serão validados pelos seus pares, sendo o professor um elemento indispensável na gestão desta discussão. Saber ouvir os alunos, questioná-los, compreender as suas estratégias, erros, confrontar ideias matemáticas semelhantes ou divergentes e promover interações na sala de aula é uma aprendizagem para o professor. Neste sentido, o professor deve: (i) criar um ambiente de sala de aula onde os alunos se sintam à vontade para falar das suas estratégias; (ii) escutar atentamente as suas explicações acerca dos seus métodos de cálculo pessoais; (iii) ser capaz de identificar estratégias particulares dos alunos e reforçar positivamente o seu uso; (iv) valorizar o conhecimento sobre os números e a capacidade dos alunos para executarem estratégias eficientes; e (v) assegurar que os alunos passam por experiências suficientes que lhes permitem desenvolver progressivamente estratégias cada vez mais sofisticadas (Thompson, 2009). Brocardo (2011) acrescenta ainda que o professor deve estar atento às diversas situações, durante a aula de Matemática, onde o uso do cálculo mental é adequado devendo gerir este uso com o da calculadora.

A promoção de um ambiente de aprendizagem com estas características deve assentar numa preparação cuidada dos momentos de discussão coletiva na sala de aula. Esta preparação deve ter em conta os objetivos da tarefa, as características dos alunos e a antecipação das suas possíveis estratégias e erros. Esta antecipação ajuda o professor a refletir relativamente ao como e porquê questionar os alunos e em que momentos. Neste sentido, considerei essencial, preparar cada tarefa em conjunto com as professoras em cada um dos ciclos de experimentação, antecipando possíveis estratégias e erros baseando-nos na literatura (e.g., Caney & Watson, 2003; Lamon, 2006; Monteiro & Pinto, 2007; Parker & Leinhardt, 1995), mas também na experiência profissional de cada uma e no que vamos vivenciando em cada sessão de cálculo mental. O ponto de partida desta antecipação encontra-se no Anexo O.

Outro aspeto importante a considerar nas discussões coletivas é o questionamento do professor. Na perspetiva de Ponte, Branco, Quaresma, Velez e Mata-Pereira (2012), este deve ser sucessivo e constante de forma a incentivar e esclarecer o aluno ao longo da sua atividade matemática. Pelo seu lado, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) identificam quatro tipos de ações fundamentais a que o professor pode recorrer para incentivar e esclarecer os alunos ao longo da sua atividade matemática: convidar, desafiar, apoiar/guiar e informar/sugerir. Na sua perspetiva, convidar tem em vista envolver os alunos num dado segmento da discussão, guiar/apoiar ocorre quando o professor aponta de modo explícito ou implícito o caminho a seguir na resolução de uma questão, informar/sugerir ocorre quando o professor introduz uma nova ideia, representação ou procedimento e desafiar tem lugar quando o professor coloca questões aos alunos procurando que façam novos raciocínios. Estes autores acrescentam ainda que a discussão coletiva de tarefas que promovam a reflexão dos alunos é fundamental para explorar e dar sentido aos conceitos matemáticos e consequentemente para a aprendizagem da Matemática. É nesta perspetiva e com o intuito de apoiar os alunos nos momentos de discussão coletiva que em conjunto com as professoras antecipámos possíveis questões a colocar aos alunos, tais como: Como pensaste? Como chegaste ao teu resultado? O que pensam da estratégia do colega? Quem consegue explicar o erro do colega? Em que aspeto é que a tua estratégia é diferente da do teu colega?

Tendo em conta que a comunicação matemática oral é, neste caso, a única forma de aceder ao raciocínio dos alunos, uma vez que estes realizam cálculo mental temporizado e que o registo em papel, na sua maioria, resume-se ao resultado da operação, o questionamento por parte do professor é indispensável para a concretização de uma comunicação assente numa perspetiva dialógica (Matos & Serrazina, 1996). Nesta perspetiva, o professor questiona os alunos encorajando-os a assumirem um papel ativo na aprendizagem, fazendo-os perceber que é importante aprender a questionar o pensamento aos colegas de modo a clarificarem ideias matemáticas, contribuindo assim para a construção de um reportório de estratégias de cálculo mental.

Em suma, a condução da experiência de ensino na sala de aula, teve subjacente uma preparação cuidada entre investigadora e professoras em cada um dos ciclos de experimentação. Esta preparação contemplou a resolução e análise de cada tarefa e seus objetivos e a antecipação de possíveis estratégias e erros dos alunos e questões a colocar no momento de discussão, cujo intuito era clarificar raciocínios e promover interações na sala de aula.

# Capítulo 6

# Experimentação na sala de aula

Neste capítulo descrevo a forma como a realização de cada um dos ciclos de experimentação influenciou o refinamento do *design* da experiência de ensino, no que se refere às tarefas e à gestão da discussão na sala de aula, e do quadro concetual. Apresento também a evolução da conjetura de ensino-aprendizagem. Esta descrição é baseada nas reuniões de preparação e reflexão pós-aula com as professoras em cada um dos ciclos de experimentação.

## 6.1. Primeiro ciclo de experimentação

### 6.1.1. Aspetos gerais

A tarefa de diagnóstico foi o ponto de partida para uma abordagem ao cálculo mental com números racionais, não só para os alunos da turma M, mas também para Margarida. Esta tarefa permitiu mostrar à professora, mais uma vez, as potencialidades do cálculo mental, apesar de já termos tido algumas conversas informais acerca da experiência que iríamos desenvolver.

Após seleção da turma e reflexão acerca da aula de diagnóstico, Margarida disponibilizou as planificações para a disciplina de Matemática a médio e longo prazo. Partindo das planificações, organizei uma proposta com 10 tarefas de cálculo mental com números racionais (ver capítulo 5) que posteriormente passaram as ser 11 tarefas, por sentirmos necessidade de incluir uma tarefa extra, de revisão, na primeira aula do 3.º período.

Tendo em conta que entre fevereiro e maio de 2012 Margarida iria abordar com os alunos os tópicos relações e regularidades, volumes e organização e tratamento de dados (OTD) propus primeiro tarefas com a representação fracionária, depois com a representação decimal e, finalmente, com percentagem, para que a representação dos números racionais usada no cálculo mental, se aproximasse o mais possível da usada pelos alunos nas restantes aulas de Matemática a decorrer na mesma altura. Relembro que estas são as representações mais fortes nestes tópicos e que o objetivo era integrar o cálculo mental no percurso de aprendizagem dos alunos. Finalizada a proposta de sequência de tarefas, agendámos um conjunto de sessões de preparação para discussão e planificação da experiência de ensino, que foram sendo intercaladas com sessões de reflexão pós-aula (Tabela 3).

Tabela 3. Calendarização de sessões de preparação de tarefas e reflexão pós-aula no ciclo de experimentação I.

| Mês / Dia | Jan. | Fev. | | | Mar. | | Abr. | | Mai. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **23** | **8** | **15** | **29** | **7** | **22** | **11** | **18** | **3** | **9** | **16** | **23** |
| Preparação | | | | | | | | | | | | |
| Reflexão | | | | | | | | | | | | |

Ao longo de 5 sessões de preparação e 11 de reflexão pós-aula discuti com Margarida diversos aspetos referentes à experiência de ensino (tarefas e gestão da discussão na sala de aula). As sessões de preparação iniciaram-se com a análise e discussão de algumas ideias e conceitos acerca, do cálculo mental em geral e dos números racionais em particular, que sistematizei de leituras que realizei bem como do quadro concetual de apoio ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos que tinha desenvolvido até ao momento. Discutimos aspetos concetuais, como a diferença entre erro e dificuldade e o sentido de número, mas também aspetos mais práticos em termos de estratégias e erros dos alunos, tendo por base a experiência de Margarida e o conhecimento que possuía sobre a turma M. Pretendia assim que a professora se apropriasse de um conjunto de ideias e conceitos indispensáveis à condução das aulas de cálculo mental, de forma a sentir-se mais preparada para discutir e questionar os alunos. Nestas sessões de preparação centrámo-nos fundamentalmente na análise da proposta de tarefas e seu objetivo, nomeadamente nos números, nas relações numéricas que poderiam potenciar, na antecipação de estratégias e erros dos alunos e na constante relação entre o que se iria desenvolver com a realização da experiência de ensino e as restantes aulas de Matemática. Sempre que considerámos necessário procedemos a ajustamentos nas tarefas, nomeadamente em termos dos números racionais usados, linguagem e ordem das questões. Apesar de haver abertura para realizar alterações mais profundas, Margarida nunca considerou necessário.

As 11 sessões de reflexão pós-aula realizaram-se logo após cada uma das aulas de cálculo mental, tendo por base um guião de reflexão (Anexo E) e regularam todo o processo de reajustamento das tarefas e de dinâmicas desenvolvidas na sala de aula, como explicarei adiante. De um modo geral, em cada sessão refletimos sobre a forma como correu a aula na generalidade, a adequação do tempo, as estratégias, erros e dificuldades manifestadas pelos alunos, o contributo de cada uma das aulas de cálculo mental para o tópico matemático que Margarida estava a abordar nas restantes aulas de Matemática, pontos a melhorar na gestão da discussão e pontos fortes e fracos da aula. A reflexão decorreu num registo flexível, num ambiente natural onde, por vezes, sentimos necessidade de discutir aspetos que nos pareceram importantes, embora não constassem dos tópicos de reflexão, como a prestação individual de alguns alunos. As notas de campo que produzi durante as aulas de cálculo mental tiveram um papel importante para as sessões de reflexão pós-aula, pois ajudaram-me a focar a discussão em aspetos sobre os quais considerei importante refletir (e.g., uma dada estratégia ou erro dos alunos) e que pudessem influenciar o *design* da experiência de ensino.

### 6.1.2. Refinamento do *design* da experiência de ensino

As 16 gravações áudio referentes às sessões de preparação e reflexão pós-aula forneceram inúmeras informações acerca da forma como decorreu este primeiro ciclo de experimentação. No entanto, nesta secção apresento apenas os aspetos mais significativos deste ciclo e que mereceram uma reflexão mais atenta da nossa parte (quer na preparação quer na reflexão pós-aula) e que, de algum modo, influenciaram o refinamento da experiência de ensino no que se refere à estrutura e conteúdo das tarefas e da gestão da discussão na sala de aula.

Os aspetos mais significativos que identificámos e que apresento de forma sintética no Quadro 7 relacionam-se com os diversos focos definidos aquando da planificação da experiência de ensino (ver capítulo 4) e com os tópicos que estiveram na base das nossas reflexões, ou seja, estratégias dos alunos, dificuldades e erros manifestados por estes e outros aspetos que, de algum modo, influenciaram o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e toda a dinâmica desenvolvida na sala de aula.

Quadro 7. Síntese dos aspetos mais significativos do ciclo de experimentação I.

| | |
|---|---|
| **Estratégias** | Aplicação frequente de procedimentos e regras memorizadas;<br>Pouco recurso a 10% como número de referência para o cálculo de percentagens. |
| **Erros** | Adição/subtração de numeradores e denominadores na adição/subtração de frações;<br>Mistura de procedimentos das quatro operações, na multiplicação e divisão de frações;<br>Recurso a 0,2 como representação equivalente a $\frac{1}{2}$;<br>Recurso à multiplicação para calcular o divisor numa divisão;<br>Recurso à multiplicação cruzada para adicionar duas frações equivalentes a metade;<br>Recurso à propriedade comutativa na subtração;<br>Operar com as partes inteira e decimal dos numerais decimais, recorrendo a operações diferentes. |
| **Dificuldades** | Uso de relações numéricas;<br>Contextualizar números de referência;<br>Sentido de operação multiplicação com numerais decimais;<br>Identificação do valor posicional dos algarismos;<br>Maior dificuldade em resolver situações contextualizadas do que expressões;<br>Aplicar conhecimentos a novas situações. |
| **Outros** | Tempo de realização da tarefa superior ao esperado;<br>Momentos de discussão longos e repetitivos;<br>Alunos pouco participativos;<br>Desconcentração/agitação dos alunos principalmente na parte 2 das tarefas;<br>Comunicação matemática oral. |

#### 6.1.2.1. As tarefas

Neste ciclo de experimentação I, foram poucas as alterações realizadas no conteúdo e estrutura das tarefas. Em termos de conteúdo, destaco a alteração na redação da última situação contextualizada da tarefa 6 e a tarefa 8, onde incluímos expressões de valor em falta. No que se refere à estrutura, a partir da tarefa extra inclusive, optámos por alternar expressões de valor em falta com expressões sem valor em falta nas partes 1 e 2 de cada tarefa. O mesmo aconteceu com a tarefa 10 onde alternámos situações contextualizadas envolvendo operações diferentes.

No que se refere ao conteúdo, na tarefa 6, a propósito do volume do cilindro e após análise da proposta inicial, eu e Margarida alterámos os números na situação contextualizada a apresentar aos alunos, para que se verificasse uma relação de triplo entre a medida da base do cilindro e a medida do seu volume (Figura 14).

**Tarefa 6**

Parte 2

***h***) A área da base de um cilindro é $4{,}2\ m^2$ e o seu volume $12{,}6\ m^3$. Calcula a altura.

Figura 14. Situação h) da tarefa 6 para o ciclo de experimentação I.

Na tarefa 8, a primeira proposta apresentada a Margarida não continha expressões de valor em falta. Por considerar que este tipo de expressões proporciona e têm proporcionado discussões interessantes, Margarida sugere que as incluamos na tarefa 8, pelo que decidimos alterar a tarefa em conjunto, para que se mantivesse a mesma estrutura das tarefas anteriores (Figura 15) e se continuasse a promover momentos de discussão coletiva interessantes, em torno deste tipo de expressões. Nesta alteração, a professora considerou particularmente interessante a expressão "_% de 30 = 0,3" pois permite trabalhar percentagens mais pequenas, explorar a centésima parte e a relação entre 30 e 0,3 a partir de uma questão de grau de dificuldade superior à inicialmente prevista. Mais tarde verificámos que a riqueza desta expressão ia para além do que a professora antecipou, tendo potenciado a apresentação de uma generalização por parte de um aluno.

Tarefa 8

Parte 1

$a)\ \frac{3}{4}\ de\ 60\ \ b)\ \frac{1}{2}\ de\ ? = 0{,}9\ \ c)\ 0{,}2\ de\ 10\ \ d)\ 0{,}25\ de\ ? = 10\ \ e)\ \frac{1}{3}\ de\ 20$

Parte 2

$f)\ 20\%\ de\ 50\ \ g)\ \_\%\ de\ 20 = 18\ h)\ \frac{1}{3} de\ \frac{1}{3}\ \ i)\ \frac{1}{5}\ de\ ? = 8\ \ j)\ \_\%\ de 30 = 0{,}3$

Figura 15. Tarefa 8 para o ciclo de experimentação I.

Do ponto de vista da estrutura das tarefas, decidimos, a partir da tarefa extra intercalar expressões com e sem valor em falta. Esta foi uma proposta que fiz a Margarida, pelo facto dos alunos não estarem aparentemente a revelar melhorias na sua prestação, da primeira para a segunda parte em cada uma das tarefas. Relembro que a proposta inicial de tarefas continha duas partes (parte 1 e parte 2), a parte 1 com expressões sem valor em falta que depois de resolvidas individualmente eram alvo de discussão coletiva e uma parte 2, com expressões de valor em falta sobre as quais se dinamizava novo momento de discussão coletiva, após resolução individual dos alunos. Era nossa intenção desde o início da experiência que o primeiro momento de discussão influenciasse positivamente a realização da segunda parte da tarefa, o que nem sempre aconteceu. Margarida aceitou a proposta e considerámos pertinente fazer esta mudança a meio da experiência, na tarefa extra e não numa tarefa onde nova representação do número racional fosse introduzida. Isto para que não se verificassem diversas mudanças em simultâneo. Assim, surgiu a inclusão de uma tarefa extra (Figura 16) na experiência de ensino, envolvendo as quatro operações e as representações fracionária e decimal que foi realizada no início do 3.º período. O objetivo desta tarefa era, não só rever conhecimentos previamente discutidos com os alunos em tarefas anteriores, mas também coordenar as abordagens realizadas nas aulas de cálculo mental com a planificação de Margarida.

Tarefa extra

Parte 1

$a)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\ \ b)\ 1-?=\frac{1}{4}\ \ c)\ \frac{2}{5}\times 0{,}5\ \ d)\ \frac{4}{5}\ \div ?=\frac{1}{5}\ \ e)\ \frac{1}{5}+0{,}3$

Parte 2

$f)\ \frac{7}{14}+\frac{1}{2}=\ 0{,}75\ \ g)\ 2{,}8-?=0{,}9\ \ h)\ \frac{6}{8}\div\ \frac{3}{4}\ \ i)\ \frac{1}{2}\times ?=\frac{1}{4}\ \ j) 1{,}5\ \div\frac{1}{3}$

Figura 16. Tarefa extra para o ciclo de experimentação I.

Esta alternância de expressões foi realizada igualmente nas tarefas 7 (Figura 17), 8 (Figura 15) e 9 (Figura 18) a partir da reorganização das tarefas inicialmente propostas.

Tarefa 7

Parte 1

$a)\ 50\%\ de\ 40\ \ b)\ 25\%\ de\ ?=20\ \ c)\ 10\%\ de\ 350\ \ d)\ 30\%\ de\ ?=15\ \ e)\ 90\%\ de\ 30$

Parte 2

$f)\ 50\%\ de\ ?=60\ \ g)\ 25\%\ de\ 20\ \ h)\ 10\%\ de\ \ ?=5\ \ i)\ 75\%\ de\ 80\ \ j)\ 5\ \%\ de\ ?=3$

Figura 17. Tarefa 7 para o ciclo de experimentação I.

Tarefa 9

Parte 1

$a)\ \frac{5}{10}+\frac{1}{4}\ \ b)\ \frac{6}{12}+?=1\ \ c)\ 0{,}68-0{,}2\ \ d)\ 2{,}2-\frac{1}{5}\ \ e)\ \frac{4}{6}\times\frac{6}{7}$

Parte 2

$f)\ \frac{2}{3}\times ?=1\ \ g)\ \frac{9}{10}\div\frac{3}{10}\ \ h)\ 0{,}75\div 3\ \ i)\ 75\%\ de\ 20\ \ j)\ 20\ \%\ de\ ?=8$

Figura 18. Tarefa 9 para o ciclo de experimentação I.

A última tarefa da experiência (tarefa 10) continha situações contextualizadas que poderiam ser traduzidas por expressões com ou sem valor em falta semelhantes a outras expressões previamente discutidas com os alunos. Pretendíamos com esta tarefa ajudar os alunos, mais uma vez, a estabelecerem relações entre a situação e as representações simbólicas que as podem resolver. Partindo da proposta inicial, optámos por alternar, nas partes 1 e 2 da tarefa, situações contextualizadas envolvendo diferentes operações para reforçar a ideia de que o aluno tem de saber escolher a operação adequada para cada situação (Figura 19). Inicialmente as situações contextualizadas envolvendo adição e subtração estavam apenas na parte 1 e as envolvendo multiplicação e divisão na parte 2 da tarefa.

---

**Tarefa 10**

**Parte 1**

$a$) Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, qual a frequência relativa da face nacional?

$b$) A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com $8{,}16\ m$ usou $\frac{1}{8}$ . Que porção de tecido usou?

$c$) A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$ .Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?

$d$) Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. Calcula o valor do desconto.

**Parte 2**

$e$) Diariamente, 400 alunos almoçam no refeitório da escola do João. Destes alunos, $\frac{3}{4}$ comem sempre sopa. Quantos alunos comem sopa?

$f$) A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $\frac{3}{4}l$ de refresco?

$g$) Na turma da Rita $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e 25% pratica natação. Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade?

$h$) Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de $30{,}2°$ e a temperatura mínima de $15{,}9°$. Qual a amplitude térmica?

---

Figura 19. Tarefa 10 para o ciclo de experimentação I.

Apesar da mudança na estrutura das tarefas (desde a tarefa extra), a discussão da parte 1 continuou a deixar os alunos muito agitados, não se verificando de imediato e na maioria dos alunos, melhorias significativas no número de respostas corretas e no recurso a relações discutidas na parte 1 e na parte 2. Apenas alguns alunos, ao longo da experimentação, mostraram usar, na parte 2, conhecimentos discutidos na parte 1. Contudo, a longo prazo, verificámos que o facto de os alunos não responderem a uma dada questão não implicava não terem uma estratégia, pois posteriormente durante a discussão coletiva conseguiam apresentar à turma uma estratégia de resolução para questões às quais não tinham respondido durante os 15 ou 20 segundos. A consecutiva agitação dos alunos, após cada momento de discussão, levou-nos a questionar a necessidade de fazer nova mudança e a ponderar a possibilidade de ter apenas um momento de discussão. Margarida considera que a aprendizagem dos alunos se tem vindo a verificar ao longo da experiência e não tanto no imediato, como refere: "Desde o início houve melhoria. Isso houve. Percebe-se que há melhoria. Não pode ser também num ano". Acrescenta ainda que não devemos ser demasiado ambiciosas uma vez que os alunos não tinham hábitos de cálculo mental com números racionais. Esta experiência tem sido uma aprendizagem para os alunos e até para ela enquanto professora, como faz questão de referir diversas vezes ao longo das várias sessões de preparação e reflexão pós-aula. Concordo com Margarida e considero notória a forma como os alunos vão conseguindo apresentar raciocínios gradualmente mais complexos e se vão lembrando das estratégias uns dos outros e estabelecendo relações entre expressões realizadas noutras tarefas. Neste sentido, decidimos manter as tarefas divididas em duas partes com momentos de discussão após a realização individual de cada parte.

Quando questionada acerca da estrutura global das tarefas, Margarida considera que foi importante os alunos realizarem primeiro cálculo mental envolvendo expressões e só depois situações contextualizadas, o que lhes possibilitou estabelecerem relações entre estes dois contextos de forma gradual, algo que manifestaram dificuldade no início da experiência. A versão final de algumas das tarefas projetadas em *PowerPoint* no ciclo de experimentação I encontra-se em Anexo (Anexo P).

#### 6.1.2.2. Gestão da discussão na sala de aula

A gestão da discussão na sala de aula foi alvo de um maior número de reajustamentos quando comparada com os realizados nas tarefas, isto porque era através das discussões coletivas que percebíamos a adequação das tarefas e a forma como as variáveis dependentes e independentes definidas para este estudo estavam a influenciar o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos.

O tempo de realização das tarefas foi uma das nossas primeiras preocupações. Este inicialmente estava previsto ser de 15 minutos (realização individual - 1 minuto e meio; discussão - 13 minutos e meio), mas o interesse dos alunos e a diversidade de estratégias produziu discussões tão interessantes que rapidamente constatámos não ser possível cumprir o tempo previsto. O número de questões de cada tarefa poderá ter contribuído igualmente para que estes momentos se tornassem mais demorados. Este foi um dos aspetos discutidos com Margarida, tendo surgido a hipótese da redução do número de questões por tarefa, mas a professora considerou que o número de questões se deveria manter, salientando que as aulas de cálculo mental são boas oportunidades de aprendizagem para os alunos. Acrescenta ainda que 15 minutos nunca seriam suficientes para desenvolver o cálculo mental dos alunos numa fase inicial e desvaloriza o facto de se ocupar mais ou menos tempo da aula com tarefas de cálculo mental, pois considera que os momentos de discussão proporcionam uma grande riqueza de conhecimentos e são importantes para consolidar e/ou aprofundar os conhecimentos matemáticos dos alunos. Esta é uma perspetiva que Margarida mantém ao longo de toda a experimentação e que vai continuamente reforçando e relembrando. No entanto, expressa intenção de reduzir o tempo de realização da tarefa para 45 minutos, o que nem sempre foi conseguido. O tempo médio de realização das tarefas neste ciclo de experimentação esteve entre os 40 e os 90 minutos.

Se por um lado as discussões eram demoradas dada a qualidade da participação dos alunos e repetição desnecessária de estratégias, por outro, diversos erros no cálculo mental dos alunos foram identificados, onde era necessário intervir para clarificar conceções erróneas. A pouca participação nas discussões coletivas de alguns alunos, também foi um aspeto que nos foi preocupando ao longo da experiência. Assim, decidimos que durante a discussão coletiva das estratégias dos alunos, Margarida deveria questionar mais os alunos, em especial os menos participativos (e.g., Como fizeste? Quem é que usou a mesma estratégia? Quem usou uma estratégia diferente? Quem seguiu esta [estratégia]?) para fomentar a participação do maior número possível de alunos e assim contribuir para a melhoria da prestação destes no cálculo mental.

A prática de questionar os alunos, sempre foi um aspeto muito presente nas discussões de sala de aula, quer para os incentivar a tornarem explicitas as suas estratégias quer para os ajudar a clarificar conceções erradas acerca dos números racionais e suas operações. Esta estratégia de ação foi-se revelando adequada, na medida em que potenciou a participação de alunos menos participativos e contribuiu para momentos de discussão menos longos e repetitivos, apesar da diversidade de estratégias apresentadas ser uma constante. Para Margarida, o facto dos momentos de discussão estarem a ser gradualmente menos repetitivos e longos também pode ser sinal de que os alunos estão a evoluir na forma como usam e comunicam os seus raciocínios. De salientar que no início da experiência, os alunos revelaram algumas dificuldades na comunicação matemática oral, apresentando por vezes explicações incompletas dos seus raciocínios ou até demasiado confusas. Esta situação aliada à dificuldade em ouvir os outros também contribuiu para a morosidade das discussões. Esta perceção fez com que Margarida manifestasse uma necessidade contínua de questionar os alunos sem validar respostas e de os incentivar a ouvirem os colegas e a serem críticos perante as estratégias e erros apresentados. A par disto e porque nos momentos de discussão diversas ideias matemáticas eram discutidas, sentimos necessidade de fazer uma breve revisão no início da aula seguinte, das estratégias usadas pelos alunos na última tarefa, para relembrar e reforçar estratégias usadas por estes, embora Margarida tivesse tido o cuidado de o ir fazendo ao longo da discussão.

Um olhar constante sobre o tipo de estratégias utilizadas pelos alunos, dos erros revelados e da forma como comunicavam os seus raciocínios, levou-nos a repensar e a ajustar de forma sistemática o modo como Margarida deveria intervir nos momentos de discussão. A aposta no questionamento aos alunos foi um dos aspetos que já realcei, mas a antecipação de possíveis estratégias e erros dos alunos nas sessões de preparação das tarefas, foram fundamentais e serviram de guia para a ação da professora quer no momento em que determinada tarefa estava a ser realizada, quer em futuras reflexões. Esta antecipação teve um papel importante na preparação da professora para a gestão da discussão coletiva de estratégias apresentadas pelos alunos.

No que se refere às estratégias de cálculo mental dos alunos, após a realização das duas primeiras tarefas percebemos que, de um modo geral, as estratégias destes nas operações com a representação fracionária se centravam em grande parte na aplicação de procedimentos e regras memorizadas, algo esperado, uma vez que os alunos não tinham o hábito de calcular mentalmente com números racionais. Era nosso objetivo contrariar esta tendência ajudando os alunos a transitar de estratégias baseadas em regras e procedimentos para outras mais centradas na mudança de representação e outras relações numéricas uma vez que estávamos a usar números de referência. A questão da mudança de representação sempre foi um aspeto bastante discutido em todas a sessões de preparação das tarefas e sobre o qual tivemos uma atenção especial nos momentos de discussão coletiva em sala de aula. O seu uso começou a ser mais frequente, por parte dos alunos, a partir da tarefa 3 quando à representação fracionária juntámos a decimal. O confronto entre estratégias dos alunos, a par de desafios lançados pela professora (apresentação de nova estratégia diferente das apresentadas pelos alunos) foi igualmente apoiando o fortalecimento da mudança de representação enquanto estratégia importante para o cálculo mental com números racionais. A inclusão da representação percentagem na tarefa 7 foi mais um contributo para o estabelecimento de equivalências entre representações dos números racionais.

A ênfase na mudança de representação fez emergir outro aspeto do ponto de vista das estratégias dos alunos, que me parece relevante salientar. Como referi anteriormente, no início da experiência os alunos recorriam muito à aplicação de procedimentos e regras memorizadas nas operações com frações. À medida que novas representações foram sendo introduzidas nas tarefas (decimal e percentagem), a preferência dos alunos centrou-se muito na mudança d representação decimal e percentagem para fração não para aplicarem procedimentos e regras, mas sim para recorrerem a estratégias mais concetuais. Por exemplo, no cálculo em vez de usarem 0,5 recorriam a $\frac{1}{2}$ por compreenderem que estão a usar o conceito de metade. Nas percentagens em vez de calcularem 25% recorrendo à multiplicação por 0,25, recorriam a $\frac{1}{4}$ pois sabiam que deviam calcular a quarta parte da quantidade à qual estavam a aplicar a percentagem.

O facto das estratégias dos alunos, no início da experiência, se revelarem muito procedimentais mereceu alguma reflexão da nossa parte. Para a professora o recurso frequente, por parte dos alunos, a estratégias deste tipo reflete um trabalho excessivo em torno da mecanização de regras e procedimentos, o que condiciona as estratégias dos alunos e pode levá-los a cometerem erros comuns, como o adicionar numeradores e denominadores na adição de frações ou o de misturarem procedimentos e regras memorizadas das quatro operações na multiplicação e divisão.

De um modo geral, Margarida considera que os alunos têm vindo a melhorar a sua prestação desde a aula de diagnóstico e que gradualmente vão apresentando maior variedade de estratégias, que passam pela mudança de representação, pelo uso de relações numéricas e da operação inversa, algo que destaca pois não esperava que surgisse com tanta frequência logo na tarefa 3. Ainda a propósito da tarefa 3 e a par da diversidade de estratégias, destaca o facto de ser visível "pouco algoritmo na cabeça [dos alunos], ou pouco cálculo desse estilo", um aspeto positivo e que considera revelador de evolução da aprendizagem dos alunos. Esta evolução poderá ter sido potenciada pela junção das representações decimal e fracionária, uma vez que os alunos não podendo operar diretamente com frações e numerais decimais numa mesma operação através da aplicação de uma regra memorizada, teriam de optar por uma das representações o que iria exigir o recurso à mudança de representação e a formas de operar diferentes dependendo da representação escolhida (decimal ou fração).

O erro sempre foi encarado como algo natural e potenciador de aprendizagem quando discutido em grande grupo. Todos os erros percecionados nas estratégias dos alunos foram amplamente discutidos na sala de aula apelando, por vezes, à validação ou refutação de uma dada estratégia por parte dos alunos bem como à perceção de determinados erros por parte destes. Erros como a adição/subtração de numeradores e denominadores na adição/subtração de frações ou a mistura de procedimentos das quatro operações na multiplicação e divisão com esta representação dos números racionais, foram discutidos por diversas vezes na sala de aula. Alguns destes erros deixaram de aparecer nas estratégias de alguns alunos, continuando a surgir nas estratégias de outros pontualmente. O mesmo aconteceu com o uso da propriedade comutativa na subtração e o cálculo diferenciado com as partes inteira e decimal nos numerais decimais, em que alguns alunos realizaram operações diferentes com cada uma das partes. Estes foram erros pontuais, realizados quase sempre pelos mesmos alunos e que, infelizmente não desapareceram totalmente da prática dos alunos. Contudo, um dos erros detetados na tarefa de diagnóstico (adicionar décimas com centésimas na adição de numerais decimais) não voltou a surgir na experiência de ensino.

Outro erro comum dos alunos, e que começou a surgir mais ou menos a meio da experiência de ensino, foi o de considerarem no cálculo 0,2 como sendo equivalente a $\frac{1}{2}$ e 0,5 equivalente a $\frac{1}{5}$. Este erro levou-nos a questionar a influência de uma das variáveis independentes (suporte técnico utilizado). O facto de as tarefas serem apresentadas aos alunos através de um *PowerPoint* temporizado, em que estes apenas têm 15 segundos para resolver cada expressão, poderá originar este tipo de erro pela rapidez com que visualizam a questão e lhe têm de dar resposta. Margarida partilha desta opinião mas não considera este tipo de erro grave. Acrescenta ainda que se as tarefas não fossem temporizadas os alunos "não saiam do algoritmo". Concordo com o facto de este erro não ser grave pois quando questionados, os alunos reconhecem rapidamente o erro e redefinem a sua estratégia quando a apresentam à turma. Como verificámos, diversas vezes, que este não era um erro concetual mas provavelmente de visualização, nunca se colocou a hipótese de mudar o dispositivo de apresentação das tarefas aos alunos assumindo-se que esta poderia ser uma limitação do próprio dispositivo.

No que se refere às dificuldades dos alunos, logo na primeira tarefa, percebemos a dificuldade destes em contextualizar números de referência. Por exemplo, quando se referem a frações como $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ não manifestam relacioná-las com situações como o da divisão de uma piza ou a representação das horas num relógio de ponteiros. Margarida apresenta uma justificação para este facto referindo que os alunos "quando têm um número à frente veem-no como um ente e não lhes dão significado". Assim, a ação da professora, logo na primeira tarefa e porque esta dificuldade foi antecipada, foi no sentido de proporcionar aos alunos a criação de imagens mentais de frações de referência, trazendo para a discussão contextos familiares aos alunos, como os que referi anteriormente.

Mais tarde, nas tarefas 3, 6 e 10 da experiência de enino, a inclusão de situações contextualizadas vieram ajudar os alunos, segundo a professora, "a contextualizar os números", mas também trouxeram novos desafios e dificuldades. Para além de permitir dar sentido aos números, como refere Margarida, as situações contextualizadas apoiaram o desenvolvimento do raciocínio proporcional e o estabelecimento de conexões entre aprendizagens Matemáticas e outras realizadas em História e Geografia de Portugal (no caso das escalas).

Outra das dificuldades dos alunos foi a de usar determinadas relações numéricas nas suas estratégias (como a relação entre dividir por $\frac{1}{2}$ e multiplicar por 2). Margarida considera que isto se deve ao facto destas e de outras relações numéricas serem trabalhadas na sala de aula mas que, por não existir continuidade no seu uso, os alunos esquecem a sua utilidade e importância.

A dificuldade dos alunos em resolverem situações contextualizadas, detetada na tarefa 3, tornou-se ainda mais evidentes na tarefa 6 e foi-se mantendo até à última tarefa. A este propósito, questionei a adequação dos 20 segundos para a resolução de cada situação contextualizada. Margarida considerou que, embora alguns alunos pudessem necessitar de mais tempo, não é preocupante que errem ou não façam a questão por falta de tempo pois valoriza muito mais a aprendizagem que surge a partir da discussão, ideia com a qual estou de acordo.

Os alunos de Margarida sempre mostraram alguma facilidade em resolver expressões contudo, nas primeiras tarefas evidenciaram dificuldades em recorrer a imagens mentais de situações (contextos) que pudessem ajudá-los a representar e a compreender determinados números de referência (representações simbólicas) e nas tarefas mistas, esta relação entre o concreto (situações contextualizadas) e o abstrato (expressões) tornou-se ainda mais evidente. A necessidade de interpretar o contexto e a escolha da operação adequada para o resolver são aspetos que podem estar na origem das dificuldades dos alunos, uma vez que nas expressões não existe contexto e tudo está explícito quanto à operação a usar.

No primeiro e no último problema da tarefa 10, envolvendo os conceitos de frequência relativa e amplitude térmica, os alunos manifestaram dificuldades em mobilizar os conhecimentos matemáticos necessários para resolver as situações, embora estes já tivessem sido abordados na aula de Matemática. Através da discussão coletiva, verificámos dificuldades na interpretação da situação o que dificultou a escolha da operação, pois para o cálculo, já percebemos que os alunos possuem estratégias. No entanto, Margarida não tem a certeza se a maior dificuldade está na interpretação. Considera que na situação envolvendo o conceito de frequência relativa os alunos não perceberem o que se pretendia e na última situação da tarefa 10 não se lembraram o que fazer para calcular a amplitude térmica. Justifica esta sua posição referindo que, nas restantes situações os alunos andaram muito próximos da resposta correta acrescentando: “Se a estratégia está correta, interpretaram o problema". Margarida refere ainda que os alunos estão habituados a trabalhar com os conceitos envolvidos nas situações apresentadas e que a mudança de contexto pode ser uma das causas dos erros e dificuldades manifestadas, embora reconheça que é importante diversificar tarefas onde os mesmos conceitos surjam associados a diferentes contextos de forma a ajudar os alunos a mobilizar conhecimentos adquiridos. A mudança do contexto que Margarida refere, fez emergir mais uma vez a dificuldade dos alunos em aplicar conhecimentos prévios a novas situações. Algo que já tinha sido identificado na tarefa 7. Assim, acreditamos que a dificuldade dos alunos se associa, em parte, à interpretação da situação mas também à capacidade de mobilização de conhecimentos necessários para a resolver. Por exemplo, quando questionados, os alunos mostraram saber calcular $\frac{1}{4}$ de uma quantidade e conhecer que 0,25 é uma representação equivalente. Mas, ao ser pedido o cálculo de 25% de uma quantidade, os alunos por vezes não o conseguem realizar.

De entre as diversas discussões coletivas, houve duas ou três situações que mereceram especial atenção da nossa parte. Uma delas refere-se ao uso da multiplicação enquanto operação inversa da divisão. Por vezes, os alunos parecem assumir que para calcular um valor em falta numa divisão, recorre-se sempre à operação inversa, o que nem sempre é assim. No caso do valor em falta ser o divisor, os alunos devem dividir o dividendo pelo quociente. Na aula primeira aula em que surgiu esta discussão, Margarida recorreu a exemplos envolvendo números naturais para explicar aos alunos a relação entre as operações, ação esta que valorizei no momento da reflexão. Mais tarde na tarefa extra, esta questão voltou a surgir e a professora aproveitou esta oportunidade para voltar a explorar a relação entre as operações divisão e multiplicação, apostando mais uma vez no questionamento (para saber o divisor o que tenho de fazer? Para saber o dividendo o que tenho de fazer?). Esta situação fez-nos novamente refletir acerca da pertinência do desenvolvimento do cálculo mental em Matemática tendo em conta o seu contributo para a aprendizagem dos alunos no que se refere aos números e operações. Neste sentido, Margarida considera que as aulas de cálculo mental permitem detetar aspetos da aprendizagem dos alunos menos conseguidos, sendo isto um contributo importante para as restantes aulas de Matemática.

Outra discussão interessante surgiu na multiplicação de numerais decimais a respeito do sentido de operação. Na tarefa 5, esta discussão foi liderada em parte por um dos alunos (João) que apresentou as suas conjeturas (acerca da multiplicação entre dois numerais decimais menores que 1, um numeral decimal e um número natural e dois numerais decimais maiores que 1) quando na turma surgiram dúvidas acerca da grandeza do produto originado pela multiplicação de dois numerais decimais inferiores a 1. Baseando-se numa experiência vivida na aula de Matemática, a propósito do trabalho com áreas, o aluno explicou aos colegas o sentido de operação multiplicação com numerais decimais. Esta atitude de João fez-nos perceber que as experiências de aprendizagem que se proporcionam aos alunos são importantes para que estes criem modelos mentais de situações reais, suscetíveis de serem recuperadas mais tarde noutros contextos de aprendizagem. A ação deste aluno, foi fomentada por Margarida que sempre mostrou preferência por colocar os alunos a interagir uns com os outros permitindo que sejam eles próprios a produzir explicações e a validar os raciocínios uns dos outros.

As discussões coletivas enfatizaram a importância do uso de relações numéricas no cálculo mental com números racionais. Este foi um aspeto muito presente na preparação das diversas tarefas e que foi transposto para a sala de aula por Margarida através da valorização e confronto de estratégias diversificadas apresentadas pelos alunos, pela forma como conduziu a discussão da relação entre operações (no caso do uso da comutatividade na subtração e recurso à multiplicação para encontrar o divisor numa divisão) e do sentido de operação, que no caso dos numerais decimais também se relaciona com a compreensão do valor posicional dos algarismos. Esta ênfase no uso de relações entre números e operações foi tendo o seu reflexo, por exemplo, na tarefa 5 na estratégia em que Pedro evidencia o uso de pensamento relacional quando tenta generalizar e aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição na divisão, e na tarefa 8 onde Maria e Pedro nos surpreenderam com a estratégia que apresentam. Maria para calcular $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ recorreu à dízima infinita para realizar os cálculos, e respondeu 0,111… Esta estratégia mostra-nos que Maria se está a desprender de um trabalho que inicialmente era muito de aplicação de procedimentos e regras memorizadas. Pedro, para calcular "__% de 30 = 0,3", pensou em 10% de 10% para responder que a percentagem a aplicar a 30 era 1%. Mais uma vez generalizou conhecimentos que possuía acerca das frações (como metade de metade é $\frac{1}{4}$) e aplicou-os ao cálculo de percentagens.

A articulação entre o trabalho realizado nas aulas de cálculo mental e as restantes aulas de Matemática foi uma preocupação constante, para que a realização da experiência de ensino não fosse encarada como algo à margem das aulas de Matemática, mas sim como parte integrante dela. Ao longo da experimentação, foi possível identificar momentos das aulas de cálculo mental, particularmente importantes para as aulas de Matemática.

Logo na primeira tarefa, para adicionar $\frac{4}{8} + \frac{2}{4}$ (duas frações equivalentes a metade) um aluno realiza uma multiplicação cruzada, isto é, $4 \times 4\ e\ 8 \times 2$. Isto deu origem a uma exploração com frações na aula de Matemática seguinte, por iniciativa da professora, dando assim continuidade à abordagem do tópico relações e regularidades. A professora considera que este foi um momento rico para a aprendizagem dos alunos e que o professor deve estar atento às conjeturas dos alunos para as usar em prol da aprendizagem destes (como ela próprio fez na aula de Matemática seguinte). Estas oportunidades, segundo Margarida, permitem envolver os alunos no processo de descoberta, teste e validação de conjeturas de uma forma mais interessada, uma vez que esta oportunidade surgiu a partir das suas estratégias. Para além desta situação, a discussão do sentido de operação multiplicação e divisão com numerais decimais, que referi anteriormente, foram discussões que alertaram Margarida para a necessidade de continuar a abordar estas questões com os alunos nas restantes aulas de Matemática.

A integração e articulação do cálculo mental no percurso de aprendizagem dos alunos apesar de ter sido uma das nossas preocupações, parece não ter sido explícita para estes uma vez que, quase no final da experiência, estes mostraram não ter percebido que o cálculo mental estava a ser abordado de forma integrada e que a representação do número racional usada nas tarefas de cálculo mental estava relacionada com a do tópico que estavam a abordar em Matemática. Isto pode ser um sinal de que as aulas de cálculo mental não são vistas como uma continuidade das aulas de Matemática até porque a articulação tem-se verificado mais no sentido de cálculo mental para a aula de Matemática do que da aula de Matemática para o cálculo mental. A este propósito, sugeri a Margarida que promovesse uma articulação mais visível para os alunos e que incluísse, por exemplo, nas fichas de avaliação questões que apelassem ao cálculo mental. Esta foi uma sugestão bem aceite pela professora que referiu que iria dar mais atenção a questões que envolvessem cálculo mental na próxima ficha de avaliação. De salientar que já na tarefa 5, a professora tinha manifestado intenção em incentivar os alunos a usarem mais o cálculo mental e menos a calculadora, se os valores envolvidos assim o permitissem, nos problemas com volumes que iria realizar na aula de Matemática. Esta era uma forma de continuar a discutir o sentido de operação, algo que detetámos na aula de cálculo mental, como sendo necessário continuar a aprofundar.

Outro contributo importante do cálculo mental para a aprendizagem dos alunos e consequente necessidade de abordagem na aula de Matemática, surgiu aquando da tarefa 7, onde a representação percentagem foi introduzida nas tarefas. Na preparação desta tarefa, Margarida mostrou-se receosa com a inclusão da representação percentagem, por considerar que as percentagens, no 5.º ano, não ficaram devidamente consolidadas. Para minimizar esta preocupação de Margarida, sugeri-lhe que, quando iniciasse a abordagem a este tópico na aula de Matemática, começasse a estabelecer relações com o que já tínhamos previsto explorar na aula de cálculo mental com percentagens, como a interpretação de percentagens de referência no gráfico circular e a sua relação com o todo. Aquando da reflexão, acerca da tarefa 7, Margarida reconhece que a realização desta tarefa a ajudou a perceber e a confirmar que aprendizagens não tinham sido realizadas pelos seus alunos no 5.º ano e que a discussão do cálculo mental com percentagens ajudou a colmatar esta lacuna. Uma das surpresas foi, numa primeira fase de exploração da representação percentagem, o pouco recurso por parte dos alunos a 10%, como número de referência, para o cálculo de percentagens. Como forma de reforçar este aspeto, sugeri a Margarida que trabalhasse tabelas de frequência em que 10% fosse uma referência útil para completar outros valores da tabela através do cálculo mental. A professora considerou que o cálculo mental com a representação em percentagem irá ajudar os alunos a perceberem melhor a frequência relativa e a calculá-la com compreensão e não de forma mecânica. Acrescenta que, mecanicamente, o cálculo de 10% está interiorizado, mas que a sua compreensão não. Assim, concorda que o trabalho com tabelas de frequência e com o gráfico circular irá ajudar nesta compreensão e reforçar a importância da continuidade, nas restantes aulas de Matemática, de aprendizagens realizadas com a discussão das estratégias de cálculo mental dos alunos.

Ainda no âmbito das percentagens e após a tarefa 9, sugeri a Margarida a realização de uma tarefa na aula de Matemática, retirada da brochura Números racionais não negativos – tarefas para 5.º ano (Menezes, Rodrigues, Tavares & Gomes, 2008), utilizada como referência na implementação do Programa de Matemática de 2007. Esta tarefa denominada de "*Descontos de descontos*"( *Será que…*Um desconto de 30% sobre o preço inicial de um MP3 seguido de um novo desconto de 50% equivale a efetuar um desconto de 80% sobre o preço inicial?)surgiu na sequência da estratégia de Pedro para calcular "___% de 30 = 0,3" e com o objetivo de confirmar algumas das estratégias de cálculo mental que tinham sido discutidas até então. Margarida realizou a tarefa com os alunos e refere que estes não manifestaram dificuldades. Segundo a professora, os alunos arranjaram logo um valor para o MP3 e depois de pensarem um pouco, a maioria refere que não era o mesmo e que fazer um desconto maior uma única vez era melhor porque era sobre um valor superior. Os alunos não usaram calculadora e os seus registos parecem indicar que recorreram ao cálculo mental não sendo visível o recurso à representação decimal nem à fracionaria, como fez José (Figura 20), que recorre a uma estratégia de decomposição para calcular 30%, estratégia esta discutida nas sessões de cálculo mental.

A professora refere ainda que alguns alunos, nomeadamente Pedro (Figura 21), indicaram a subtração como operação a realizar (como, 100-80 correspondendo 100 a euros e 80 a percentagem). Quando questionado, o aluno sabe explicar que a 100€ retirava 80%, mas simbolicamente representou como 100€-80%. Esta situação evidencia dificuldades no registo simbólico de raciocínios, algo que na dinâmica de cálculo mental que temos vindo a desenvolver não se coloca porque a comunicação é essencialmente oral. Margarida partilha ainda que, nas aulas de Matemática, na abordagem a conceitos de OTD, os alunos usando 10% como referência, relacionaram números e a partir de uma frequência relativa calcularam os restantes valores sem usar calculadora, tal como lhe tinha sugerido anteriormente.

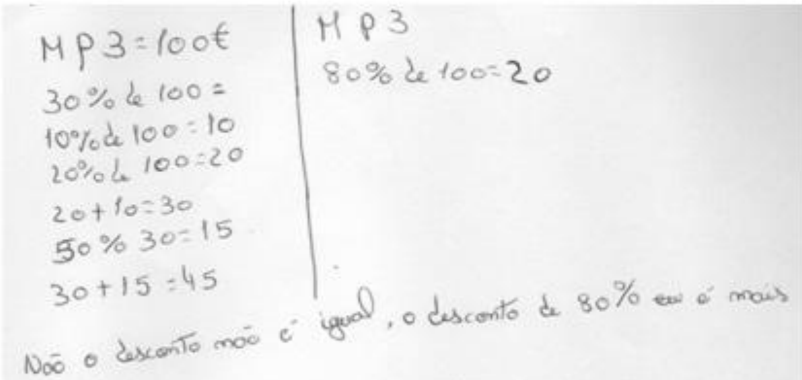



Figura 20. Estratégia de José para resolver o problema *Descontos de descontos.*

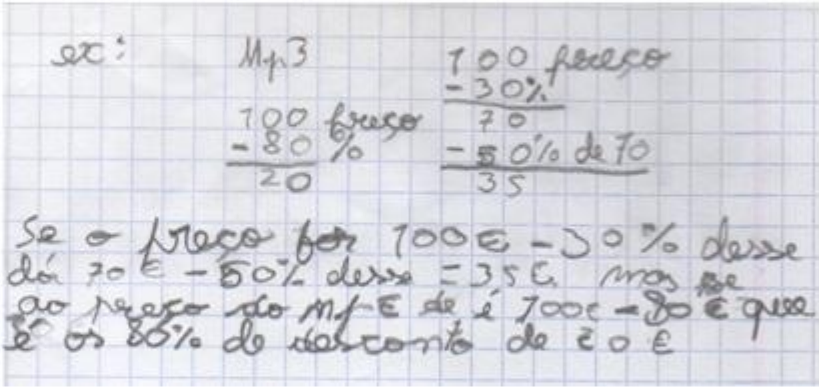



Figura 21. Estratégia de Pedro para resolver o problema *Descontos de descontos.*

A compreensão e uso de relações numéricas foi uma das mais-valias, reforçadas no cálculo mental com a representação em percentagem, que depois permitiu a abordagem que a professora referiu no âmbito das frequências relativas. A dificuldade dos alunos na compreensão e cálculo de percentagens originou uma concertação de esforços entre o que se discutiu no âmbito do cálculo mental e o trabalho posterior de Margarida nas restantes aulas de Matemática. Algumas lacunas na aprendizagem dos alunos, neste tópico, foram identificadas no cálculo mental e reforçadas na aula de Matemática e vice-versa.

Ao longo da experimentação eu e Margarida percecionámos algumas melhorias na prestação dos alunos no cálculo mental com números racionais. Algumas destas melhorias já foram referidas (no que se refere às estratégias e erros dos alunos) e basearam-se na perceção de factos concretos referentes à prestação dos alunos no cálculo mental e nas reflexões que realizámos ao longo de quase três meses de trabalho conjunto. No Capítulo 7 (e no caso particular de José no Capitulo 9) serão discutidas e apresentadas evidências da evolução das estratégias dos alunos ao longo deste ciclo de experimentação I, tendo em atenção a última questão deste estudo.

Ainda no que se refere às estratégias dos alunos, ao longo da experiência, estes foram-se identificando mais com um determinado tipo de estratégia referindo-a, por vezes, não como sendo baseadas numa propriedade das operações, por exemplo, mas como sendo a estratégia do João ou a do Luís. Verificámos também que, se os alunos conseguiam, no imediato, pôr em prática uma estratégia resolviam a questão, caso contrário não o faziam. Esta situação pode estar relacionada com o fator tempo. Tempo insuficiente para concretizar uma dada estratégia em 15 segundos ou para operacionalizar uma estratégia nova mais complexa do que aquela que tinham pensado inicialmente. Por diversas vezes, cerca de metade dos alunos que não tinha resolvido uma dada questão apresentava uma estratégia no momento de discussão coletiva. De salientar ainda que, alguns alunos mais persistentes, depois de conhecerem o resultado certo, tentavam manipular números e operações de forma a obterem o resultado conhecido mas usando uma estratégia diferente e novas relações numéricas. Considero esta atitude dos alunos positiva e mais um contributo para a descoberta e interiorização de novas relações numéricas. Na minha perspetiva e na de Margarida, esta interiorização foi facilitada pelo uso de expressões numéricas pequenas que centraram a atenção dos alunos em determinadas relações que posteriormente poderiam usar em cálculos mais complexos.

O processo de construção de estratégias de cálculo mental com números racionais, por parte dos alunos, foi muito para além de um trabalho individual e temporizado. Acima de tudo, foi uma construção coletiva muito baseada na discussão e confronto de ideias. Neste sentido, Margarida considera que as respostas certas ou erradas não refletem os conhecimentos dos alunos, uma vez que os momentos de discussão foram sempre muito ricos e interessantes. Acrescenta ainda, e tendo por base a sua experiência nesta experimentação, que o cálculo mental deve ser desenvolvido com alguma persistência para que os alunos possam consolidar conhecimentos e discutir estratégias.

Mas nem só de avanços se caracterizou esta experimentação. Sensivelmente a meio da experiência, quando esperávamos que os alunos recorressem, por exemplo, a representações mentais de números de referência para operar com frações menos comuns (neste caso que representam dízimas infinitas), surge um retrocesso inesperado. No cálculo da expressão $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ os alunos voltaram a recorrer à aplicação de regras memorizadas (algoritmo) numa fase em que já tinham mostrado ter alguma flexibilidade no trabalho com os números suas representações e operações. De salientar que Margarida considerou esta expressão difícil logo desde o momento da preparação da tarefa. O facto de, a expressão conter duas frações pouco usadas nas tarefas até então, pode ter levado os alunos a recorrerem a estratégias que usaram com maior frequência no início da experiência de ensino, não sentido assim segurança no recurso a relações numéricas ou outras representações (mentais, simbólicas, pictóricas). Voltaram à sua zona de conforto e adicionaram frações da forma que aprendem e sentem maior segurança.

No que respeita aos erros manifestados pelos alunos no cálculo mental, e apesar de alguns destes erros persistirem como já foi referido estes, no início da experiência, começaram por se relacionar mais com conceitos não adquiridos ou consolidados, sendo que, no final da experiência, a nossa perceção foi de que se relacionavam mais com pequenos erros de cálculo e falta de atenção. Como refere Margarida: “Continuo a achar que eles erram e depois têm uma estratégia correta. Eles erram mesmo o cálculo”. Esta foi a ideia que a professora defendeu nas últimas tarefas. De facto, os alunos muitas vezes apresentavam estratégias corretas mas resultados incorretos. Resultados estes muitas vezes próximos dos corretos. É disto exemplo o caso de Rui que, para realizar $0{,}75 \div \frac{1}{8}$, mudou a representação $\frac{1}{8}$ para 0,8 (um tipo de erro já referido) e a sua resposta foi aproximadamente 1. Na explicação de Rui percebemos que este identificou corretamente a operação a efetuar, que errou na mudança de representação, mas percebeu quantas vezes 0,8 caberia dentro de 0,75 aproximadamente, mostrando compreender o significado de divisão como agrupamento. Margarida considera que é um erro típico que mostra que os alunos têm um conceito errado o que, segundo ela, “quer dizer que o cálculo mental também bebe do conceito”, reforçando a ideia de que a compreensão concetual é importante para a realização de um cálculo mental rápido e flexível.

A falta de concentração dos alunos esteve muito presente ao longo de toda a experimentação. Por exemplo, verificámos que alguns alunos adicionavam quando a expressão indicava uma subtração. A professora assinala a desconcentração dos alunos como sendo algo difícil de contornar uma vez que a turma foi referenciada como tendo problemas de concentração.

A comunicação matemática oral e o sentido critico dos alunos foram aspetos onde percecionámos igualmente alguma evolução. No que se refere à comunicação, por vezes, os alunos falavam de forma tão rápida que era difícil compreender o seu raciocínio, uma vez que cometiam pequenos erros de linguagem ou apresentavam explicações incompletas. Isto levou a que Margarida reforçasse o questionamento com o intuito de ajudar a clarificar o discurso dos alunos e a explicação dos passos intermédios que estes ocultavam nas suas explicações. A melhoria do sentido crítico dos alunos foi-se revelando na forma como estes foram desencadeando discussões entre pares e onde o professor foi assumindo um papel de mero gestor da discussão. Estas discussões foram em grande parte impulsionadas por Margarida que ao vivenciar na tarefa 3 dois episódios de aula protagonizados por Ana, João e Pedro em que estes promoveram uma discussão na sala de aula sem a sua intervenção, sugeriu que se avançasse para uma nova fase nos momentos de discussão, a da promoção do confronto entre alunos, com o objetivo de serem eles a validarem ou a refutarem as estratégias apresentadas durante as discussões coletivas e não o professor.

### 6.1.3. Refinamento do quadro concetual

Ao longo do ano de 2012, a realização do ciclo de experimentação I veio reforçar a importância das tarefas e da comunicação, nomeadamente a discussão coletiva na sala de aula, para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos. As tarefas revelaram-se essenciais enquanto propostas de trabalho específicas que desafiaram os alunos a calcularem mentalmente e a desenvolverem um reportório de relações numéricas. A discussão na sala de aula revelou ser o meio privilegiado para aceder às estratégias e erros dos alunos e para discuti-las fomentando a construção coletiva de conhecimentos.

A análise preliminar dos dados recolhidos neste ciclo de experimentação, veio confirmar que o conhecimento de relações numéricas, regras memorizadas e factos numéricos são fundamentais para a realização de cálculo mental com números racionais, uma vez que estavam presentes nas estratégias dos alunos. Neste sentido, estes continuaram a ser elementos chave do quadro concetual em construção, sendo constituídos como categorias principais. Esta análise preliminar permitiu também perceber que novos elementos ganhavam importância nas estratégias dos alunos, tais como o recurso a imagens mentais de situações reais e/ou números de referência ou um conhecimento cada vez maior acerca dos números, operações e sua utilização em contextos diversos (sentido de número). A inclusão destes elementos deu origem a uma nova versão do quadro concetual (Figura 22).

No que se refere às imagens mentais, apesar dos alunos não recorrerem a elas com muita frequência, considerei importante incluí-las no quadro concetual por se basearem nas experiências destes e por isso, alicerçarem muitas das suas estratégias intuitivas no cálculo com números de referência. Este conceito foi alvo de aprofundamento ao longo da realização do ciclo de experimentação II.

Assim, no final do ciclo de experimentação I, o refinamento do quadro concetual foi influenciado, de um modo geral pela contínua revisão de literatura e de um modo particular por autores como Callingham e Watson (2004), Caney e Watson (2003), Heirdsfield (2011), McIntosh et al. (1992) e Thompson (1999, 2009). A análise preliminar dos dados recolhidos até ao momento, também apoiou este refinamento, como referi anteriormente.

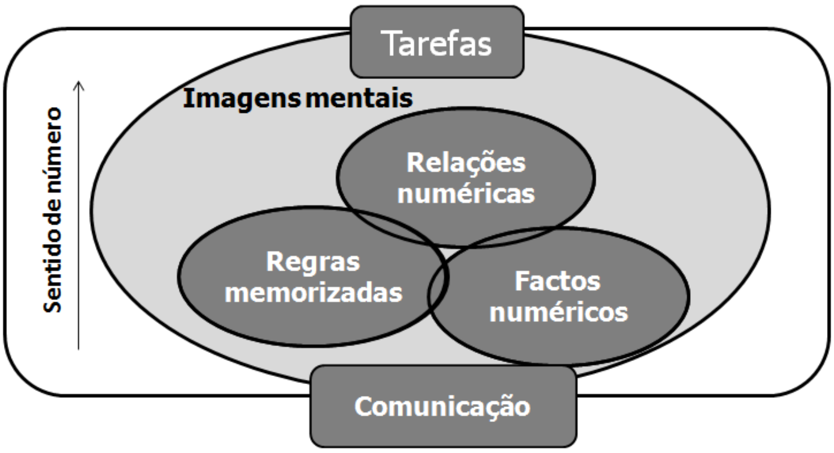



Figura 22. Segunda versão do quadro concetual.

### 6.1.4. Revisão da conjetura de ensino-aprendizagem

Neste ciclo de experimentação parti da conjetura de que uma experiência de ensino realizada durante dois períodos letivos, baseada em tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos e não matemáticos com números racionais positivos, envolvendo as quatro operações e centrada na discussão das estratégias e dos alunos no 6.º ano:

a) Permite aos alunos desenvolverem um reportório flexível de estratégias de cálculo mental;
b) Contribui para uma melhoria gradual do seu desempenho em tarefas de cálculo mental, levando-os a cometerem cada vez menos erros.

Apesar de esta conjetura não ter sido refutada após a realização do ciclo de experimentação I, esta revelou ser demasiado geral, tornando-se assim necessário aprofundar alguns aspetos, nomeadamente no que se refere às condições necessárias para que a) e b) se verifiquem. A experiência vivida durante a realização do primeiro ciclo de experimentação, no que se refere às dinâmicas desenvolvidas na sala de aula, bem como a análise preliminar das estratégias e erros dos alunos apoiou a definição de uma nova conjetura, mais específica onde se clarificam aspetos que considero essenciais para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos. Neste sentido a conjetura foi aprofundada e redefinida.

Assim, para o ciclo de experimentação II parti da conjetura de que os alunos do 6.º ano desenvolvem estratégias de cálculo mental com números racionais positivos nas quatro operações quando:

a) As tarefas envolvem diversos contextos e diferentes representações de um número racional, bem como diferentes níveis de exigência cognitiva;
b) Se promove a discussão coletiva das estratégias dos alunos com o intuito de partilhar e discutir os seus erros, bem como de construir um conjunto de relações numéricas que lhes permita aumentar o seu reportório de estratégias de forma a cometerem cada vez menos erros.

## 6.2. Segundo ciclo de experimentação

### 6.2.1. Aspetos gerais

Laura recorria ao cálculo mental, pontualmente, para realizar operações básicas na aula de Matemática, nomeadamente no âmbito da resolução de problemas. A experiência de cálculo mental com números racionais envolvendo uma dinâmica de discussão de estratégias e erros, surgiu pela primeira vez com a realização da tarefa de diagnóstico, realizada em dezembro de 2012. Após a realização desta tarefa, Laura disponibilizou as planificações a médio e logo prazo para a disciplina de Matemática (Anexo N). Como estas planificações, eram semelhantes (ondem de abordagem dos tópicos matemáticos) às fornecidas por Margarida no ciclo de experimentação I, a ordem pela qual as tarefas e respetivas representações dos números racionais iriam ser apresentadas aos alunos da turma L foi mantida do primeiro para o segundo ciclo de experimentação.

Tendo em conta a experiência que tive enquanto observadora participante e as reflexões que realizei individualmente e com Margarida durante o primeiro ciclo de experimentação, apresentei uma proposta de 10 tarefas a Laura, com a possibilidade de uma tarefa extra, caso se justificasse.

Antes de iniciarmos formalmente as sessões de trabalho conjunto, fizemos uma primeira versão de calendarização que contemplava 5 momentos de preparação e 10 de reflexão pós-aula. No final concretizaram-se 6 momentos de preparação e 15 de reflexão (Tabela 4) dadas as características da turma L e a necessidade de adequar e coordenar as abordagens desenvolvidas nas aulas de cálculo mental com as restantes aulas de Matemática.

Tabela 4. Calendarização de sessões de preparação de tarefas e reflexão pós-aula no ciclo de experimentação II.

| Mês / Dia | Jan. | | | | | Fev. | | Mar. | | Abr. | | | | | | Mai. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dia | 11 | 18 | 21 | 25 | 28 | 1 | 22 | 1 | 7 | 5 | 8 | 12 | 15 | 19 | 26 | 3 |
| Preparação | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Reflexão | | | | | | | | | | | | | | | | |

À semelhança do que aconteceu com Margarida, nas sessões de preparação, também Laura resolveu as tarefas propostas e em conjunto antecipámos e discutimos o objetivo de cada uma das questões, possíveis estratégias, erros e dificuldades dos alunos bem como a adequação das tarefas e sua articulação com os restantes tópicos matemáticos que iria abordar na aula. De salientar que, na primeira sessão de preparação, foram igualmente analisadas e discutidas com Laura algumas ideias e conceitos inerentes ao desenvolvimento do cálculo mental com números racionas dos alunos.

Tendo por base a experiência do ciclo de experimentação I, realcei desde logo algumas situações com que Laura se poderia deparar ao longo da experimentação, como por exemplo a dificuldade dos alunos em multiplicarem e dividirem numerais decimais. Era minha intenção, nesta primeira abordagem à experiência de ensino, colocar Laura a par de um conjunto de ideias e conceitos importantes para a condução das aulas de cálculo mental e para a reflexão acerca do trabalho que iria ser desenvolvido. Contudo, o assusto não se esgotou nesta primeira sessão de trabalho tendo sido abordado continuamente ao longo de todo o ciclo de experimentação.

As sessões de reflexão pós-aula realizaram-se, sempre que possível, após cada uma das aulas de cálculo mental e nos mesmo moldes que as do ciclo de experimentação I. A existência de um guião de reflexão (Anexo E) voltou a não inviabilizar a discussão de outros aspetos não contemplados nos tópicos de reflexão, mas que nos pareceram importantes para a análise e reflexão sistemáticas do trabalho dos alunos ao longo deste ciclo de experimentação II.

### 6.2.2. Refinamento do *design* da experiência de ensino

Ao longo de 6 sessões de preparação e 15 de reflexão pós-aula, e à semelhança do que aconteceu no primeiro ciclo de experimentação, diversos aspetos referentes à experiência de ensino (tarefas e gestão da discussão na sala de aula), foram discutidos com Laura. Nesta secção apresento apenas os aspetos mais significativos deste ciclo de experimentação II identificados por mim em conjunto com a professora Laura, que mereceram uma reflexão mais atenta e que, de algum modo, influenciaram o refinamento da experiência de ensino na estrutura e conteúdo das tarefas e na gestão da discussão na sala de aula. No quadro 8, apresento uma síntese dos aspetos mais significativos, tal como aconteceu no ciclo de experimentação I e que se referem às estratégias dos alunos, dificuldades e erros manifestados por estes entre outros aspetos.

#### 6.2.2.1. As tarefas

Neste ciclo de experimentação não houve necessidade de efetuar reajustamentos significativos no conteúdo das tarefas, mas sim na sua estrutura. No que se refere ao conteúdo apenas foi substituída uma ou outra palavra na redação das situações contextualizadas de forma a adequarem-se mais à linguagem dos alunos.

Quanto à estrutura das tarefas, houve dois fatores que influenciaram os reajustamentos efetuados. Um deles foi a minha experiência e conhecimento adquiridos enquanto observadora participante no ciclo de experimentação I e o outro, as características da turma de Laura, que dadas as dificuldades manifestadas no cálculo mental com números racionais, nos levou a reajustar continuamente a estrutura das tarefas propostas. Este último aspeto relaciona-se com uma das variáveis dependentes previamente definidas, a variável sistémica, que nos levou a adaptar a experiência ao contexto da turma L, uma vez que era diferente do da turma M e que por sua vez é influenciada pela variável independente – contexto/ambiente de aprendizagem. A primeira alteração realizou-se nas tarefas 1, 2 e 4, fruto da minha experiência no ciclo de experimentação I. A proposta que apresentei a Laura (Figuras 23, 24 e 25) tinha uma organização diferente da usada no primeiro ciclo de experimentação e teve por base uma opção que eu e Margarida tomámos a partir da quinta tarefa realizada no ciclo de experimentação I.

Quadro 8. Síntese dos aspetos mais significativos do ciclo de experimentação II.

| | |
|---|---|
| **Estratégias** | Aplicação frequente de procedimentos e regras memorizadas;<br>Ênfase no raciocínio aditivo;<br>Frequente recurso a imagens mentais de algoritmos escritos. |
| **Erros** | Adição/subtração de numeradores e denominadores na adição/subtração de frações;<br>Mistura de procedimentos da multiplicação na adição de frações;<br>Uso da propriedade comutativa na subtração;<br>Recurso frequente à operação inversa para calcular valores em falta em situações de divisão e subtração;<br>Operar com décimas e centésimas ignorando o valor posicional dos algarismos;<br>Erros de cálculo;<br>Recurso à multiplicação cruzada para adicionar duas frações equivalentes a metade;<br>Operar com as partes inteira e decimal, separadamente sem compreensão. |
| **Dificuldades** | Uso de relações numéricas;<br>Maior dificuldade em resolver expressões do que situações contextualizadas;<br>Transitar do concreto (situações contextualizadas) para o abstrato (simbólico);<br>Aplicar conhecimentos a novas situações;<br>Sentido de operação multiplicação com numerais decimais;<br>Compressão do conceito de fração;<br>Compressão do conceito de divisão e sua relação com a multiplicação;<br>Compreensão do significado de "a décima parte de";<br>Multiplicação e divisão de numerais decimais. |
| **Outros** | Diferente grau de dificuldade nas partes 1 e 2 das tarefas detetada no ciclo de experimentação I;<br>Tempo de realização das tarefas superior ao esperado;<br>Momentos de discussão longos e repetitivos;<br>Alunos pouco participativos;<br>Falta de concentração/atenção;<br>Falta de conhecimentos básicos de Matemática;<br>Comunicação oral (matemática e não matemática). |

Tarefa 1

Parte 1

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $b)? -\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$ $c)\ \frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ $d)\ \frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$ $e)\ \frac{1}{2}+\frac{2}{4}$

Parte 2

$f)\ \frac{1}{2}+?=1$ $g)\ \frac{4}{8}+\frac{2}{4}$ $h)\ \frac{3}{6}+?=1$ $i)\ \frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ $j)\ \frac{1}{2}+?=\frac{3}{4}$

Figura 23. Tarefa 1 para o ciclo de experimentação II.

Tarefa 2

Parte 1

$a)\ 5\times\frac{1}{5}$ $b)\ \frac{3}{4}\times ?=1$ $c)\ \frac{4}{6}\div\frac{2}{6}$ $d)\ \frac{1}{4}\div ?=\frac{1}{2}$ $e)\ \frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$

Parte 2

$f)\ \frac{2}{3}\times\frac{3}{2}$ $g)\ \frac{3}{4}\div ?=\frac{1}{4}$ $h)?\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ $i)\ \frac{4}{8}\div\frac{1}{2}$ $j)\ \frac{15}{20}\times ?=\frac{15}{2}$

Figura 24. Tarefa 2 para o ciclo de experimentação II.

Tarefa 4

Parte 1

$a)\ 0{,}5+0{,}25$ $b)\ 0{,}04+?=1$ $)\ 0{,}18-0{,}03$ $d)\ ?-4{,}3=0{,}5$ $e)\ 0{,}75+0{,}5$

Parte 2

$f)\ 1{,}25-?=0{,}75$ $g)\ 0{,}6+0{,}04$ $h)\ 0{,}7+?=1$ $i)\ 1{,}9-0{,}50$ $j)\ 0{,}07+?=0{,}84$

Figura 25. Tarefa 4 para o ciclo de experimentação II.

As tarefas usadas no ciclo de experimentação I continham expressões de valor em falta apenas na segunda parte da tarefa, mas a dificuldade dos alunos em melhorarem a sua prestação da parte 1 para a parte 2 em cada uma das tarefas, possivelmente associada ao grau de dificuldade que as expressões da parte 2 representavam quando comparadas com as da parte 1, fez com que eu e Margarida, a meio da experiência, decidíssemos misturar expressões com e sem valor em falta, apresentando assim tarefas com duas partes mais equilibradas no que se refere ao grau de dificuldade. Esta nova estrutura de tarefa foi apresentada a Laura e bem aceite por esta, pelo que fizemos a referida alteração. No que se refere à tarefa 3, que envolvia frações e numerais decimais com as quatro operações com expressões e situações contextualizadas, não sentimos necessidade de a alterar, pelo que mantivemos a proposta realizada no ciclo de experimentação I.

As situações contextualizadas apresentam, por norma para os alunos e de acordo com o que verifiquei no ciclo I, um grau de dificuldade superior ao das expressões. Contudo, neste ciclo de experimentação esta situação não se verificou muito, sendo as expressões as que mais erros desencadearam. Os alunos da turma L manifestaram ao longo de uma grande parte da experimentação, dificuldades na resolução de expressões em contextos matemáticos e no recurso a situações (contextos diversos) do seu conhecimento, que pudessem contextualizar as representações simbólicas apresentadas. Do meu ponto de vista e de Laura, esta situação representa uma dificuldade dos alunos em transitar do concreto para o abstrato. Na experiência de ensino, as situações contextualizadas surgem com o objetivo de dar sentido às representações simbólicas expressas por algumas expressões, mas, mais facilmente os alunos de Laura comparavam raciocínios usados entre situações contextualizadas do que entre situações contextualizadas e expressões em contexto matemático. Esta situação fez-nos ponderar a necessidade de recorrer a mais situações contextualizadas para reforçar a relação entre o concreto de uma situação e o abstrato das representações simbólicas que podem resolver essa mesma situação. Assim, aquando da reflexão pós-aula referente à tarefa 3, decidimos que a partir da tarefa 5 inclusive, iriamos ter sempre tarefas mistas (com situações contextualizadas e expressões).

No ciclo de experimentação I, tendo em conta que a dificuldade dos alunos de Margarida era contrária a esta manifestada pelos alunos de Laura, as tarefas mistas primeiro apresentavam expressões e só depois situações contextualizadas. Neste segundo ciclo de experimentação, Laura sugere o contrário, tendo em conta a dificuldade manifestada pelos seus alunos: "E se fizermos ao contrário. Começam os problemas e depois o simbólico?" Isto para podermos relacionar estratégias usadas pelos alunos em situações onde tinham maior facilidade de resolução (situações contextualizadas) com outras onde tinham revelado algumas fragilidades (expressões). Assim, as tarefas 5 (Figura 26) e 6 (Figura 27) surgem do desdobramento das tarefas 5 e 6 do ciclo de experimentação I e passa a ser constituída por 4 situações contextualizadas envolvendo conceitos de área, perímetros e capacidade, uma vez que Laura iria abordar o tópico volumes e 5 expressões com e sem valor em falta que simbolicamente se podiam relacionar com estas situações contextualizadas apresentadas.

Tarefa 5

Parte 1

$\boldsymbol{a}$) O avô do João já gastou $\frac{5}{10}$ da capacidade de um depósito de água na rega do jardim. Quanto lhe falta para esvaziar o depósito?

$\boldsymbol{b}$) O perímetro da face de um depósito cúbico é 8,8 $m$. Qual a medida do lado?

$\boldsymbol{c}$) A Rita construiu um cubo em que a área da base era $0{,}36\ m^2$. Qual a medida do lado?

$d$) Uma tina tem de capacidade $22{,}5\ l$ . Quantos baldes de $\frac{1}{2}\ l$ são necessários encher para despejar por completo a tina?

Parte 2

$e)\ 0{,}25 \times 4\ \ f)\ ? \times 0{,}4 = 0{,}16\ \ g)\ 12{,}2\ \div 0{,}5\ \ h)\ 25{,}5\ \times ? = 5{,}1\ \ i)\ 4{,}2\ \times 0{,}2$

Figura 26. Tarefa 5 para o ciclo de experimentação II.

Tarefa 6

Parte 1

$\boldsymbol{a}$) O Luís encheu $\frac{3}{6}$ de um depósito de água e a Joana 0,5 desse mesmo depósito. Quem colocou mais água no depósito?

$\boldsymbol{b}$) O sólido A tem 8,4 $l$ de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. Calcula a capacidade do sólido B.

$\boldsymbol{c}$) A área da base de um cilindro é $4{,}2\ m^2$ e o seu volume $12{,}6\ m^3$. Calcula a altura.

$\boldsymbol{d}$)A área da base de um paralelepípedo retângulo é de $12{,}4\ cm^2$ . Sabendo que a altura é $0{,}25\ cm$, qual o volume do paralelepípedo?

Parte 2

$e)\ 0{,}6\ \times 0{,}30\ f)\ 2{,}1\ \div ? = 8{,}4\ g)\ 0{,}14\ \div\ 0{,}2\ h)\ ? \times 0{,}5 =\ \ 30\ i)\ 0{,}82\ \div ? = 1{,}64$

Figura 27. Tarefa 6 para o ciclo de experimentação II.

Os consecutivos avanços e retrocessos na prestação dos alunos no cálculo mental fizeram com que sugerisse a Laura a realização de uma tarefa extra de revisão no início do 3.º período, à semelhança do que tinha feito na turma de Margarida. Esta tarefa, realizada entre as tarefas 5 e 6, pretendia apoiar o regresso dos alunos às dinâmicas de cálculo mental (após uma interrupção letiva) e perceber que aprendizagens discutidas na primeira parte da experiência de ensino conseguiam estes mobilizar, uma vez que iriam surgir operações e representações dos números racionais já exploradas anteriormente na sala de aula. A tarefa extra realizada no ciclo de experimentação II foi igual à realizada no ciclo de experimentação I. Seguindo a mesma lógica da estrutura das tarefas 5 e 6, reajustei a partir do desdobramento das tarefas 9 e 10 do ciclo de experimentação I, novas propostas de tarefas 9 (Figura 28) e 10 (Figura 29) para o ciclo de experimentação II. A versão final de algumas das tarefas projetadas em *PowerPoint* no ciclo de experimentação II encontra-se em Anexo (Anexo Q).

Tarefa 9

Parte 1

$a)$ A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$. Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?

$b)$ A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com $8{,}16\ m$ usou $\frac{1}{8}$. Que porção de tecido usou?

$c)$ Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. Calcula o valor do desconto.

$d)$ Diariamente, 400 alunos almoçam no refeitório da escola do João. Destes alunos, $\frac{3}{4}$ comem sempre sopa. Quantos alunos comem sopa?

Parte 2

$e)\ \frac{5}{10}+\frac{1}{4}$ $f)\ 2{,}2-?=\frac{1}{5}$ $g)\ \frac{9}{10}\div\frac{3}{10}$ $h)\ \frac{2}{3}\times ?=1$ $i)\ 20\%\ de\ ?=\ 8$

Figura 28. Tarefa 9 para o ciclo de experimentação II.

Tarefa 10

Parte 1

$a$) Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, qual a frequência relativa da face nacional?

$b$) Na turma da Rita $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e $25\%$ pratica natação. Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade

$c$) A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $0{,}75l$ de refresco?

$d$) Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de $30{,}2°$ e a temperatura mínima de $15{,}9°$. Qual a amplitude térmica?

Parte 2

$e)\ \frac{6}{12} + ? = 1 \quad f)\ 0{,}68 - 0{,}2 \quad g)\ 0{,}75 \div ? = 3 \quad h)\ \frac{4}{6} \times \frac{6}{7} \quad i)\ 75\%\ de\ 20$

Figura 29. Tarefa 10 para o ciclo de experimentação II.

#### 6.2.2.2. Gestão da discussão na sala de aula

O tempo médio de realização de uma tarefa de cálculo mental no ciclo de experimentação I situou-se entre os 40 e os 90 minutos, pelo que esperávamos que o mesmo acontecesse com a turma de Laura. Contudo, e ultrapassando todas as nossas expectativas, em algumas aulas, este tempo revelou-se insuficiente sendo necessário nas tarefas 1 (adição/subtração de frações), 2 (multiplicação/divisão de frações), extra (revisão das quatro operações com numerais decimais e frações) e 7 (percentagens) ocupar um bloco de 90 minutos mais meio bloco (45 minutos). Na origem desta situação estiveram vários fatores, entre eles as dificuldades de comunicação oral dos alunos (não apenas de comunicação matemática oral), a de estabelecerem conexões entre situações contextualizadas e representações simbólicas que pudessem resolver essas mesmas situações (o que levou à alteração da estrutura das tarefas, como referi anteriormente), falta de conhecimentos básicos de Matemática, falta de concentração e reduzida participação da maioria dos alunos.

A falta de alguns conhecimentos básicos de Matemática por parte dos alunos, desencadeou diversas discussões paralelas (que não tinham propriamente a ver com as estratégias dos alunos) ao longo da experimentação. Como por exemplo, logo na primeira tarefa a discussão em torno do que é um número (a propósito da representação fracionária). Esta discussão deixou Laura surpreendida, embora a tenha considerado necessária e importante para reforçar junto dos alunos, mais uma vez, alguns significados das frações. Outra discussão que ocupou igualmente algum tempo de aula surgiu na tarefa 2 a propósito do conceito de divisão de frações. Esta discussão foi realizada oralmente com recurso a representações pictóricas no quadro negro explorando a sua relação com a multiplicação.

Laura reconhece que as primeiras tarefas ocuparam demasiado tempo, o que espelha as dificuldades dos seus alunos. No entanto, considera que, sendo a aprendizagem o seu grande foco, os alunos, "podem aprender com as discussões. Por isso não faz sentido nenhum acelarar a discussão", isto porque existem alunos interessados e envolvidos nas discussões, embora não sejam a maioria. Contudo, é necessário tentar reduzir o tempo destinado à discussão das estratégias dos alunos à medida que estes se vão habituando à dinâmica que está a ser desenvolvida na sala de aula.

De acordo com Laura, após a primeira aula (realização da parte 1 da tarefa 1) e dada a morosidade da discussão, os alunos manifestaram na aula de Matemática a necessidade de fazer um balanço acerca do modo como tinha corrido a primeira aula de cálculo mental, nomeadamente acerca da dinâmica de discussão. A professora relata que os alunos consideraram que "a dada altura ficava uma seca porque toda agente estava a dizer a mesma coisa. Estavam-se a repetir". Para Laura, esta repetição acontece porque, por um lado os alunos tem necessidade de chamar a atenção do professor e ao estarem a falar, o professor centra a sua atenção nele. Por outro lado, sente que os alunos têm dificuldades em se ouvirem uns aos outros, o que leva a que muitas vezes repitam o que disse o colega por outras palavras, porque não estiveram atentos. Partindo desta necessidade dos alunos, Laura aproveitou para "discutir a questão de que eles têm que apreder que se aquele raciocínio, aquela estratégia já foi descrito, não vale a pena estarem a querer participar". Esta discussão entre alunos e professora teve os seus frutos na realização da segunda aula, como refere a professora: "A verdade é que [na parte 2 da tarefa 1] já houve alunos que hoje já estavam a dar sinal aos outros - tu já disseste isso! Já perceberam a lógica". Efetivamente, nesta segunda aula, os alunos conseguiram realizar uma parte da tarefa em 45 minutos como era desejável, parecendo perceber que no máximo cada uma das partes de uma tarefa deveria ser realizada no máximo em 45 minutos. Laura realça isto mesmo ao referir que "O facto de nós termos feito a segunda parte da segunda sessão [da tarefa 1] em 45 minutos permitiu que os miudos percebessem o que é um segmento de discussão. Porque lhes deu um limite." Mais tarde este tempo voltou a ser ultrapassado pelas mesmas razões que apresentei anteriormente, apesar da discussão que os alunos tiveram com a professora e de terem manifestado vontade em melhorar a dinâmica das discussões.

Face à morosidade das discussões coletivas nas duas primeiras tarefas, Laura sugere que "Temos que reforçar e fizémos isso no final da aula [onde realizámos a parte 1 da tarefa 2], reforçar que a norma não é apresentar uma estratégia diferente, é apresentar uma estratégia diferente com lógica e com sentido matemático. E eficiente". A este propósito sugiro a Laura projetar o resultado de cada uma das expressões antes de iniciarmos a discussão de estratégias e questionar quem tem resultado igual ou diferente. Por norma, o resultado das expressões é projetados depois de discutirmos as estratégias, mas esta opção poderá incutir nos alunos alguma ordem na forma como apresentam as suas estratégias. Laura concorda e reforça a ideia de que os alunos ainda não compreenderam a lógica de um discurso dialógico, pelo que devemos contribuir para que isto aconteça. Esta sugestão de projetar o resultado da expressão, antes de iniciarmos a discussão, teve uma influência positiva na parte 2 da tarefa 2 tendo-se verificado uma melhor gestão da discussão, por parte dos alunos, uma vez que os ajudou a focar a discussão numa dada expressão e seu resultado. Nas situações contextualizadas, Laura considera que o resultado não deve ser logo disponibilizado aos alunos, uma vez que apresenta uma opção de estratégia de resolução. Pelo que tivemos isto em atenção logo a partir da tarefa 3.

A tarefa 4 foi realizada num bloco de 90 minutos pelo que Laura propõe o regresso à projeção dos resultados das questões de cálculo mental apenas depois da discussão de estratégias, uma vez que os alunos supostamente já perceberam a lógica das discussões coletivas e porque não quer influenciar as suas respostas. Esta última razão apresentada pela professora relaciona-se com o facto de alguns alunos, não tendo realizado o cálculo nos 15 segundos, usarem o resultado de uma dada expressão para chegar a uma estratégia de resolução, muitas vezes, pensada sem qualquer lógica e nem sempre correta. Laura quer que os alunos pensem previamente e encontrem uma estratégia pessoal de resolução. Reforcei positivamente esta sugestão da professora uma vez que surgiu de uma necessidade sua. Sugeri também que incentivasse alguns dos alunos menos participativos a envolverem-se mais nas discussões.

As nossas reflexões em torno da dinâmica da discussão coletiva encaminhou-nos quase sempre para a redefinição de ações que incentivassem a participação do maior número possível de alunos, mas a heterogeneidade da turma e a dificuldade dos alunos em mobilizar aprendizagens foi um fator difícil de contornar. Outra necessidade que emergiu dos alunos, perante discussões demoradas e repetitivas, foi a de sistematização de estratégias embora nem sempre tenha sido possível fazer esta sistematização no final de cada aula de cálculo mental o que era desejável. No entanto, sempre que a tarefa envolvia o conceitos e estratégias semelhantes, a sistematização era feita no início da aula de cálculo mental seguinte ou então Laura tinha o cuidado de, na aula de Matemática a seguir à de cálculo mental, rever as principais estratégias utilizadas pelos alunos.

Na tarefa extra o tempo desejado para a sua realização (90 minutos) foi novamente excedido. Neste sentido, sugeri a Laura que passasse a iniciar a discussão perguntando quem fez ou não o cálculo e a quem não fez, desse a oportunidade de fazer na altura da discussão, para assim envolvermos mais alunos e não apenas a “meia dúzia” que era habitual. Também manifestei o meu desejo em participar cada vez menos na discussão coletiva cingindo-me apenas a pequenas questões de clarificação aos alunos. Isto irá fazer com que Laura assuma mais diretamente o controlo da discussão mesmo quando se sente desapontada com a prestação dos alunos, pois apesar de conhecer a turma e esperar sempre um pouco mais dos alunos, isto nem sempre acontece na realidade o que a deixa por vezes desmotivada. Reforcei então a necessidade de Laura ser persistente no questionamento aos alunos, pois era essencial perguntar porquê (Porque pensaste assim? Por exemplo, “cortei” ali, mas porque cortaste?). Era importante que os alunos mostrassem alguma compreensão do que estavam a verbalizar e que continuassem a ser confrontados, como Laura por vezes já tinha feito (ação da professora que realcei positivamente): O que é que achas? Qual é a tua opinião? Tens alguma coisa a dizer? Esta ação da professora irá contribuir certamente para melhorar o sentido crítico dos alunos bem como o tempo de discussão coletiva.

A linguagem oral dos alunos foi outro aspeto a que estivemos atentas, não só pela necessidade de melhorar a comunicação na sala de aula mas também porque, por exemplo, a verbalização correta de um numeral decimal ajuda à sua compreensão. Ao longo da experiência temos verificado alguma melhoria na forma como os alunos vão comunicando as suas estratégias, contudo, continua a ser necessário contribuir para esta melhoria.

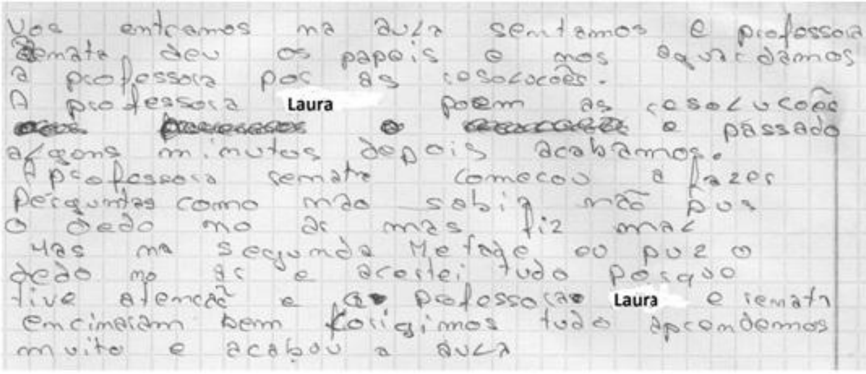
No que respeita às estratégias dos alunos, estas começaram por se centrar muito na aplicação de procedimento e regras memorizadas (inverte e multiplica, cancelamento de numeradores e denominadores iguais na multiplicação de frações) – como as dos alunos da turma M - e no recurso ao raciocínio aditivo. O raciocínio aditivo esteve muito presente nas estratégias dos alunos ao longo de quase toda a experiência de ensino, inclusive, na ficha de avaliação que estes realizaram, envolvendo conceitos de proporcionalidade. O que nos levou a pressupor que a maioria dos alunos ainda não tinha transitado do raciocínio aditivo para o multiplicativo. Os alunos, de um modo geral, apresentavam estratégias muito baseadas em adições sucessivas, o que em expressões de valor em falta ou na multiplicação de dois numerais decimais podia levá-los a cometerem erros. Por exemplo, para explicar a operação 25×4 Francisco poderia ter dito automaticamente 100 uma vez que era suposto este ser um facto numérico conhecido, mas explica a operação dizendo que é 25+25+25+25.Este tipo de situação mereceu da nossa parte um reforço na discussão de relações numéricas entre as operações adição e multiplicação, bem como da importância da conversão entre representações dos números racionais. No que se refere à conversão entre representações, notámos alguma facilidade, por parte dos alunos em converter a representação decimal em fracionária, mas algumas dificuldades em fazer o inverso. Por norma, os alunos não apresentaram grande diversidade de estratégias ao longo da experimentação, uma vez que só alguns participavam nas discussões coletivas. Os alunos que participaram manifestaram compreender as suas explicações, estabelecendo diversas relações entre expressões ou estratégias anteriormente discutidas, numa mesma tarefa ou em tarefa anteriores.

A capacidade de transição de estratégias mais procedimentais para outras mais concetuais foi algo difícil de promover, sendo que em alguns alunos eu diria quase impossível, tendo em conta que no final da experimentação algumas destas estratégias baseadas em procedimentos ainda se verificavam. Estas estratégias começaram por surgir nas operações com frações e continuaram nas operações com numerais decimais. Nas suas estratégias, os alunos sempre manifestaram pouca apetência para compor e decompor números, especialmente na representação decimal. Por exemplo, na tarefa 4 (adição/subtração de numerais decimais) o aparecimento de estratégias baseadas em procedimentos e regras memorizadas surgiu ligada a imagens mentais dos algoritmos escritos (toda a descrição da estratégia explicava a "conta de pé"), principalmente em alunos com aproveitamento mediano, o que demonstra alguma dificuldade destes em se desprenderem de algumas práticas habituais, certamente adquiridas ao longo do seu processo de aprendizagem com operações com números naturais.

Na tarefa 5, o recurso à operação inversa das diversas operações matemáticas básicas começou a surgir com frequência nas estratégias dos alunos para resolver expressões de valor em falta. Laura considera que isto "é resultado nitidamente da experiência de ensino". Contudo, verificámos através das explicações dos alunos que, quando havia uma compreensão da relação entre uma dada operação e sua inversa, o cálculo era realizado com sucesso. Quando havia a aplicação de um procedimento previamente memorizado (e.g., nas expressões de valor em falta usa-se sempre a operação inversa), isto conduzia a alguns erros, pois no caso da divisão e da subtração o recurso à operação inversa nem sempre é a estratégia mais adequada. Esta situação levou-nos a uma contínua discussão, ao longo da experimentação, acerca de quando é que era possível utilizar a operação inversa de uma dada operação para resolver uma expressão de valor em falta, associando esta possibilidade a propriedades básicas das operações, como a comutatividade.

A partir da tarefa 7, as estratégias dos alunos começaram a centrar-se mais na utilização de relações numéricas interessantes o que também nos levou a despender mais tempo com a discussão desta tarefa, dada a riqueza dos raciocínios apresentados. Muitas das estratégias que antecipámos na preparação desta tarefa, surgiram durante a discussão.

Ainda a propósito das estratégias dos alunos, realço o facto de, a partir do meio da experiência, alguns alunos sentirem necessidade de registar numa folha anotações acerca das estratégias discutidas nos momentos de discussão, embora esta situação não lhes tivesse sido pedida diretamente. No entanto, esta atitude dos alunos poderá ter sido originada por um pedido que fiz especificamente a um dos alunos (Acácio) no final da tarefa 4. Este pedido pretendia incutir nos alunos alguma responsabilidade e necessidade de estarem atentos às discussões coletivas ao invés de se dispersarem. Pedi então a Acácio que na aula de cálculo mental seguinte nos trouxesse um resumo das estratégias discutidas. O resumo de Acácio (Figura 30) não refere estratégias mas sim à forma como se organizou a aula, em termos gerais.

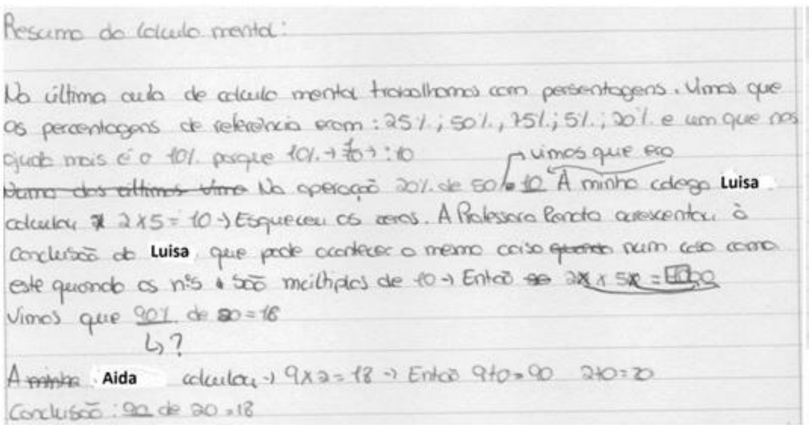


Noa entramos na aula sentamos e professora Remate deu os papeis e nos aguardamos a professora por as resoluções.
A professora Laura poem as resoluções ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ e ~~[illegible]~~ e passado algons minutos depois acabamos.
A professora Remate começou a fazer perguntas como não sabia não pus o dedo no ar mas fiz mal
Mas na segunda Metade eu puz o dedo no ar e acertei tudo porque tive atenção e a professora Laura e Remata encimaram bem Korigimos tudo aprendemos muito e acabou a aula

Figura 30. Resumo de Acácio sobre as estratégias discutidas na tarefa 4.

Na tarefa 8, o resumo foi pedido a Inês. A aluna apresentou um resumo onde já é possível identificar algumas das ideias exploradas no âmbito das percentagens (Figura 31) e que certamente a marcou, dado o pormenor com que as descreve.

Relativamente aos erros manifestados pelos alunos no cálculo mental com números racionais, saliento a adição/subtração de numeradores e denominadores na adição/subtração de frações. Este erro manteve-se presente nas estratégias de alguns alunos até ao final da experiência, apesar de ter sido amplamente discutido. Alguns alunos continuaram a percecionar um fração como dois números e não apenas um, embora tenhamos discutido o que era um número e o conceito de fração logo na tarefa 1.A dificuldade na manipulação simbólica (resolução de expressões em contexto matemático) pode também estar na origem deste erro, pois se as frações estiverem associadas a um contexto ou a uma representação pictórica (algo concreto) os alunos mostram conseguir compreender a operação e resolvem-na.



Resumo do cálculo mental:

Na última aula de cálculo mental trabalhamos com persentagens. Vimos que as percentagens de referência eram: 25%; 50%, 75%; 5%; 20% e um que nos ajuda mais é o 10% porque 10% → $\frac{1}{10}$ → : 10
~~Numa das últimas vimo~~ Na operação 20% de 50 = 10 vimos que era A minha colega Luisa calculou ~~2~~ 2 x 5 = 10 → Esqueceu os zeros. A Professora Renata acrescentou à conclusão da Luisa que pode acontecer o mesmo caso ~~quando~~ num caso como este quando os nºs são múltiplos de 10 → Então ~~se~~ 20 x 50 = $\boxed{10}00$
Vimos que 90% de 20 = 18
↳ ?
A ~~minha~~ Aida calculou → 9 x 2 = 18 → Então 9 x 10 = 90 2 x 10 = 20
Conclusão: 90 de 20 = 18

Figura 31. Resumo de Inês sobre as estratégias discutidas na tarefa 8.

Mais uma vez, apercebemo-nos de que a transição do concreto para o simbólico ainda não estava devidamente compreendida por parte dos alunos. Esta situação foi percecionada por nós em diversos momentos da experiência de ensino, sendo necessário por vezes discutir a representação simbólica dos números a par do contexto de cada uma das situações, como refere Laura na reflexão da tarefa 5:

> Gostei da estratégia de passar do problema para a construção simbólica (na situação contextualizada usando uma expressão de valor em falta), que no fundo é a construção de uma equação que para o ano lhes vai dar imenso jeito. Porque na realidade estão a transformar do contexto real para a equação e ao traduzir estamos a ajudá-los a dar significado ao simbólico. E é isso que eles precisam. O olhar para as coisas e perceber o que lá está.

A frequente mistura de procedimentos das diversas operações com a representação fracionária, deu origem a inúmeros erros. Por exemplo, na multiplicação de frações os alunos operaram com numeradores e denominadores (principalmente adicionando-os), sem qualquer lógica. Este erro, a par de outros, foi também muito discutido mas isso não surtiu efeito positivo nas estratégias dos alunos. A este propósito realço o caso da divisão de frações, onde as discussões que tivemos, acompanhadas da representação pictórica da divisão de duas frações com denominadores múltiplos um do outro a par da representação simbólica, se revelaram infrutíferas pois os alunos mais tarde mostraram não as ter compreendido ou interiorizado, não as usando nas suas estratégias.

Outro erro detetado durante as discussões coletivas refere-se à generalização de propriedades das operações (comutatividade aplicada à subtração e uso da multiplicação para calcular o divisor numa divisão). Este erro dos alunos levou Laura a refletir sobre a sua prática uma vez que o encarou como um reflexo da sua prática. A professora considera que, por vezes, a não apresentação de contraexemplos, por parte do professor, pode levar os alunos a este tipo de generalizações. Neste sentido, o recurso a contraexemplos (situações onde não se verifica a aplicabilidade de uma dada propriedade em contraponto com situações onde se verifica) foi algo ao qual estivemos atentas e sempre que necessário trouxemos para a discussão como forma de apoiar a clarificação deste tipo de erro dos alunos.

À medida que fomos avançando na experiência de ensino percebemos que alguns dos conhecimentos que os alunos usavam no cálculo mental tinham origem na memorização e não na compreensão das relações numéricas envolvidas, o que os levava a cometerem alguns erros. Laura dá como exemplo de algo memorizado e não compreendido a aplicação da operação inversa, por parte dos alunos:

> Não têm flexibilidade nas operações . . . Trabalham muito por memorização que é isso que eles estão a fazer em relação à operação inversa. Memorizam que quando aquilo tem aquele aspeto é operação inversa. Não é um estabelecimento de relações, na minha opinião.

A este propósito, destaquei ainda a recorrência com que os alunos usam o contexto de dinheiro, como modelo mental, para operarem com numerais decimais, sem refletirem sobre a sua adequação. Este contexto faz sentido na adição e subtração de numerais decimais, mas na multiplicação e divisão apenas faz sentido quando multiplicamos/dividimos um número natural por um numeral decimal. Laura considera que isto se relaciona com as vivências dos alunos e admite que ela própria, muitas vezes, recorre a este contexto por saber exatamente que este faz sentido para os alunos.

A colocação incorreta do valor posicional dos algarismos, tal como tínhamos antecipado (e.g., 0,6×0.30=1,80) foi outro dos erros que verificámos. A antecipação deste erro levou Laura a questionar-se: "Eu posso dizer-lhes isso como no algoritmo. Duas casas decimais menos uma casa decimal dá uma casa decimal. Posso ensinar-lhes essa mnemónica?". Tendo em conta que muitas vezes estas mnemónicas ajudam à memorização e não à compreensão, sugeri a Laura que discutisse com os alunos a decomposição do numeral decimal num produto de um inteiro por uma décima ou centésima. Este foi um aspeto que foi sendo discutido ao longo da experiência, a par do sentido de operação multiplicação com numerais decimais. Mais tarde, verificámos que alguns alunos compreenderam esta decomposição uma vez que a usaram nas suas estratégias. Para a professora, este erro tem origem na falta de " uma noção de grandeza quando trabalham com númerais decimais" bem como de "valor posicional" dos algarismos, o que os leva a apresentarem resultados incorretos, mas por vezes muito próximos dos desejados. Ainda na multiplicação de numerais decimais, a forte presença de raciocínio aditivo nas estratégias dos alunos (como referi anteriormente) fez com que alguns alunos transformassem incorretamente o produto de dois numerais decimais numa adição (0,6×0,30=0,90).

Outro erro que surgiu, relaciona-se com o facto de os alunos operarem com a parte inteira e depois com a parte decimal de um numeral decimal, sem perceberem a razoabilidade do resultado obtido, para além de continuaram a recorrer ao raciocínio aditivo. Por exemplo, um dos alunos de Laura para calcular 12,6÷4,2 calculou 4 mais 4 dá 8, mais 8 dá 12 (para operar com a parte inteira) e 2 mais 2 dá 4 mais 2 dá 6 (para operar com a parte decimal). Seguidamente apresenta como resultado 3,3 (junta os resultados de ambas as operações separando-os por uma vírgula), revelando não perceber que existia uma relação de triplo entre o dividendo e o divisor. Este é mais um exemplo de como existe uma mecanização de procedimentos ao invés de uma compreensão dos números e suas operações. Associados aos erros que mencionei anteriormente, estão dificuldades dos alunos em compreenderem e interpretarem conceitos básicos de Matemática e representações formais (questões em contexto matemático) ou em aplicar conhecimentos a novas situações, às quais se juntam dificuldades de comunicação oral.

No que se refere à capacidade de comunicação oral dos alunos, notámos alguma melhoria na forma como gradualmente alguns deles foram explicitando os seus raciocínios e respeitando a explicação dos colegas. Inicialmente, quando o professor interagia diretamente com um aluno este estava atento, mas os outros distraíam-se com frequência. Evidência disto era o facto de perguntarmos a um aluno qual a sua estratégia e de este responder, a minha estratégia é igual à do João, por exemplo. Quando questionado acerca da estratégia do João, o aluno não conseguia reproduzi-la ou explicá-la.

Durante as discussões coletivas foi possível perceber que os alunos compreendiam as situações contextualizadas apresentadas, que por vezes identificavam a operação a usar, mas que a dificuldade em realizar cálculos os conduzia a uma resposta incorreta. A falta de factos numéricos básicos ou memorização de procedimentos algorítmicos sem compreensão pode ser uma explicação para o facto de os alunos manifestarem mais dificuldades em resolver expressões do que situações contextualizadas e de apresentarem inúmeros erros de cálculo. Relembro que a necessidade de concretizar raciocínios através de diversas representações (e.g., pictórica, simbólica) no quadro negro esteve muito presente no início da experiência. Esta situação foi sendo cada vez menos recorrente, à medida que fomos avançando na experiência e diversificando contextos que ajudassem os alunos a compreender os números.

Em termos de conceitos matemáticos básicos, detetámos na tarefa extra que a maioria dos alunos ainda não reconhecia facilmente, por exemplo, frações que representavam metade (quando os próprios alunos já tinham referido diversas vezes que quando o numerador representa metade do denominador a fração representa metade) ou que $\frac{6}{8}$ é equivalente a $\frac{3}{4}$ e que a divisão do primeiro pelo segunda dá 1.

Na tarefa 7 (com a representação percentagem), destaco o facto de Cátia mostrar não saber o significado "da décima parte de". Esta foi uma situação que emergiu nas aulas de cálculo mental por diversas vezes deste então e que levou a professora a ponderar a necessidade de recorrer a material manipulável para voltar a abordar este conceito. Eu e Laura consideramos que a falta de conhecimentos básicos (como este de Cátia) tem impedido os alunos de progredirem e apresentarem estratégias mais baseadas em relações numéricas. Com esta discussão em torno da décima parte, percebemos que, por parte de alguns alunos, o cálculo de 10% não estava devidamente compreendido enquanto cálculo da décima parte, enquanto outros alunos recorriam a 10% como número de referência com relativa facilidade.

Na tarefa 10 percebemos que, situações contextualizadas onde existissem valores acessórios dificultavam a interpretação da situação por parte dos alunos. Por exemplo, na situação contextualizada envolvendo o conceito de frequência relativa os alunos usaram no cálculo o valor 20 (de "lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes"), um valor completamente acessório. Laura considera que esta dificuldade tem muito a ver com o vocabulário dos alunos que, para a professora, é limitado pois as vivências destes limitam-se à escola, ao bairro onde vivem e ao que veem na televisão. Pelo facto de estarmos no final da experiência, já não nos foi possível apresentar aos alunos mais situações contextualizadas deste género que pudessem ser alvo de interpretação e reflexão coletiva, no entanto a professora considerou pertinente dar continuidade a esta discussão na aula de Matemática. Este foi um dos últimos contributos do cálculo mental para a aula de Matemática, tendo-se verificado inúmeros ao logo da experimentação, como irei referir de seguida.

Ao longo deste ciclo de experimentação II o cálculo mental desempenhou um papel importante na construção de dinâmicas de discussão coletiva na sala de aula e de deteção de aspetos mais frágeis, do ponto de vista da aprendizagem dos alunos, que mereceram alguma atenção por parte de Laura nas restantes aulas de Matemática. Laura considera que a experiência de ensino tem sido um apoio às aulas de Matemática uma vez que tem permitido "reforçar o trabalho que foi feito em sala de aula. . . . Revisitar aprendizagens. Esta experiência de ensino permite revisitar aprendizagens". Este apoio foi-se refletindo não só através do reforço de aprendizagens, como refere a professora mas também através de uma necessidade continua de articular saberes discutidos nas aulas de cálculo mental com os das restantes aulas de Matemática. Esta necessidade de articulação de saberes emergiu, não só por parte de Laura, mas também dos alunos. Com regularidade os alunos fizeram referência a aprendizagens realizadas em ambos os ambientes. Esta articulação realizou-se de diversas formas, sempre com o intuito de contribuir para uma aprendizagem mais efetiva dos alunos e dadas as dificuldades manifestadas por estes no cálculo mental com números racionais. As aulas de Matemática foram muitas vezes uma continuidade das aulas de cálculo mental pela necessidade de reforço de aprendizagens detetadas nas discussões de cálculo mental. O lema de que” a união faz a força” levou-nos, a mim e a Laura a um trabalho muito próximo onde os alunos foram contagiados de tal forma que, para eles, relacionarem aprendizagem de uma tarefa que a professora tinha realizado na aula de Matemática com algo que se estava a discutir no cálculo mental e vice-versa era perfeitamente natural. Do meu ponto de vista este é um aspeto positivo deste ciclo de experimentação. Os alunos facilmente transportavam dinâmicas de aprendizagem das aulas de cálculo mental para as restantes aulas de Matemática e vice-versa. Por exemplo, aquando da abordagem à OTD Laura relata a forma como os alunos recorreram a conhecimentos discutidos no cálculo mental para realizarem a tarefa proposta pela professora:

> Estávamos a construir o gráfico circular e no estabelecimento da relação entre os ângulos e as percentagens, e aquilo são relações de proporcionalidade, os alunos foram pelos raciocínios que nós utilizámos no cálculo mental. Só o Tiago foi pela proporção, mas como regra de cálculo. O resto fez através de frações equivalentes, substituiu a percentagem por fração e depois estabeleceram relações. E . . . Lá está a estrutura aditiva outra vez. Se eu quero 35% então eu vou fazer [calcular] 10% e depois vou fazer 10+10+10 e depois mais metade de 10. Decompõem e somam.

Um exemplo que retrata o inverso (da aula de Matemática para o cálculo mental) foi protagonizado pelos alunos numa das últimas tarefas da experiência de ensino. O facto de Laura ter iniciado a abordagem aos números inteiros relativos, fez com que os alunos trouxessem para a discussão de cálculo mental conhecimentos da aula de Matemática sobre este tópico o que revelou alguma simbiose e perceção desta, por parte dos alunos, algo que não aconteceu no ciclo de experimentação I.

Esta sintonia contante deu origem a diversas sugestões de intervenção na aula de Matemática, vindas quer da minha parte, quer da parte de Laura. Da parte de Laura na tarefa extra surge uma sugestão de articulação. Na discussão da expressão $\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$ um dos alunos da turma L apresentou uma estratégia igual à apresentada por um aluno da turma M (multiplicação cruzada na adição de duas frações equivalentes a metade, isto é, $7 \times 2$ e $14 \times 1$), uma coincidência interessante. Esta expressão potenciou algo que Laura ansiava há já algum tempo – criar uma tarefa a partir das conjeturas dos alunos, tal como tinha acontecido na turma de Margarida logo na primeira aula de cálculo mental, mas que na turma de Laura apenas se verificou na tarefa extra.

O facto de termos detetados fragilidades na aprendizagem dos alunos no raciocínio proporcional, levou-me a sugerir a Laura que pegasse numa ou duas expressões discutidas numa das aulas de cálculo mental e as contextualizasse, na aula de Matemática, em situações de proporcionalidade, uma vez que era este o tema que estava a abordar no momento. Pretendíamos assim perceber se, contextualizados os números, os alunos se apropriariam das operações e dos conceitos subjacentes, dadas as dificuldades manifestadas por estes em resolver expressões em contexto matemático como já referi diversas vezes. Ainda no que se refere ao raciocínio proporcional, mais propriamente ao tópico "escalas", Laura considerou que as aulas de cálculo mental fizeram emergir a necessidade de se reforçar este conceito, ao mesmo tempo que representou uma oportunidade para o fazer. Como continuidade deste reforço, sugeri a Laura que na aula de Matemática apelasse ao raciocinio proporcional, a relações numéricas existentes entre os números e desafiasse os alunos a "brincarem" com os números, seguindo um pouco a lógica do que temos feito nas discussões de cálculo mental.

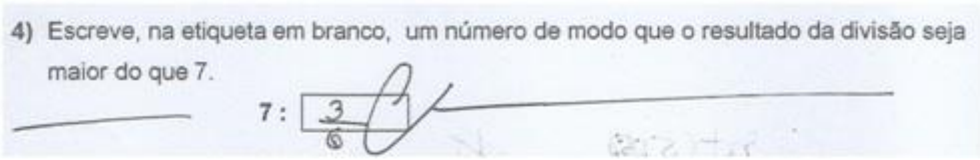
No que se refere às dinâmicas de cálculo mental que temos vindo a desenvolver na sala de aula, Laura considera que, estas estão a produzir algumas aprendizagens nos alunos:

> [Esta experiência de ensino] trouxe essa explicitação de papeis que eu não estava a conseguir num curto espaço de tempo . . . Às vezes só a meio do ano é que eles percebem como é que têm de gerir as discussões e a experiência de ensino permite reduzir esse tempo de adaptação para duas e três semanas.

A rotina semanal de discussão coletiva de estratégias de cálculo mental ajudou os alunos a perceberem quais as normas de sala de aula (normas sociais e sociomatemáticas) importantes para a discussão em Matemática e acelerou um processo que, segundo a professora, costumava ser mais demorado. A reduzida participação dos alunos nas aulas de cálculo mental levou Laura a sugerir diversas formas de ação no sentido de tornar mais explícita para alunos e encarregados de educação a importância da abordagem que se estava a fazer para a aprendizagem dos alunos.

No que se refere aos alunos, e por sugestão da professora, as fichas de avaliação passaram a conter algumas questões de cálculo mental, que selecionámos em conjunto. Sempre que oportuno, analisávamos as respostas dos alunos a algumas dessas questões da ficha de avaliação na tentativa de perceber se os alunos recorriam ou não a aprendizagens previamente exploradas nas aulas de cálculo mental. Esta análise mostrou-nos, por um lado, que algumas aprendizagens estavam a ser realizadas, como a resposta à questão indicada na Figura 32 onde oito dos dezanove alunos indicou um número inferior a 1 (recorrendo à representação fracionária ou decimal), inclusive alunos com fraco rendimento escolar como foi o caso de Luís e Bernardo.

Resposta de Bernardo




Resposta de Luís

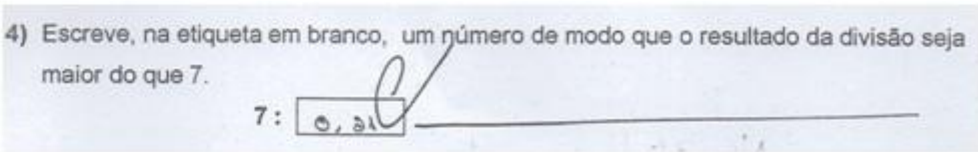



Figura 32. Respostas de Bernardo e Luís a uma questão da ficha de avaliação.

Por outro lado, veio confirmar a nossa conjetura de que os alunos ainda não se apropriaram do raciocínio multiplicativo. Por exemplo, numa das questões da ficha de avaliação, em que tinham de calcular (sem recurso a calculadora) quantos quilómetros eram percorridos por um automóvel em 2 horas, sabendo que este mesmo automóvel, a velocidade constante, percorria 450km em 3 horas, as resoluções dos alunos mostraram-nos que estes manipularam os númerso que apareciam no problema sem qualquer lógica. Uma grande parte dos alunos resolveu o problema dividindo 450 por 3 ou 3 por 450 obtendo sempre o resultado 150. Os registos dos alunos mostraram tendencialmente um raciocínio aditivo, à semelhança do que já tínhamos verificado nas discussões coletivas de cálculo mental.

No que se refere aos encarregados de educação, por iniciativa própria, Laura promoveu com os alunos um momento de auto e heteroavaliação para que estes pudessem refletir acerca da sua prestação nas aulas de cálculo mental. Posteriormente esta informação foi registada na caderneta do aluno e enviada aos encarregados de educação para tomarem conhecimento. Esta ação da professora teve os seus efeitos, passando-se a verificar uma participação mais regular nas discussões coletivas, por parte de mais 3 ou 4 alunos.

Este ciclo de experimentação II constitui-se como um processo constante de avanços e recuos quer no que respeita à prestação dos alunos e possíveis aprendizagens destes, que por vezes julgávamos mais consistentes do que na realidade se mostravam ser, quer no que se refere às dinâmicas de gestão da discussão que, como referi anteriormente, foram alvo de diversas reflexões da minha parte e da parte de Laura e consequentes alterações. Contudo, percecionámos alguma evolução, embora lenta e gradual, na forma como os alunos foram participando e se envolvendo nas dinâmicas de cálculo mental na sala de aula. A perceção deste processo evolutivo foi visível na atitude dos alunos perante o cálculo mental com números racionais, nas estratégias que estes foram apresentando, mas também na atitude perante o desafio de participar neste estudo que foi crescendo gradualmente à medida que o entusiasmo da diversidade de estratégias ia surgindo nas discussões coletivas. Logo após a exploração da primeira parte da tarefa 1, verificámos que alguns alunos, na parte 2 desta mesma tarefa já não sentiam necessidade de usar o algoritmo da adição de frações para calcular a soma de duas metades, reconhecendo rapidamente que duas metades formam a unidade. Ao longo da experiência percebemos que a maioria dos alunos reconhecia $\frac{1}{2}$ como representando metade, mas nem sempre conseguiam identificar outras frações equivalentes a esta.

A partir da tarefa 3 começou a emergir, da parte dos alunos, a necessidade de validarem as suas estratégias recorrendo a outras previamente discutidas. Este foi um aspeto que se foi evidenciando cada vez mais ao longo das diversas discussões coletivas. Pela primeira vez, nesta turma e nesta tarefa, emergiu algum sentido crítico por parte de alguns alunos ao referirem que depois da discussão já fariam de outra forma. Esta atitude dos alunos foi valorizada positivamente.

Na tarefa 5 constatámos que alguns alunos começavam a recorrer a outro tipo de estratégias baseadas em relações entre representações e operações previamente discutidas. Este pode ter sido um reflexo da ênfase dada por nós à importância da conversão entre representações. A introdução de uma segunda representação (frações e decimais) na tarefa 3 poderá também ter contribuído para esta mudança gradual. Esta capacidade de relacionar diversas expressões de cálculo mental já discutidas, levou-nos a acreditar que alguns alunos estavam efetivamente a tirar partido das discussões coletivas, o que nem sempre foi visível nas diversas aulas de cálculo mental. Este aspeto, bem como a capacidade para relacionar cada vez melhor diferentes representações dos números racionais enriqueceu o tipo de estratégias utilizadas pelos alunos e consequentemente as discussões coletivas. Laura destaca positivamente esta capacidade dos alunos, afirmando que estes a põem em prática nas aulas de Matemática. Segundo a professora, na revisão da frequência absoluta e relativa os alunos "migram lindamente entre representações".

Sensivelmente a meio do ciclo de experimentação, os alunos começaram a promover discussões entre si, sem que para isso o professor tivesse de intervir. Alguns alunos começaram a questionar-se e a questionar os colegas acerca das estratégias que explicitavam e apresentar argumentos para a validação ou refutação dessas estratégias. Começaram igualmente a relacionar as suas estratégias com a dos colegas ou a adotarem como estratégia uma previamente discutida. Esta atitude dos alunos foi valorizada por Laura:

> Adorei aquela discussão. Aquele triângulo ali da Inês, Diogo e Tiago. Foi uma discussão interessante e não interferi exatamente porque queria reforçar a importância daquele tipo de discurso entre pares. O por isso, também disse: não olhem para mim vocês têm que chegar a um acordo e perceber o que é que todos concordam.

Reforcei positivamente esta ação da professora, embora tivesse sido importante que esta redissesse algumas das expressões orais usadas pelos alunos com o intuito de os ajudar a melhorar a linguagem e a clarificar o discurso, ou mesmo os tivesse questionado para os ajudar a irem mais além nos seus raciocínios. A ideia não é o professor intervir para validar as respostas dos alunos, mas sim, pedir que repitam o que disseram para que possam pensar melhor sobre o próprio discurso. Isto porque, por vezes, os alunos apresentavam um discurso confuso onde faziam afirmações que mais tarde percebíamos não serem coincidentes com o que estavam efetivamente a pensar.

A partir da tarefa 9, Laura começa a manifestar nas sessões de reflexão pós-aula, satisfação pelo facto de os alunos se recordarem de muitas das estratégias discutidas noutras aulas de cálculo mental e de surgirem diversas estratégias para a mesma questão de cálculo mental. Realça ainda o facto de os alunos já conseguirem abstrair-se do contexto (concreto) para calcular uma expressão em contexto matemático (abstrato). Relembro que ao longo da experiência de ensino os alunos sempre revelaram muitas dificuldades em calcular uma dada expressão quando esta não estava associada a um determinado contexto, dai utilizarem o contexto de dinheiro como modelo de suporte a quase todas as operações com numerais decimais, mesmo quando não era possível. Nesta tarefa Laura considera que a situação está a ser ultrapassada e que os alunos já possuem maior capacidade de abstração, como se percebe por esta sua observação: ”Ah, eu conforme foi acontecendo [a discussão] fui regsitando na minha cabeça. Eles transferiram do concreto para o simbólico e resolveram em simbólico. Portanto, neste momento eles já formalizaram”. Este é um aspeto que considera positivo e que deriva em parte do trabalho que temos vindo a realizar na experiência de ensino. Laura também considera que a forma como a experiência de ensino foi reajustada e concretizada contribuiu para promover esta capacidade de abstração dos alunos, como refere: “Mas eu acho que há aqui um aspeto superpositivo e eu acho que também vem da experiência de ensino. Que é eles desprenderem-se do concreto e entrarem no abstrato e no formal”.

Na tarefa 10, a nossa perceção foi de que, pela primeira vez, os 15 segundos para resolver cada expressão pareceram ter sido mais do que suficientes para alguns alunos, ao contrário do que por norma acontecia. Esta situação foi encarada por nós como um sinal de evolução, pois muitos dos alunos passaram a conseguir realizar cálculo mental de forma mais rápida e eficaz.

No final da experiência e tendo em conta os tópicos que abordou em Matemática, Laura sistematiza alguns dos contributos do cálculo mental para a aprendizagem dos seus alunos. Nomeadamente o desenvolvimento do raciocínio proporcional, da compreensão das percentagens e da Álgebra. Segundo a professora, estas foram algumas das mais-valias da realização desta experiência de ensino para a aprendizagem dos alunos, tal como refere:

> [Os alunos] têm raciocínio proporcional e no que respeita ao capítulo da proporcionalidade está perfeitamente. Identifico quais foram os contributos. Ao nível da OTD há contributos sérios no âmbito das percentagens do procedimental para o concetual. O sentido de número, o desenvolvimento do sentido de número que tem uma evolução muito grande. Na Álgebra aplicada à Geometria quando eles conseguem de situações de geometria entrar no simbólico e na abstração das fórmulas do volume. Portanto, trabalhar com a parte algébrica da Geometria . . . Um grande contributo para a Álgebra e nos números e operações. Temos dois grandes temas matemáticos que tiveram maior contributo por parte desta experiência ensino.

De salientar ainda que, à semelhança do que verifiquei no ciclo de experimentação I, à medida que avançávamos na experiência de ensino os alunos iam sendo cada vez mais seletivos nas questões a que respondiam, surgindo por vezes, muitas questões sem resposta, o que nem sempre significava não terem uma estratégia. Laura considera que esta situação se relaciona com o facto de os alunos quererem enveredar por estratégias mais complexas, que depois não têm tempo para concretizar. Esta nossa posição baseia-se no facto de alguns destes alunos apresentarem uma estratégia de resolução no momento de discussão, apesar de não terem realizado o cálculo no tempo estipulado.

Este estudo não incide sobre o desenvolvimento profissional da professora participante, mas o contributo desta experiência para o desenvolvimento profissional de Laura emergiu diversas vezes durante as nossas sessões de reflexão e, por isso, considero ser merecedor de algumas observações. Destaco uma observação feita por mim a Laura acerca da forma como, no fim da experiência, resolve determinadas questões de cálculo mental demonstrando que ampliou o seu reportório de estratégias e que pensa mais em relações numéricas e propriedades das operações, do que na aplicação de procedimentos e regras. O seu cálculo mental também se tornou mais rápido e eficaz. Neste processo de desenvolvimento profissional, que vai muito além da melhoria na capacidade de resolver questões de cálculo mental, Laura valoriza o facto de eu ser uma observadora participante e de estar dentro da sala de aula a desenvolver a experiência consigo. A minha participação em todo o processo contribuiu para a promoção de discussões tando a um nível mais prático como a um nível mais concetual, o que levou muitas vezes a professora a questionar a sua prática. A minha presença na sala de aula focou a sua atenção em situações referentes a estratégias e aprendizagens dos alunos importantes e suscetíveis de reflexão, que de outro modo poderiam passar despercebidas. A este propósito Laura refere que “Se calhar se eu estivesse sozinha na sala não reconhecia a estratégia [da Luisa] e ai tem o teu papel como investigadora, que já fizeste esta experiência outras vezes”. Laura refere-se ao facto de Luisa ter realizado o cálculo $3\times 9$ para calcular 90% de 30 e de eu ter realçado positivamente esta estratégia diante da turma bem como o porquê de ser possível apenas multiplicar 3 por 9. Esta foi uma estratégia que já tinha surgido no estudo preliminar e no ciclo de experimentação I. O meu conhecimento, fruto da minha participação no primeiro ciclo de experimentação, foi algo que deixou Laura confortável e mais segura para desenvolver este segundo ciclo de experimentação. Esta minha experiência, para além de apoiar uma reflexão mais informada, permitiu antecipar e discutir mais em pormenor as possíveis estratégias e erros dos alunos, por forma a preparar melhor a discussão coletiva na sala de aula.

### 6.2.3. Refinamento do quadro concetual

O refinamento do quadro concetual foi influenciado pela realização da experimentação na sala de aula (ciclo I e II), mas também por discussões acerca do meu trabalho em encontros nacionais e internacionais aos quais não posso ficar indiferente, pela reflexão que me proporcionaram. A análise de dados apoiou o redirecionar do quadro concetual enquanto ferramenta de análise de dados e as discussões tidas em diversos contextos, a necessidade de aprofundar conceitos, como explicarei adiante.

A realização do ciclo de experimentação II trouxe desafios diferentes daqueles enfrentados na primeira vez que a experiência de ensino foi realizada na sala de aula. O papel das tarefas e a forma como foram apresentadas aos alunos, ganhou maior importância, tendo em conta as dificuldades dos alunos da turma L (ciclo de experimentação II), que eram significativamente maiores dos que as dos alunos da turma M (ciclo de experimentação I). Estas dificuldades, aliadas à falta de conhecimentos matemáticos, por vezes básicos, por parte dos alunos fez com que as dinâmicas de discussão fossem alvo de reflexão e de adequação constantes, emergindo a necessidade de uma articulação mais forte entre as abordagens realizadas nas aulas de cálculo mental e nas restantes aulas de Matemática. Mas, as tarefas e a comunicação, nomeadamente a discussão de sala de aula, não são conceitos a desenvolver nos alunos, mas antes condições indispensável para desenvolver o seu cálculo mental. Assim, a nova versão do quadro concetual (Figura 33) deixou de contemplar estes dois elementos, embora sejam eles o motor de todo o processo de desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos. Para esta minha reflexão, muito contribuiu o comentário de um dos professores do Instituto de Educação, de uma área que não a Didática da Matemática, num dos Fóruns de Jovens Investigadores em que participei, por me ter alertado para o facto de, no meu estudo tarefas e comunicação não serem conceitos a desenvolver.

O recurso a modelos mentais, por parte dos alunos da turma L, nomeadamente os referentes aos contextos de dinheiro, levaram-me a aprofundar cada vez mais as representações mentais de suporte às estratégias de cálculo mental dos alunos, pelo que decidi apoiar a minha análise na Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1990). Esta teoria permitiu-me preencher um vazio que existia, até então, no que se refere ao tipo de representações mentais suscetíveis de serem utilizadas pelos alunos como suporte às suas estratégias. Até ao momento tinha identificado apenas imagens e modelos mentais baseados nas experiências de vida dos alunos mas, sendo as representações mentais a base para o processo de inferência Matemática, outras representações baseadas na experiência matemática dos alunos eram necessárias. Esta teoria apoiou a minha compreensão acerca desta temática e acrescentou às imagens e modelos mentais a representações proposicionais. Estes conceitos foram aprofundados no Capítulo 3. Por esta razão, o termo "imagens mentais", deu origem a "modelos mentais" tendo em conta o nome da teoria em que me comecei a basear. Todos os outros elementos foram mantidos no quadro concetual, por se revelarem essenciais para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos com números racionais.

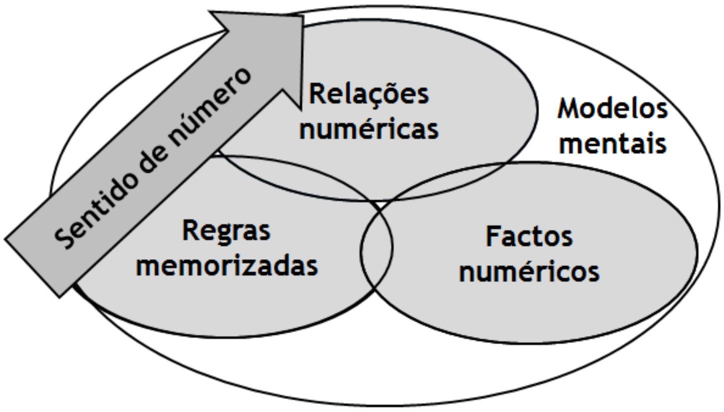



Figura 33. Terceira versão do quadro concetual.

Tendo em conta que a Teoria dos Modelos Mentais contempla diversas representações mentais, entre elas os próprios modelos, mais tarde pareceu-me adequado e de melhor compreensão substituir novamente o termo “modelos mentais” por “representações mentais” (Figura 34).

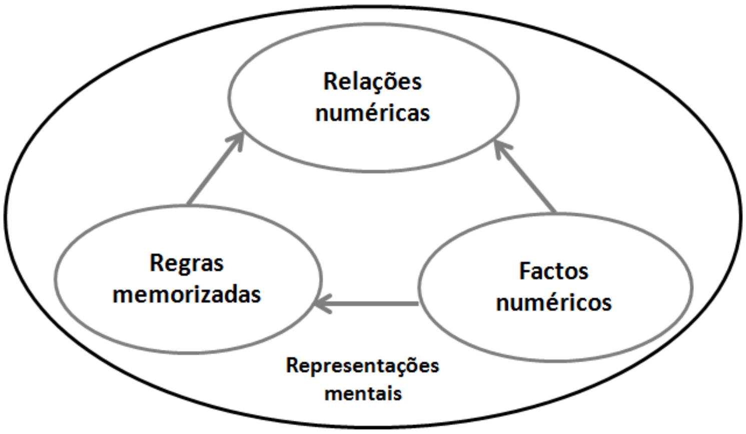



Figura 34. Quarta versão do quadro concetual.

Nesta nova versão do quadro concetual, o sentido de número deixa de fazer parte, uma vez que, apesar de relacionado não irá ser analisado. A interceção entre relações numéricas, regras memorizadas e factos numéricos deixa de existir em todos os sentidos uma vez que a análise de dados me foi mostrando que os alunos recorrem a factos e regras para relacionarem números e operações (e não o inverso) e apenas a factos para aplicarem determinadas regras memorizadas. As relações numéricas não influenciam os outros elementos, mas são influenciadas por estes. Os factos numéricos são um reportório de números e resultados de operações que os alunos possuem e que nesta fase já não são influenciados pelos outros dois elementos.

A compreensão cada vez mais aprofundada do tipo de relações numéricas que os alunos podem realizar no cálculo mental, suportadas por representações proposicionais (uma das representações mentais da Teoria dos Modelos Mentais) fez com que o pensamento relacional (Empson, Levi & Carpenter, 2010) começasse a ganhar força e importância na compreensão das relações numéricas subjacentes às estratégias dos alunos. Pelo que Empson, Levi & Carpenter (2010) passaram a ser autores de referência.

### 6.3. Síntese reflexiva

A análise da forma como decorreu a realização dos dois ciclos de experimentação foi realizada tendo em conta os diversos focos definidos aquando da planificação da experiência de ensino. Os focos *cognitivo*, *interpessoal*, *grupo/sala de aula* e *recursos* possibilitaram um olhar mais atento sobre determinados acontecimentos, permitindo assim sistematizar o que de mais significativo aconteceu em cada um dos ciclos no que se refere às estratégias, erros e dificuldades dos alunos e outros aspetos, e o modo como estes influenciaram o refinamento da experiência de ensino e do quadro concetual. O refinamento da experiência de ensino contemplou o reajustamento das tarefas, no seu conteúdo e estrutura, e a gestão da discussão na sala de aula. O refinamento do quadro concetual foi sendo influenciado pela minha experiência enquanto observadora participante nos dois ciclos de experimentação, pela análise preliminar dos dados recolhidos em cada ciclo e pelas discussões tidas em diversos contextos, nacionais e internacionais, acerca do trabalho em desenvolvimento. Saliento ainda a importância da contínua revisão de literatura para este refinamento e consequente aprofundamento de conceitos e temáticas relacionadas com o cálculo mental e os números racionais.

Tendo como ponto de partida a primeira versão do quadro concetual (Capítulo 5), o refinamento deste quadro centrou-se, primeiro na inclusão do conceito de imagem mental como elemento base ao cálculo mental dos alunos, que posteriormente evoluiu para representações mentais tendo em conta a Teoria dos Modelos Mentais que aprofundei e passei a usar como referência para a análise. Numa segunda fase, as tarefas e a comunicação foram excluídas do quadro concetual por não serem conceitos a desenvolver nos alunos, embora a sua importância seja indiscutível no quadro da experiência de ensino realizada. As tarefas promovem trabalho específico em torno do cálculo mental com números racionais desafiando os alunos a calcularem mentalmente e a desenvolverem um reportório de relações numéricas e a comunicação, nomeadamente a discussão na sala de aula, é o meio privilegiado para aceder e discutir estratégias e erros dos alunos. A referência ao sentido de número foi igualmente excluída do quadro concetual, não por não ser importante, mas por não ser um dos conceitos a analisar. Por fim, e à medida que a experimentação em ambos os ciclos foi evoluindo, a perceção das relações entre o uso de factos numéricos, regras memorizadas e relações numéricas foi sendo clarificada e aprofundada através da análise das estratégias dos alunos. Esta relação foi a última alteração realizada no quadro concetual.

O foco *cognitivo* contempla um olhar mais atento sobre o raciocínio dos alunos no cálculo mental, ou seja as suas estratégias e erros que, de certo modo, se relacionam com as dificuldades manifestadas por estes, uma vez que as dificuldades podem ser um entrave à operacionalização de estratégias mais eficientes ou até a origem de muitos dos erros cometidos pelos alunos. No que se refere às estratégias, em ambos os ciclos de experimentação estas começaram por ser muito baseadas em procedimentos e regras memorizadas tendo posteriormente evoluído para outras mais baseadas em relações numéricas. Esta evolução foi mais morosa no ciclo II (turma L) e apenas percetível em alguns alunos. No ciclo de experimentação II, estas estratégias iniciais marcadamente procedimentais tinham na sua base imagens mentais de algoritmos escritos, que se mantiveram na representação decimal. A forma como os alunos explicavam as suas estratégias para operarem com numerais decimais descrevia claramente procedimentos algorítmicos ("a conta de pé").

Na representação percentagem, numa primeira fase, os alunos da turma M (ciclo I) recorreram pouco a 10% como número de referência para o cálculo, possivelmente por não a entenderem como uma percentagem de referência, algo que foi posteriormente ultrapassado pela articulação de abordagens entre as aulas de cálculo mental e as restantes aulas de Matemática de Margarida. Na turma L (ciclo II), a não utilização desta referência pode ter estado associada à não compreensão da "décima parte de", que emergiu nas discussões coletivas por diversas vezes. No ciclo de experimentação II saliento ainda o facto de numa grande parte das estratégias dos alunos ser percetível um raciocínio aditivo, algo que não se verificou na turma M. Este tipo de estratégias fez-nos refletir e tomar algumas decisões quanto à forma de gerir a discussão na sala de aula.

De um modo geral, a reflexão em torno de estratégias muito baseadas em procedimentos, quer com Margarida (ciclo I) quer com Laura (ciclo II), encaminhou-nos para uma discussão de sala de aula centrada no desenvolvimento de relações entre números e operações, com especial atenção para a conversão entre representações dos números racionais (decimal, fração e percentagem). A par deste trabalho nas aulas de cálculo mental, ambas as professoras desenvolveram trabalho de continuidade nas restantes aulas de Matemática, prolongando ou reforçando abordagens que detetaram menos conseguidas durante as discussões de cálculo mental, principalmente no que se refere à representação percentagem. Dadas as características da turma L, Laura sentiu necessidade de promover esta continuidade de forma mais sistemática do que Margarida, tendo inclusive contemplado nas fichas de avaliação questões onde os alunos poderiam recorrer ao cálculo mental para as resolverem. Algumas destas questões foram posteriormente alvo de análise conjunta.

Ainda do ponto de vista do foco *cognitivo* e no que se refere aos erros e dificuldades manifestadas pelos alunos, estes foram os que mais influenciaram o reajustamento quer das tarefas (mais no ciclo II) quer da gestão da discussão na sala de aula (em ambos os ciclos de experimentação). Relativamente às tarefas, foram poucas as alterações realizadas no que respeita ao conteúdo. No ciclo de experimentação I a alteração mais significativa ao conteúdo das tarefas foi sugerida por Margarida na tarefa 8, para que esta se enquadrasse mais na lógica das anteriores (conter expressões com e sem valor em falta). Estas alterações relacionaram-se com o facto de a professora ter percecionado potencialidades nas expressões de valor em falta, pelas discussões interessantes que tinham proporcionado na sala de aula até ao momento. No ciclo II apenas se reajustou uma ou outra palavra em situações contextualizadas, para que estas se enquadrassem mais no vocabulário dos alunos de Laura.

No que se refere à estrutura das tarefas, o facto de não ser visível uma melhoria na prestação dos alunos da turma M, a curto prazo (da parte 1 para a parte 2 das tarefas), levou-nos a misturar expressões com e sem valor em falta em todas as tarefas em contexto matemático a partir da tarefa 5, inclusive, para que o nível de exigência cognitiva das tarefas fosse mais equilibrado em cada uma das partes. No ciclo de experimentação II esta alteração de estrutura manteve-se, não pela razão inicial considerada no ciclo I, uma vez que percebemos que a evolução dos alunos não era tanto percecionada no imediato mas mais a longo prazo, mas pelo equilíbrio em termos de nível de exigência cognitiva das tarefas. No entanto, as dificuldades manifestadas pelos alunos da turma L em transitarem do concreto (situações contextualizadas) para o abstrato (representações simbólicas), visíveis através da dificuldade em resolverem expressões em contexto matemático e em contextualizarem determinados números de referência e expressões levou-nos, a partir do meio da experiência no ciclo II, a apresentar aos alunos somente tarefas mistas onde primeiro resolveram situações contextualizadas e só depois expressões com e sem valor em falta. Estas tarefas mistas foram estruturadas a partir das tarefas utilizadas no ciclo de experimentação I. Neste ciclo de experimentação, a dificuldade dos alunos era exatamente a inversa (transitar do abstrato para o concreto) pelo que nunca sentimos necessidade de alterar a estrutura das tarefas como o fizemos no ciclo II, tendo-se mantido tarefas em que os alunos primeiro resolveram expressões em contexto matemático e só depois situações contextualizadas. No ciclo II estas alterações foram claramente influenciadas por uma das variáveis independentes (variável de aprendizagem), onde a evolução das estratégias dos alunos ou a falta delas, nos conduziu a alterações mais significativas na estrutura das tarefas.

Relativamente à gestão da discussão na sala de aula, a perceção de determinados erros e dificuldades, por parte dos alunos nos momentos de discussão coletiva foram o foco de uma grande parte das nossas reflexões e a origem de algumas mudanças ou reforço na ação das professoras, tendo por vezes levado estas, principalmente Laura, a dar continuidade nas restantes aulas de Matemática a algumas aprendizagens exploradas nas aulas de cálculo mental, como já referi. Por exemplo, as dificuldades dos alunos em compreenderem o sentido de operação multiplicação com numerais decimais e de operarem com percentagens, fez com que ambas as professoras dessem continuidade a abordagens na aula de Matemática para reforçar a aprendizagem dos alunos nestes dois aspetos.

Tanto no primeiro como no segundo ciclo de experimentação, as professoras valorizaram as aulas de cálculo mental e as discussões aí desencadeadas na medida em que lhes permitiram percecionar lacunas na aprendizagem dos alunos. Esta perceção fê-las algumas vezes repensar a abordagem a realizar na aula Matemática de forma a contribuírem para a melhoria da aprendizagem dos seus alunos. Erros como a adição/subtração de numeradores e denominadores na adição/subtração de frações, o uso de propriedades das operações que não se aplicam a uma determinada operação (e.g., multiplicação para calcular o divisor numa divisão ou a comutatividade na subtração), ou a mistura de procedimentos algorítmicos nas quatro operações com frações (e.g., uso de procedimentos de multiplicação na adição de frações), foram alvo de discussões alargadas, em ambos os ciclos e ao longo da realização das experiências. Estas discussões, no ciclo I, foram essencialmente orais enquanto no ciclo II houve necessidade de, numa fase inicial, acompanhar a explicação oral com representações pictóricas no quadro negro. Na turma M, alguns destes erros foram sendo menos comuns, enquanto na turma L, alguns persistiram até final da experiência.

A dificuldade manifestada pelos alunos, nomeadamente no uso de relações numéricas, fez-nos intensificar a discussão neste sentido enfatizando a importância de compreender a conversão entre representações e a relação entre operações, de forma a ajudá-los a desenvolverem um reportório de relações numéricas que lhes pudesse ser útil no cálculo mental com números racionais.

Em ambas as turmas a dificuldade em aplicar conhecimentos a novas situações foi percecionada por nós. Esta é uma dificuldade de âmbito geral, cujo desenvolvimento desta experiencia de cálculo mental pode ter contribuído para superar, embora seja necessário continuar a diversificar experiencias de aprendizagem, para assim ajudar os alunos a melhorarem neste aspeto.

Especificamente, em cada ciclo de experimentação foi possível perceber a dificuldade dos alunos em compreender o valor posicional dos algarismos nos numerais decimais, tendo em conta os erros da turma L e os da turma M nas operações multiplicação e divisão com estes numerais. Esta dificuldade dos alunos centrou muitas das discussões na importância da composição e decomposição de numerais decimais nas operações adição e subtração e no sentido de operação multiplicação e divisão, tendo a conversão entre decimais e frações surgido como uma forma de apoiar a compreensão dos alunos.

Na turma de Laura, a falta de conhecimentos básicos de Matemática (e.g., compreensão da "décima parte de") e de um reportório de factos numéricos (e.g., a tabuada) podem ter sido um impedimento à evolução mais rápida das estratégias dos alunos bem como ao aparecimento de inúmeros erros de cálculo. A estes se juntam a não compreensão do conceito de fração, bem como a relação entre operações inversas, o que fez com que nesta turma os alunos recorressem frequentemente à operação inversa de uma dada operação, para calcular o valor em falta numa expressão, o que nem sempre é possível na subtração e divisão. Esta dificuldade dos alunos (com maior frequência na turma L) originou diversas clarificações acompanhadas de exemplos e contraexemplos, sempre na tentativa de os ajudar a compreenderem a relação entre as operações.

O foco *interpessoa*l, que contempla um olhar sobre a discussão na sala de aula e interação entre alunos, foi aquele sobre o qual mais refletimos e que, consequentemente, nos levou a agir de determinada forma na gestão das discussões coletivas, a par do foco *grupo/sala de a*ula (referente às características dos alunos e participação) uma vez que ambos se relacionam. A variável ambiental que contempla o envolvimento dos alunos, em ambos os ciclos, influenciou claramente aspetos observados nestes dois focos, tendo igualmente contribuído para a mudança ou reforço da ação das professoras na sala de aula. Por exemplo, o facto de, em ambos os ciclos de experimentação, se ter excedido o tempo previsto para a realização das tarefas, de se verificarem momentos de discussão longos e repetitivos bem como pouca participação de alguns alunos a par das suas dificuldades de comunicação oral, fez com que, tanto Margarida como Laura intensificassem o questionamento aos alunos com o intuito de os focar mais no essencial da discussão, reajustando sempre que possível a linguagem usada por estes nas suas explicações. Este questionamento foi mais forte por parte de Margarida no ciclo I do que por parte de Laura no ciclo II. No ciclo II, com o objetivo de enfatizar a importância da abordagem que se estava a fazer com a experiência de ensino e o de envolver o maior número de alunos possível nas discussões coletivas, Laura promoveu ainda um momento de auto e heteroavaliação com os alunos para que estes avaliassem o seu envolvimento nas dinâmicas de cálculo mental e deu a conhecer esta avaliação aos encarregados de educação via cadeneta do aluno. Esta foi uma ação que levou a que mais alguns alunos passassem a participar com maior regularidade nas discussões coletivas.

O grande número de ideias interessantes discutidas nas discussões coletivas da turma M fez com que eu e Margarida sentíssemos necessidade de sistematizar estratégias com os alunos no início ou final das aulas, embora Margarida tivesse tido o cuidado de o ir fazendo ao longo dos diversos momentos de discussão. Na turma L, esta necessidade foi sentida pelos alunos após momentos de discussão demasiado longos e repetitivos. Assim, Laura passou a sistematizar ideias e estratégias nas aulas de cálculo mental quando possível, quando não o era, fazia-o na aula de Matemática seguinte.

O facto de excedermos por diversas vezes o tempo previsto para a realização da tarefa (90 minutos por tarefa) principalmente no ciclo II, fez com que eu e Laura tomássemos diversas medidas ao longo da experiência, facto este que não aconteceu de forma tão marcada no ciclo I, onde a ênfase foi essencialmente colocada na discussão de relações numéricas e no questionamento aos alunos. Por exemplo, logo nas primeiras tarefas, eu e Laura optámos por projetar o resultado das expressões com o intuito de centrar os alunos na discussão do resultado apresentado ou equivalente, em vez de o projetar apenas depois da discussão de uma dada questão. Mais tarde, a situação inicial voltou a ser reposta aquando do aparecimento de situações contextualizadas, por sugestão de Laura, uma vez que não queria influenciar as respostas dos alunos e porque lhe pareceu que o ritmo e tempo de discussão tinham melhorado. Outro aspeto que surgiu no ciclo II, a propósito das dinâmicas de discussão na sala de aula, foi a necessidade de Laura discutir com regularidade normas de sala de aula (normas sociais e sociomatemáticas), algo que Margarida nunca sentiu necessidade de fazer.

O foco nos *recursos*, nomeadamente no uso de um *PowerPoint* temporizado, fez-nos repensar a sua influência, a propósito de um tipo de erro que surgiu com maior intensidade na turma M (e.g., 0,2 é equivalente a $\frac{1}{2}$). Após alguma reflexão e discussão, eu e Margarida considerámos que, apesar do *PowerPoint* temporizado poder levar os alunos a centrarem o seu campo de visão no denominador e a usarem no cálculo 0,2 como sendo equivalente a $\frac{1}{2}$, este não era um erro preocupante uma vez que durante a discussão os alunos mostravam reconhecer de imediato o erro reajustando assim a sua estratégia. Margarida desvaloriza esta limitação do recurso utilizado e realça a discussão como o momento mais importante das aulas de cálculo mental, pois é através desta que os alunos aprendem e enriquecem o seu reportório de relações numéricas e de estratégias.

Os dois ciclos de experimentação foram realizados em turmas com características diferentes o que fez com que a variável sistémica (uma das variáveis dependentes) assumisse alguma importância pela necessidade que tivemos de adequar de forma sistemática, principalmente a experiência de ensino realizada no ciclo de experimentação II. Esta adequação fez com que se realizassem refinamentos nas tarefas e na gestão da discussão na sala de aula, como referi anteriormente, mas também intensificou a articulação entre abordagens realizadas nas aulas de cálculo mental e nas restantes aulas de Matemática, algo que não foi muito visível no ciclo de experimentação I.

Apesar das diferenças em termos de características e prestação dos alunos em ambos os ciclos de experimentação, houve no entanto semelhanças que merecem alguma reflexão e questionamento. Uma dessas semelhanças refere-se ao tipo de estratégias usadas pelos alunos de ambas as turmas no início das experiências. Estratégias muito baseadas em procedimentos e regras memorizadas levam a questionar a forma como se desenvolve o ensino e a aprendizagem dos números racionais e suas operações onde o desenvolvimento de relações numéricas parece escasso, não contribuindo para que os alunos pensem sobre números e operações e usem essas aprendizagens em situações diversas. Esta inflexibilidade pode ser uma das razões que leva os alunos de ambas as turmas a terem manifestado dificuldades em aplicar conhecimentos a novas situações.

O aparecimento de determinados erros e dificuldades tanto na turma M como na turma L faz-me questionar se a aprendizagem dos números racionais não deverá ser realizada de forma mais relacional e compreensiva em vez de se enfatizar a memorização sem compreensão, dadas as dificuldades manifestadas pelos alunos em relacionarem operações inversas ou mesmo em estabelecerem conexões entre contextos e determinadas representações, sejam elas simbólicas ou pictóricas.

Por último, em ambos os ciclos de experimentação, embora em momentos diferentes da experimentação (ciclo I na tarefa 1 e ciclo II na tarefa extra), o surgimento de uma mesma estratégia incorreta dos alunos (multiplicação cruzada entre numeradores e denominadores para calcular a soma de duas frações equivalentes a metade), originou explorações com números e teste de conjeturas na aula de Matemática de ambas as turmas. Isto revela que o desenvolvimento de cálculo mental na sala de aula pode ser potenciador de situações de aprendizagem interessantes (vindas dos alunos) que vão para além do cálculo mental em si. A capacidade de calcular mentalmente é transversal a todo o currículo de Matemática e isso foi visível pela forma como este se articulou em cada um dos ciclos de experimentação com os restantes tópicos matemáticos e com as diferentes abordagens realizadas na aula de Matemática.

A realização de uma experiência de ensino centrada no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, em ambos os ciclos de experimentação, revelou-se um apoio importante à identificação de lacunas na aprendizagem dos alunos, bem como uma forma de reforçar aprendizagens identificadas como menos conseguidas. A evolução das estratégias dos alunos, em cada uma das experiências, esteve dependente dos conhecimentos dos alunos e do seu envolvimento nas dinâmicas de sala de aula. A conjetura de ensino aprendizagem evoluiu do ciclo I para o ciclo II de experimentação, originando uma teoria local de aprendizagem que contempla condições essenciais para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos.

# Capítulo 7

# Estratégias de cálculo mental dos alunos

Neste capítulo analiso as estratégias de cálculo mental dos alunos nos dois ciclos de experimentação em algumas das questões de cálculo mental da experiência de ensino, justificando as opções que me levaram a selecionar as questões analisadas. Concluo com uma síntese sobre as estratégias mais comuns dos alunos no cálculo mental com números racionais nas representações fracionária, decimal e percentagem e quando surgem duas destas representações em conjunto.

## 7.1. Estratégias dos alunos no cálculo mental com números racionais

Tal como foi descrito em capítulos anteriores, este estudo envolve a realização de uma experiência de ensino em dois ciclos de experimentação (ciclo I – turma M e ciclo II – turma L). Esta experiência de ensino foi alvo de diversos reajustamentos, tendo-se mantido, no entanto, o número de tarefas e questões resolvidas pelos alunos em ambas as turmas: 11 tarefas com um total de 105 questões de cálculo mental, das quais 85 eram expressões e 20 situações contextualizadas. As questões apresentavam diferentes níveis de exigência cognitiva, representando as expressões de valor em falta e as situações contextualizadas um maior desafio para os alunos do que as expressões sem valor em falta.

O grande volume de dados gerado pela recolha efetuada nos ciclos de experimentação I e II colocou a necessidade de selecionar apenas algumas questões para análise. Para esta seleção foi necessário estabelecer critérios apropriados. Assim selecionei questões: (i) diferentes no que se refere ao seu objetivo ou relacionadas e que pudessem ilustrar a evolução das estratégias dos alunos; (ii) representativas, sempre que possível, do tipo de números e operações usados nas diversas tarefas; e (iii) originadoras de estratégias semelhantes ou comuns a ambas as turmas, mas também estratégias singulares suscetíveis de análise e reflexão. Os dados obtidos em questões satisfazendo estes critérios permitirão responder não só à primeira questão deste estudo, indicando o tipo de estratégias de cálculo mental dos alunos com números racionais nas representações fracionária, decimal e percentagem, mas também à última questão que se relaciona com a evolução das estratégias dos alunos ao longo da experiência de ensino.

A análise será realizada por representação do número racional (fracionária, decimal, percentagem) e de acordo com a categorização apresentada no Anexo H, pelo que, em cada secção apresentarei um quadro onde constam todas as questões alvo de análise e as tarefas onde se inserem, um outro quadro onde apresento o número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M (TM) e L (TL) e diversos quadros onde sistematizo as estratégias dos alunos para cada questão analisada. Sempre que no quadro referente às questões surja na coluna da tarefa a indicação, por exemplo a 5 ou 6, significa que a questão em causa foi apresentada aos alunos de ambas as turmas em tarefas diferentes (tarefa 5 ou tarefa 6), por força dos reajustamentos que se realizaram na organização da experiência do ciclo de experimentação I para o ciclo II. A apresentação dos quadros referentes ao número de respostas corretas, incorretas e em branco pretende apoiar inferências de âmbito mais geral, isto porque algumas das respostas corretas registadas pelos alunos na folha de registo surgiram a partir de estratégias incorretas que tinham subjacentes conceções erradas acerca dos números e das operações, como analiso no Capítulo 8. Apesar do número de respostas corretas não corresponder diretamente ao número de estratégias apresentadas pelos alunos na sala de aula, uma vez que nem todos os alunos foram de igual modo participativos e que apenas se discutiram estratégias diferentes entre si e não estratégias repetidas por uma questão de gestão de tempo, estes quadros dão-nos uma perspetiva do tipo de questão em cuja resolução, os alunos obtiveram mais sucesso. Quadros mais completos, contendo todas as questões por representação e respetivas respostas e número de respostas dos alunos encontram-se em Anexo (Anexo R, S, T e U).

Quando me refiro à "maioria dos alunos" ou a "grande parte dos alunos", tenho em atenção a maioria dos alunos que apresentaram estratégias nos momentos de discussão coletiva e não à maioria dos alunos da turma uma vez que, como já referi, a participação foi muito variável. Ao longo da análise, a distinção entre alunos das, turmas M e L não pretende estabelecer uma comparação dos desempenhos mas antes ser ilustrativa das estratégias que foram sendo mais visíveis nas intervenções dos alunos e da forma como estas estratégias foram evoluindo ao longo da experimentação. Neste sentido, não apresento sempre estratégias de alunos de ambas as turmas, mas sim estratégias representativas ou singulares dos raciocínios dos alunos (da turma M e/ou da L) no cálculo mental com números racionais para cada questão analisada.

### 7.1.1. Estratégias em questões com frações

Os alunos das turmas M e L começaram a experiência de ensino com questões de cálculo mental envolvendo apenas a representação fracionária nas tarefas 1 e 2. Nas tarefas 3, extra, 6, 8, 9 e 10, a representação fracionária surge em conjunto com outras representações embora nesta seção sejam analisadas as questões envolvendo apenas frações. No total, os alunos resolveram 31 expressões e 6 situações contextualizadas envolvendo apenas a representação em fração. Destas questões, serão analisadas as estratégias dos alunos a 14 expressões e 1 situação contextualizada (Quadro 9).

Quadro 9. Questões de cálculo mental com a representação fracionária.

<table>
<tr><th colspan="6">Questões</th><th>Tarefa</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Expressões</td><td>$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$</td><td>$? -\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{1}{2}-? =\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{2}+?=1$</td><td>$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$5\times\frac{1}{5}$</td><td>$\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}$</td><td>$\frac{1}{4}\div?=\frac{1}{2}$</td><td>34×23</td><td>$\frac{3}{4}\div?=\frac{1}{4}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{6}{8}\div\frac{3}{4}$</td><td></td><td></td><td></td><td>Extra</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>$\frac{2}{3}\times?=1$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>9 ou 10</td></tr>
<tr><td>Situações contextualizadas</td><td colspan="5">A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$ .Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?</td><td>9 ou 10</td></tr>
</table>

O quadro 10 apresenta o número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L a questões envolvendo apenas frações.

Quadro 10. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com frações.

| | **Número de respostas** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Corretas | | Incorretas | | Não responde | |
| **Questões** | TM | TL | TM | TL | TM | TL |
| $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ | 16 | 12 | 1 | 6 | 1 | 1 |
| $? - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$ | 11 | 2 | 7 | 12 | 0 | 5 |
| $\frac{1}{2} - ? = \frac{1}{4}$ | 7 | 5 | 7 | 7 | 4 | 7 |
| $\frac{1}{2} + ? = 1$ | 18 | 13 | 0 | 5 | 0 | 1 |
| $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ | 7 | 7 | 7 | 8 | 4 | 4 |
| $5 \times \frac{1}{5}$ | 17 | 13 | 2 | 4 | 0 | 2 |
| $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$ | 10 | 1 | 8 | 17 | 1 | 1 |
| $\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$ | 12 | 12 | 6 | 4 | 1 | 3 |
| $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ | 16 | 8 | 3 | 7 | 0 | 4 |
| $\frac{3}{4} \div ? = \frac{1}{4}$ | 3 | 2 | 13 | 12 | 3 | 2 |
| $\frac{7}{14} + \frac{1}{2}$ | 19 | 8 | 1 | 7 | 0 | 4 |
| $\frac{6}{8} \div \frac{3}{4}$ | 11 | 7 | 7 | 6 | 2 | 6 |
| $\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$ | 8 | 9 | 11 | 7 | 1 | 3 |
| $\frac{2}{3} \times ? = 1$ | 13 | 5 | 4 | 6 | 3 | 8 |
| A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$ .Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate? | 13 | 8 | 4 | 7 | 3 | 4 |

A análise deste quadro mostra que os alunos registaram um maior número de respostas corretas na adição de frações. Na subtração e divisão, especialmente em expressões de valor em falta, os alunos apresentam um menor número de respostas corretas, especialmente a turma L, do que na adição e na multiplicação.

$\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

A expressão $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ foi a primeira que os alunos resolveram na experiência de ensino, em ambos os ciclos de experimentação, embora a adição de duas frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ tenha surgido diversas vezes ao longo da experiência. O Quadro 11 apresenta as estratégias mais comuns dos alunos na resolução desta expressão, sendo que a maioria dos alunos recorre à aplicação de *regras memorizadas*, como fez Elsa (turma M) obtendo como resultado $\frac{2}{2}$ ou $\frac{2}{4}$. Alguns alunos recorrem à aplicação de *factos numéricos* como Maria (turma M) indicando de imediato o resultado 1. Apenas Gonçalo da turma L optou por recorrer a *relações numéricas*.

Quadro 11. Estratégias para a resolução de $\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$.

| | | **Tipo de estratégia** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Marta***: Eu fiz logo meio mais meio que sei logo que dá 1. | Facto numérico | Duas metades formam a unidade | | |
| **TM** | ***Elsa***: Como os denominadores são iguais, dá-se o mesmo denominador e os numeradores somam-se que é igual a 1. Porque é 2 sobre 2 que é igual a 1. | Regras memorizadas | Procedimento do algoritmo da adição de frações | | Imagem mental |
| **TL** | ***Gonçalo***: Eu pensei numa maçã e parti. E depois eu juntei os dois meios e depois vi logo que era uma unidade. | Relações numéricas | Relação parte-todo | | |

A estratégia de Marta evidencia a aplicação de um *facto numérico* que a aluna conhece (duas metades formam a unidade), podendo este facto estar associado à *imagem mental* da representação pictórica da adição de duas frações que representam metade de uma quantidade ou à simples memorização do facto em causa, embora isto não esteja explicito na sua explicação.

A explicação de Gonçalo sugere que este recorre igualmente a uma *imagem mental*, embora diferente da de Marta pois apoia-se num contexto que envolve maçãs: "Pensei numa maçã e parti. E depois eu juntei os dois meios". As estratégias de Gonçalo e Marta parecem muito semelhantes, no entanto, enquanto Marta diz de imediato "Meio mais meio que sei logo que dá 1" (aplicação rápida de um facto numérico), Gonçalo sente necessidade de imaginar uma maçã (todo), de a partir em meios (partes) e de voltar a juntar as partes para formar o todo estabelecendo assim uma *relação parte-todo*.

Elsa apresenta a estratégia mais comum em ambas as turmas e que evidencia a aplicação de *regras memorizadas*, uma vez que explicita os procedimentos referentes ao algoritmo da adição de frações: "Como os denominadores são iguais, dá-se o mesmo denominador e os numeradores somam-se". Esta estratégia poderá ter sido originada pela visualização de uma *imagem mental* do procedimento que a aluna conhece com especial foco nos denominadores iguais, uma vez que esta é supostamente uma condição essencial para a adição de frações.

Sempre que surgiram expressões com e sem valor em falta, envolvendo a adição de duas frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ os alunos recorreram a estratégias semelhantes às apresentadas no Quadro 11. Realço, no entanto, uma estratégia diferente que surgiu a propósito do cálculo de $\mathbf{\frac{1}{2}+?=1}$, onde Bruno recorre a *relações numéricas*, nomeadamente à *relação entre as operações inversas* adição e subtração para subtrair à soma, uma das parcelas a fim de obter a outra parcela (Quadro 12).

Apesar da explicação de Bruno ser demasiado breve, subjacente à sua estratégia poderá ter estado uma *representação proposicional* onde Bruno poderá ter relacionado $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{2}+?=1$: se $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ então $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ou então a *imagem mental* de uma "unidade" inserida num contexto conhecido (piza, maçã, etc.) que ao ser-lhe retirada uma metade resta-lhe outra metade.

Quadro 12. Estratégia para a resolução de $\mathbf{\frac{1}{2}+?=1.}$

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Aluno/Estratégia | Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
| **TM** | ***Bruno***: Fiz $1-\frac{1}{2}$ que deu $\frac{1}{2}$. | Relações numéricas | Relação entre operações inversas | | Representação proposicional/ Imagem mental |

Na tarefa extra, sensivelmente a meio da experimentação, é proposto o cálculo de $\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$ como forma de perceber se os alunos reconhecem $\frac{7}{14}$ como equivalente a $\frac{1}{2}$ para assim recorrerem a factos numéricos como os usados por Marta no cálculo de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ou se optam por outro tipo de estratégia. Em comparação com os resultados relativos à questão $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, o número de alunos que indicou de imediato o resultado 1 aumentou na turma M, mas o mesmo não se verificou na turma L. Nesta turma, as estratégias dos alunos evidenciam o recurso a regras memorizadas tendo em conta que os resultados mais comuns apresentam frações com denominador 14 ou outro, muitas vezes fruto de respostas incorretas. O elevado número de respostas incorretas pode ser uma consequência da aplicação de regras memorizadas sem compreensão como irá ser discutido no capítulo seguinte sobre os erros dos alunos.

A propósito do cálculo de $\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$, destaco mais uma vez a estratégia de Marta (Quadro 13) por evidenciar uma generalização acerca de frações que representam "metade".

Esta foi uma generalização que foi sendo verbalizada por diversos alunos, em ambas as turmas, e que permitiu reconhecerem qualquer fração equivalente a $\frac{1}{2}$. A aluna *relaciona o numerador e o denominador da fração* $\frac{7}{14}$ e ao verificar que 7 é metade de 14 conclui que a referida fração é equivalente a $\frac{1}{2}$, aplicando de seguida o *facto numérico* que aplicou no cálculo de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Esta estratégia poderá ter subjacente uma *representação proposicional* baseada nas relações numéricas: se $\frac{a}{b}$ em que $a=b\div 2$ então $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$.

Quadro 13. Estratégia para a resolução de $\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$.

| | Aluno/Estratégia | Tipo de estratégia: Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
|---|---|---|---|---|---|
| **TM** | ***Marta***: Eu soube imediatamente que $\frac{7}{14}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$. . . Porque metade de 14 é 7. Então equivale a $\frac{1}{2}$. Então $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ dá 1. | Relações numéricas | Relação entre numerador e denominador de uma fração | Factos numéricos | Representação proposicional |

A determinação de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ou de uma soma de $\frac{1}{2}$ com outra fração equivalente a $\frac{1}{2}$ não requer grandes cálculos mas apenas a compreensão, por parte do aluno, das quantidades envolvidas ou a simples aplicação de um facto numérico como fez Marta. No entanto, a maior parte dos alunos, no início da experiência, recorreu a regras memorizadas para calcular o valor da expressão. O facto de expressões equivalentes a esta surgirem repetidamente ao longo da experiência e com diferentes graus de dificuldade, como, por exemplo, em expressões de valor em falta como a que resolveu Bruno, parece ter ajudado os alunos a compreenderem e a identificarem frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ tendo inclusive chegado a verbalizar uma generalização como fez Marta.

$? - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$

O cálculo de $? - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$ fez surgir nas estratégias dos alunos de ambas as turmas uma das propriedades da subtração (aditivo=subtrativo + resto) tal como era pretendido e como evidencia a estratégia apresentada por João (Quadro 14). O aluno recorre a *relações numéricas* (propriedade da operação subtração) mas também a *regras memorizadas* (aplicação de procedimento para a adição de frações). Esta estratégia poderá ter subjacente uma *representação proposicional* centrada na propriedade da operação usada por João: se $? - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$ então $\frac{5}{10} + \frac{3}{10} = ?$. No entanto, a última parte desta estratégia poderá ter sido influenciada pela *imagem mental* de procedimentos da adição de frações onde João, focando-se visualmente nos denominadores iguais, apenas adiciona numeradores.

Quadro 14. Estratégia para a resolução de $? - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Aluno/Estratégia** | | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***João***: Eu fiz assim, mantive o denominador e somei os numeradores. | Relações numéricas | Propriedade da operação subtração | Regras memorizadas | Representação proposicional/ Imagem mental |

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - ? = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

A expressão $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - ? = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$, apesar de envolver igualmente uma propriedade da subtração, originou alguma diversidade de estratégias, talvez por envolver frações de referência mais familiares para os alunos como é o caso de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. As estratégias apresentadas (Quadro 15) centram-se essencialmente em *relações numéricas*. Marta e Rogério (turma M) recorrem à *relação entre expressões* e Rui (turma L) à *mudança de representação*.

A estratégia de Marta sugere que esta se baseou numa *representação proposicional* para estabelecer relação entre a expressão apresentada e uma expressão sua conhecida: se $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ então $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. No caso de Rogério, a referência a "metade de um bolo" sugere o recurso não só a uma *imagem mental* centrada na visualização mental de metade de um bolo do qual "comíamos metade" e assim restaria $\frac{1}{4}$ mas também a uma *representação proposicional* baseada na relação que estabelece: Se $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ logo $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Na turma L, Rui recorre a um *modelo mental* envolvendo o contexto de dinheiro, e *muda a representação* fracionária para decimal não mostrando de forma explicita a operação que realiza, embora o resultado sugira uma subtração. Esta estratégia poderá ter também subjacente uma *representação proposicional* cujo foco está na mudança de representação e supostamente na aplicação de uma das propriedades da subtração: se $\frac{1}{2} = 0{,}50$ e $\frac{1}{4} = 0{,}25$ então $\frac{1}{2} - ? = \frac{1}{4}$ é equivalente a $0{,}50 - ? = 0{,}25$, assim $? = 0{,}50 - 0{,}25$.

Quadro 15. Estratégias para a resolução de $\mathbf{\frac{1}{2} - ? = \frac{1}{4}}$.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="4">Tipo de estratégia</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aluno/Estratégia</th><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Outros elementos</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td rowspan="2">TM</td><td>Marta: A mim deu-me $\frac{1}{4}$. Eu fiz, vi que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ é $\frac{1}{2}$ .Depois se nós fossemos tirar $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ dava $\frac{1}{4}$.</td><td rowspan="3">Relações numéricas</td><td rowspan="2">Relação entre expressões</td><td rowspan="3"></td><td>Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>Rogério: Temos a metade de um bolo. Comíamos metade e ficamos só com um quarto. Então é metade menos $\frac{1}{4}$.</td><td>Imagem mental/ Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>TL</td><td>Rui: $\frac{1}{2}$ equivale a 50 cêntimos e $\frac{1}{4}$ a 25 cêntimos. Fica 25 cêntimos.</td><td>Mudança de representação/ Propriedade da operação subtração</td><td>Modelo mental/ Representação proposicional</td></tr>
</table>

No cálculo de $\mathbf{\frac{1}{2} + ? = \frac{3}{4}}$ Rui volta a optar pela mudança de representação, como fez no cálculo de $\frac{1}{2} - ? = \frac{1}{4}$ enquanto alguns alunos da turma M substituem $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{4}$ e pensam quanto falta a $\frac{2}{4}$ para obter $\frac{3}{4}$ .

A mudança da representação fracionária para decimal ganhou alguma expressão na turma L pelo facto de os alunos recorrerem frequentemente a modelos mentais de contextos de dinheiro, algo que não aconteceu na turma M, o que poderá relacionar-se com a sua experiência fora da escola.

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$

O recurso a imagens mentais de representações pictóricas de frações por parte dos alunos como suporte para as suas estratégias foi mais comum na turma L do que na turma M, embora a professora Margarida tivesse incentivado os alunos a fazê-lo. Depois de discutidas diversas estratégias, entre elas a aplicação do algoritmo da subtração de frações com denominadores diferentes, Margarida desafia os alunos a pensarem de outra forma: "Ninguém fez de outra maneira. Mas agora depois de termos discutido os outros, se calhar já sabem fazer de outra maneira. Alguém fazia agora já de outra maneira? Como é que fazias João?" Este aluno (turma M), que inicialmente tinha recorrido à mesma estratégia que Rui (turma L) (Quadro 16) apresenta uma segunda estratégia baseada na *imagem mental* de uma piza onde *relaciona parte-todo* e resolve a expressão através de *subtrações sucessivas*. João imagina uma piza (o todo) e sucessivamente retira diversas partes. Começa por representar $\frac{3}{4}$ retirando $\frac{1}{4}$ ao todo ("onde tivesse fora uma fatia, $\frac{1}{4}$") e posteriormente retira mais $\frac{1}{2}$ ("tirava-se $\frac{1}{2}$"), tal como era pedido na expressão.

Quadro 16. Estratégias para a resolução de $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***João***: Eu imaginava uma piza na minha cabeça onde tivesse fora uma fatia, $\frac{1}{4}$. Tinha fora $\frac{1}{4}$ que era o que sobrava da primeira. E tirava-se $\frac{1}{2}$. [Ficava] $\frac{1}{4}$. | Relações numéricas | Relação parte-todo | Subtrações sucessivas | Imagem mental |
| **TM** | **Ivo**: Fiz a regra. Fiz 2×2 que dava 4 e depois em cima também fiz vezes 2 e depois 3 menos 2 é 1. $\frac{1}{4}$. | Regras memorizadas | Procedimento do algoritmo de subtração de frações | Factos numéricos | |
| **TL** | ***Rui***: Deu-me $\frac{1}{4}$ porque [substitui] um meio por $\frac{2}{4}$. . . 3 com 2 deu 1 . . . A diferença. | Relações numéricas | Frações equivalentes | Regras memorizadas | |

A estratégia de Rui evidencia o recurso a *relações numéricas* (frações equivalentes) seguida da aplicação de *regras memorizadas*. O aluno substitui $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{4}$ sem indicar qualquer procedimento para o cálculo da segunda fração, o que me leva a inferir que este poderá já ter um reportório de frações equivalentes a metade ao qual recorre quando necessário e aplica o procedimento do algoritmo para subtração de frações com denominadores iguais. Esta estratégia poderá ter na sua origem a *imagem mental* de denominadores iguais, condição supostamente necessária para subtrair duas frações e que levou Rui a substituir $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{4}$ para que tal condição se verificasse.

Ivo (turma M) apresenta uma estratégia que reflete desde logo a aplicação de um conjunto de procedimentos (*regras memorizadas*) e *factos* (tabuada do 2) e cuja *imagem mental* poderá ser semelhante à usada por Rui. No entanto, a estratégia de Rui difere da de Ivo pela forma como indicou a fração equivalente que usou, assumindo-a sem referência a qualquer cálculo, algo que Ivo não fez uma vez que indicou todos os procedimentos usados para o cálculo da fração equivalente.

No cálculo de $\mathbf{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$, quando esperava que os alunos recorressem a imagens mentais de representações pictóricas, uma vez que as frações envolvidas representavam dízimas infinitas, a maioria (em ambas as turmas) apresentou uma estratégia semelhante à de Ivo centrada em regras memorizadas e verbalizando o cálculo da fração equivalente a $\frac{1}{3}$ de denominador 6.

No cálculo da expressão $\frac{5}{10}+\frac{1}{4}$, que se relaciona com $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$, os alunos (na turma M) voltam a apresentar estratégias onde operam com numerais decimais em vez de frações (0,5+0,25), mudando assim a representação. Em ambas as turmas recorrem igualmente a frações equivalentes a $\frac{5}{10}$ de denominador 4 ou múltiplo de 10 ($\frac{2}{4}$ ou $\frac{10}{20}$) ou equivalente a $\frac{1}{4}$ com denominador múltiplo de 10 para depois aplicarem regras memorizadas.

A possível inexistência de modelos ou imagens mentais dos alunos no cálculo de frações menos comuns na experiência de ensino (como $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$) pode ter levados os alunos a usarem estratégias onde se sentiam mais confortáveis (caso da aplicação de procedimentos referentes à adição de frações – regras memorizadas), mesmo depois de já terem apresentado estratégias baseadas em inúmeras relações numéricas. A visualização pictórica mental de uma piza partida em 3 parte iguais e posteriormente em 6 partes iguais, poderia ter ajudado os alunos a calcularem rapidamente o valor sem necessidade de recurso a frações equivalentes e consequentemente à aplicação de algoritmos.

**Situação do bolo de chocolate**

A resolução desta situação contextualizada, que surgiu nas últimas tarefas da experiência de ensino, poderia ser resolvida através da expressão $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$, cujo resultado teria de ser comparado com $\frac{1}{2}$ para se poder chegar a uma resposta.

A estratégia de Diogo (Quadro 17) ilustra o tipo de estratégia mais comum dos alunos, de ambas as turmas, para a resolução desta situação. Diogo recorre a *frações equivalentes* sem necessidade de explicitar o cálculo de qualquer uma delas, adiciona-as e compara facilmente $\frac{3}{10}$ com $\frac{5}{10}$. A sua explicação mostra alguma destreza na linguagem, mas também no uso de frações equivalentes. De notar que, por diversas vezes os alunos manifestaram necessidade de explicar o processo de cálculo de frações equivalentes bem como o de adição de frações, algo que Diogo fez de forma sucinta e sem grandes explicações neste sentido.

Quadro 17. Estratégia para a resolução da situação do bolo de chocolate.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Aluno/Estratégia** | | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TL** | ***Diogo***: Menos. $\frac{1}{5}$ equivale a $\frac{2}{10}$. Se juntarmos $\frac{2}{10}$ mais $\frac{1}{10}$ do pai fica $\frac{3}{10}$.E para alcançar metade tinha que ser $\frac{5}{10}$. $\frac{3}{10}$é menos de metade. | Relações numéricas | Frações equivalentes | | Representação proposicional |

A facilidade com que os alunos têm vindo a recorrer a frações equivalentes, no cálculo de determinadas expressões, pode ser revelador de que estes criaram um reportório de frações equivalentes ou então de que o cálculo destas frações está devidamente compreendido e interiorizado.

$\mathbf{5 \times \frac{1}{5}}$

O cálculo de $5 \times \frac{1}{5}$ envolve uma propriedade da operação multiplicação – existência de inverso para um elemento não nulo. As estratégias dos alunos evidenciam a aplicação de *regras memorizadas* (aplicação de procedimentos do algoritmo da multiplicação de frações) sem no entanto evidenciarem o conhecimento da propriedade envolvida como mostram as estratégias de Tiago e de Bernardo (Quadro 18), sendo que, a de Bernardo mostra ainda a aplicação de um outro procedimento que envolve as propriedades comutativa e o elemento neutro da multiplicação onde, de forma simplificada é possível eliminar o numerador de uma fração igual ao denominador da outra (e.g., $5 \times \frac{1}{5} = \frac{5}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{5\times1}{5\times1} = 1$). Este último procedimento a que os alunos se referem como a "lei do corte" é muitas vezes realizado sem compreensão e consciência das propriedades envolvidas, pelo que a sua utilização, muitas vezes, não passa da simples aplicação de um procedimento.

Quadro 18. Estratégias para a resolução de $\mathbf{5 \times \frac{1}{5}}$.

| | | **Tipo de estratégia** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TL** | ***Tiago***: $5 \times \frac{1}{5}$, $\frac{5}{5}$ que é igual à unidade.<br><br>***Bernardo***: $\frac{5}{5}$. Coloquei 1 sobre 5. Não, 5 sobre 1 e cortei o 1 com o outro 1 e deu-me $\frac{5}{5}$. | Regras memorizadas | Procedimentos do algoritmo de multiplicação de frações | | Imagem mental |

As estratégias destes alunos poderão ter sido originadas por *imagens mentais* de procedimentos relacionados com a multiplicação de números racionais na representação fracionária (multiplica numeradores e denominadores), tendo em conta que Bernardo sente necessidade de transformar o número natural 5 na fração $\frac{5}{1}$ para realizar a operação.

No final da experiência (tarefa 9), apesar de se manterem as estratégias anteriores, a propósito do cálculo de $\frac{2}{3} \times ? = 1$ surgem em ambas as turmas a referência à propriedade envolvida (Quadro 19). Cátia (turma L) e Pedro (turma M) indicam de forma explicita que o valor em falta deverá ser o inverso de $\frac{2}{3}$, estabelecendo assim uma *relação* entre a expressão apresentada e a propriedade da multiplicação que conhecem.

Quadro 19. Estratégias para a resolução de $\frac{2}{3} \times ? = 1$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Pedro***: São frações... inversas . . . $\frac{3}{2}$. | Relações numéricas | Propriedade da operação multiplicação | | Representação proposicional |
| **TL** | ***Cátia***: $\frac{3}{2}$. . . Fiz o inverso. | | | | |

Estas estratégias poderão ter sido originadas por uma *representação proposicional* onde ambos os alunos comparam o conhecimento matemático que possuem com a expressão de cálculo mental que têm de resolver: se $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$ então $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$.

O facto de no cálculo de $5 \times \frac{1}{5}$ os alunos não recorrerem à propriedade da multiplicação envolvida pode evidenciar um desconhecimento da propriedade ou então alguma dificuldade em identificar esta propriedade quando números inteiros estão envolvidos (como é o caso de 5 e o seu inverso). Mais tarde a identificação e utilização desta propriedade surge nas estratégias dos alunos, o que poderá ser reflexo das diversas discussões tidas em torno das propriedades das operações.

$\mathbf{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}$

Para o cálculo de $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ na tarefa 2 a maioria dos alunos recorreu às mesmas estratégias que Cátia (turma L) e Bruno (turma M) (Quadro 20), estratégias estas que surgiram com alguma frequência em situações semelhantes (como por exemplo no cálculo de $\frac{4}{6} \times \frac{6}{7}$ ) até ao final da experimentação em situações de multiplicação de duas frações.

Quadro 20. Estratégias para a resolução de $\mathbf{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}$.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="4">Tipo de estratégia</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aluno/Estratégia</th><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Outros elementos</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td>TM</td><td>Bruno: Eu apliquei a lei do corte e depois deu-me $\frac{2}{4}$.</td><td rowspan="2">Regras memorizadas</td><td>Simplificação de cálculos</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Imagem mental</td></tr>
<tr><td>TL</td><td>Cátia: Deu-me $\frac{6}{12}$. . .<br>Depois meti $\frac{3}{6}$.</td><td>Procedimentos do algoritmo de multiplicação de frações</td></tr>
</table>

Ambos os alunos recorrem a *regras memorizadas*. Bruno “corta” o numerador da primeira fração com o denominador da segunda fração simplificando um cálculo que tem subjacente as propriedades comutativa e existência de elemento neutro da multiplicação, mas não evidencia o conhecimento destas propriedades.

Ambas as estratégias poderão ter sido influenciadas por *imagens mentais* dos procedimentos usados por estes alunos. No caso de Bruno a imagem mental poderá tê-lo levado a centrar-se na visualização do numerador e denominador igual, conduzindo-o assim até à “lei do corte”. A estratégia de Cátia poderá ter sido influenciada pela imagem mental dos procedimentos para multiplicação de frações (multiplica numeradores e denominadores).

### $\frac{1}{3}$ *de* $\frac{1}{3}$

O cálculo de $\frac{1}{3} de \frac{1}{3}$ envolve igualmente a multiplicação de duas frações e por isso a maioria das estratégias que surgiram foram semelhantes à usada por Cátia no cálculo da expressão anterior. Contudo, Maria (turma M) apresenta uma estratégia diferentes das dos colegas ao recorrer a *relações numéricas* e não à aplicação de regras memorizadas (Quadro 21).

Quadro 21. Estratégia para a resolução de $\frac{1}{3} de \frac{1}{3}$.

| | | **Tipo de estratégia** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Maria***: A mim deu $\frac{1}{9}$, só que eu pus em número 0,111111 . . . $\frac{1}{3}$ é igual a 0,33333. Mas depois 0,33333 a dividir por 3 é igual a 0,11111 porque isto é tipo a tabuada do 11, como 11 vezes 1, 11 vezes 2, 11 vezes 3. Aqui é ao contrário é a dividir por 3 que dá 11. | Relações numéricas | Mudança de representação/ Relação entre operações | Factos numéricos | Representação proposicional |

A explicação de Maria revela que esta recorreu a um conjunto de relações numéricas nomeadamente à *mudança de representação* e à *relação entre as operações* multiplicação e divisão. Começa por indicar a equivalência entre a fração e a dízima infinita correspondente, uma vez que associa não só $\frac{1}{9}$ a 0,(1) mas também $\frac{1}{3}$ a 0,(3) e posteriormente associa $\frac{1}{3} de \frac{1}{3}$ à divisão de $\frac{1}{3}$ por 3. A estratégia de Maria, poderá ter sido influenciada por uma *representação proposicional* baseada nas relações numéricas que estabelece: se $\frac{1}{3} = 0,(3)$ e $\frac{1}{3} de \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \div 3$ então $0,(3) \div 3 = 0,(1)$ . Maria recorre ainda a factos numéricos conhecidos (tabuada do 11) para realizar a divisão de 0,(3)… por 3.

Na turma L, António refere uma estratégia semelhante à de Maria, mas que não envolve a apresentação da dízima. O aluno apenas explica que:” Eu dividi $\frac{1}{3}$. Dividi 3 por $\frac{1}{3}$ e deu-me $\frac{1}{9}$". Perante o erro de linguagem em que António refere ter dividido 3 por $\frac{1}{3}$, quando provavelmente realizou o contrário a professora Laura explora a explicação do aluno acompanhada de um registo pictórico no quadro, para assim dar sentido à estratégia apresentada por este:

> ***Professora Laura***: Fechem todos os olhos. Pensem todos numa piza. Dividam a piza em 3 partes, tirem uma dessas partes. É a terça parte não é? Agora dividam essa terça parte em 3 partes. Tirem uma parte. Em relação à piza toda, que parte seria essa.
>
> ***Alunos***: $\frac{1}{9}$.

A intervenção de Laura mostra como por vezes houve necessidade de concretizar, através de registos no quadro, algumas das estratégias dos alunos da turma L para assim os ajudar a criarem imagem mentais de relações numéricas, como foi o caso de $\frac{1}{3}\, de\, \frac{1}{3}$ com $\frac{1}{3} \div 3$.

$$\mathbf{\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}}$$

As estratégias apresentadas por Ana (turma M) e Inês (turma L) foram as que surgiram com maior frequência para o caso da divisão de duas frações (Quadro 22). A explicação de Ana encaminha-nos para uma estratégia baseada na aplicação de *regras memorizadas*, mas a forma como responde à questão de João: "Não era $\frac{12}{24}$que dava?" mostra que a aluna conhece outro processo de dividir frações e que está consciente do porquê de "cortar logo os denominadores" na divisão de duas frações com denominadores iguais. À questão de João, Ana responde: "Não podemos, porque o 12 fica no denominador. Temos que fazer da esquerda para a direita. 4×6, 24. 2×6, 12" evidenciando ainda que percebe a equivalência entre a multiplicação cruzada e a multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor ($\frac{4}{6} \div \frac{2}{6} = \frac{4\times 6}{6\times 2} = \frac{4}{6} \times \frac{6}{2}$). Apesar da explicação de Ana apenas evidenciar a aplicação de um procedimento possível na divisão de duas frações com denominadores iguais (*regras memorizadas*), a interação com João revela que esta conhece algumas relações numéricas, nomeadamente a relação de equivalência entre vários processos para resolver a expressão apresentada. A estratégia de Inês evidencia também a aplicação de uma *regra memorizada* ("inverte e multiplica" - procedimento comum na divisão de duas frações) que foi frequentemente utilizado pelos alunos na divisão de duas frações.

Quadro 22. Estratégias para a resolução de $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="4">Tipo de estratégia</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aluno/Estratégia</th><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Outros elementos</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td>TM</td><td>Ana: Como os denominadores eram iguais, cortei logo os denominadores. Como 4÷2 dá 2, eu pus logo 2.</td><td rowspan="2">Regras memorizadas</td><td rowspan="2">Procedimentos do algoritmo de divisão de frações</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Imagem mental</td></tr>
<tr><td>TL</td><td>Inês: Inverti . . . o $\frac{2}{6}$. Eu substitui a divisão pela multiplicação . . . $\frac{4}{6} \times \frac{6}{2}$ que deu $\frac{24}{12}$ que passei para $\frac{12}{6}$ e que deu $\frac{6}{3}$.</td></tr>
</table>

As estratégias destas alunas poderão ter subjacente *imagens mentais* de procedimentos referentes ao algoritmo da divisão de frações. A visualização de denominadores iguais poderá ter influenciado a estratégia de Ana enquanto no caso de Inês poderá ter sido a visualização mental de procedimentos rotineiros – "inverte e multiplica".

### $\frac{6}{8} \div \frac{3}{4}$

Para o cálculo de $\frac{6}{8} \div \frac{3}{4}$ (tarefa extra), em ambas as turmas, as estratégias utilizadas por Ana (divisão de numeradores e denominadores) e Inês ("inverte e multiplica") para o cálculo de $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$ (tarefa 2) voltaram a surgir. Contudo, a estratégia de João (Quadro 23) evidencia o recurso a *relações numéricas* onde este reconhece de imediato que $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{4}$ são *frações equivalentes* o que faz com que o quociente seja igual a 1. Esta estratégia poderá ter sido originada por uma *representação proposicional* centrada na equivalência entre frações: se $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ e $a \div a = 1$ então $\frac{6}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \div \frac{3}{4} = 1$.

Quadro 23. Estratégia para a resolução de $\frac{6}{8} \div \frac{3}{4}$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Aluno/Estratégia | Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
| **TM** | ***João***: Eu vi logo que $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{4}$ eram frações equivalentes e numa divisão entre [frações equivalentes] é igual a 1. | Relações numéricas | Frações equivalentes | | Representação proposicional |

A explicação apresentada por João mostra que os alunos vão estando cada vez mais despertos para olhar para a representação simbólica dos números de forma compreensiva tentando assim perceber que quantidades estão envolvidas e que relação existe entre os números, não se limitando apenas a aplicar um conjunto de regras previamente memorizadas.

### $\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$

A resolução da expressão de valor em falta $\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$ originou por parte dos alunos estratégias envolvendo *relações numéricas* (Quadro 24), possivelmente baseadas em *representações proposicionais*. Ana *relaciona duas expressões* uma envolvendo a multiplicação e outra a divisão recorrendo a um *facto numérico* que conhece ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$), indicando de imediato o resultado $\frac{1}{2}$. Esta estratégia poderá ter sido influenciada por uma *representação proposicional* do tipo: se $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ então $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Liliana recorre a uma *propriedade da operação divisão* (divisor=dividendo ÷Qquociente) e de seguida aplica procedimentos semelhantes aos de Ana no cálculo de $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$ (divide numeradores e denominadores). Esta estratégia sugere igualmente o recurso a uma *representação proposicional* baseada na relação entre a expressão dada e a divisão de $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{2}$: se $\frac{1}{2} \div ? = \frac{1}{4}$ e $? = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$ então $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1 \div 1}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$.A *imagem mental* de procedimentos associados à divisão de frações com denominadores múltiplos um do outro poderá ter levado Liliana a dividir numeradores e denominadores. Em ambas as turmas foram vários os alunos que apresentaram uma estratégia semelhante à de Liliana.

Quadro 24. Estratégias para a resolução de $\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="4">Tipo de estratégia</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aluno/Estratégia</th><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Outros elementos</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td>TM</td><td>Ana: Como eu sei que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ dá $\frac{1}{4}$ pus logo $\frac{1}{2}$.</td><td rowspan="3">Relações numéricas</td><td>Relação entre expressões</td><td>Factos numéricos</td><td rowspan="2">Representação proposicional</td></tr>
<tr><td rowspan="2">TL</td><td>Gonçalo: Deu-me $\frac{1}{2}$. Eu fiz por porcentos . . . Vi $\frac{1}{4}$ é 25% e $\frac{1}{2}$ é 50.Então dividi . . . Eu fiz $\frac{1}{4}$ a dividir por $\frac{1}{2}$ que é 25:50.</td><td>Mudança de representação/ Propriedade da operação divisão</td><td></td></tr>
<tr><td>Liliana: 1÷1 é 1 e 4÷2 é 2. Por isso dá $\frac{1}{2}$.</td><td>Propriedade da operação divisão</td><td>Regras memorizadas</td><td>Representação proposicional/ Imagem mental</td></tr>
</table>

Gonçalo apresenta uma estratégia onde *muda a representação* fracionária para percentagem operando com percentagem como se fossem números naturais, mas adotando a mesma estratégia que Liliana, uma vez que também recorre à mesma *propriedade da divisão*. O aluno converte $\frac{1}{4}$ em 25% e $\frac{1}{2}$ em 50% e divide a percentagem menor pela maior. A sua estratégia parece ter sido igualmente originada por uma *representação proposicional*: se $\frac{1}{4}$ =25% e $\frac{1}{2}$ = 50% então $\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$ é equivalente a $25\% \div ? = 50\%$, logo $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$ é equivalente a $25\% \div 50\%$ .

As estratégias de Ana, Gonçalo e Liliana revelam o recurso a diversas relações numéricas, no entanto, o uso de factos numéricos e regras memorizadas parecem representar para Ana e Liliana um apoio importante ao estabelecimento dessas relações.

$\mathbf{\frac{3}{4} \div ? = \frac{1}{4}}$

De um modo geral, a resolução de $\frac{3}{4} \div ? = \frac{1}{4}$ envolveu estratégias semelhantes às discutidas na expressão anterior. No entanto, António (turma L) apresenta uma estratégia diferente onde ignora os denominadores das frações envolvidas, por estes serem iguais, e opera apenas com os numeradores como se fossem números naturais (Quadro 25). António recorre a um *modelo mental* de um contexto de dinheiro e parece procurar no seu reportório de *factos numéricos* um quociente 1 numa divisão de dividendo 3, uma vez que refere: "3€ a dividir por 3 pessoas dá igual a 1€ a cada pessoa" e não $3 \div 1 = 3$, o que implicaria o recurso a uma propriedade da operação divisão. No final estabelece a *relação entre diversas expressões*, ou seja, entre a divisão cujo valor em falta encontrou *e a multiplicação* expressa através de *adições sucessivas*. Esta estratégia poderá ter subjacente uma *representação proposicional* centrada nas relações realizadas por António: se $\frac{3}{4} \div ? = \frac{1}{4}$ e $3 \div 3 = 1$ então ? $= \frac{1}{4}$ porque $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Quadro 25. Estratégia para a resolução de $\mathbf{\frac{3}{4} \div ? = \frac{1}{4}}$.

| | | **Tipo de estratégia** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Aluno/Estratégia** | | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TL** | ***António***: Deu-me 3 pessoas. Eu pensei 3€. Eu esqueci o 4. 3€ a dividir por 3 pessoas dá igual a 1€ a cada pessoa . . . $\frac{3}{4}$ a dividir por 3. pessoas dá $\frac{1}{4}$ . . . Pensei assim $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$. | Relações numéricas | Relação entre expressões | Factos numéricos | Modelo mental/ Representação proposicional |

António opera apenas com numeradores, situação facilitada pelo facto dos denominadores serem iguais, e pensa na divisão de dois números naturais para depois fazer uma extensão deste conhecimento para o conjunto dos números racionais. Evidência disto é o facto de considerar o quociente 1 como numerador da fração $\frac{1}{4}$ que adicionada 3 vezes para obter o dividendo da expressão inicial.

### 7.1.2. Questões com numerais decimais

Os alunos das turmas M e L resolveram questões de cálculo mental envolvendo apenas a representação decimal nas tarefas 4 e 5 e em conjunto com as representações fracionária e percentagem nas tarefas 3, extra, 6, 9 e 10. Nesta seção analiso as questões envolvendo apenas numerais decimais. No total, os alunos resolveram 22 expressões e 6 situações contextualizadas envolvendo apenas esta representação. Destas, analiso as estratégias dos alunos em 9 expressões e 2 situação contextualizada (Quadro 26).

Quadro 26. Questões de cálculo mental com a representação decimal.

| | Questões | | | Tarefa |
|---|---|---|---|---|
| Expressões | $0,5 + 0,25$ | | $1,9 - 0,50$ | 4 |
| | $0,25 \times 4$<br>$4,2 \times 0,2$ | $? \times 0,4 = 0,16$<br>$? \times 0,5 = 30$ | $12,2 \div 0,5$<br>$0,82 \div ? = 1,64$ | 5 ou 6 |
| | $2,8 - ? = 0,9$ | | | Extra |
| Situações contextualizadas | A área da base de um cilindro é $4,2\ m^2$ e o seu volume $12,6\ m^3$. Calcula a altura. | | | 6 |
| | Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de 30,2° e a temperatura mínima de 15,9°. Qual a amplitude térmica? | | | 10 |

O quadro 27 apresenta o número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L a questões envolvendo apenas numerais decimais. A análise deste quadro mostra que os alunos registaram um menor número de respostas corretas em questões envolvendo a multiplicação e divisão de dois numerais decimais e em questões envolvendo situações contextualizadas. A adição e subtração de numerais decimais parece não apresentar dificuldades para os alunos.

Quadro 27. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com numerais decimais.

| | Número de respostas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Corretas | | Incorretas | | Não responde | |
| **Questões** | TM | TL | TM | TL | TM | TL |
| $0,5 + 0,25$ | 20 | 13 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| $1,25 - ? = 0,75$ | 18 | 10 | 1 | 6 | 1 | 2 |
| $1,9 - 0,50$ | 19 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| $0,25 \times 4$ | 19 | 10 | 1 | 5 | 0 | 4 |
| $? \times 0,4 = 0,16$ | 15 | 8 | 3 | 7 | 1 | 4 |
| $12,2 \div 0,5$ | 7 | 3 | 8 | 4 | 4 | 12 |
| $4,2 \times 0,2$ | 1 | 2 | 14 | 11 | 4 | 6 |
| $? \times 0,5 = 30$ | 6 | 1 | 11 | 12 | 2 | 5 |
| $0,82 \div ? = 1,64$ | 10 | 2 | 5 | 4 | 4 | 12 |
| A área da base de um cilindro é $4,2\ m^2$ e o seu volume $12,6\ m^3$. Calcula a altura. | 7 | 0 | 13 | 7 | 0 | 11 |
| Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de $30,2°$ e a temperatura mínima de $15,9°$. Qual a amplitude térmica? | 7 | 3 | 8 | 9 | 5 | 7 |

**$0,5 + 0,25$**

As estratégias mais comuns para a adição de dois numerais decimais e que na turma L se mantiveram até final da experiência nas explicações de alguns alunos, referem-se às apresentadas por Bernardo e Rui (turma L) (Quadro 28). No entanto, ao longo do tempo alguns alunos em ambas as turmas passaram a apresentar estratégias semelhantes às de João (turma M). Mais uma vez, o recurso a contextos de dinheiro esteve muito presente nas estratégias dos alunos da turma L.

João, na sua estratégia, recorre a *relações numéricas*, nomeadamente à *mudança da representação* decimal para fracionária. Resolve a expressão usando frações equivalentes, sem explicitar o seu cálculo ou recorrer a regras memorizadas, o que pode ser um indício positivo de que a discussão em torno das operações com frações deu os seus frutos ajudando o aluno a perceber que, ao operar com frações de referência, não necessita de aplicar regras e procedimentos, apenas de perceber a grandeza dos números. Posteriormente indica o resultado na forma decimal. A estratégia de João poderá ter na sua origem uma *representação proposicional* centrada na mudança de representação: se $0{,}5 = \frac{1}{2}$ e $0{,}25 = \frac{1}{4}$ então $0{,}5 + 0{,}25 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Estratégias deste tipo surgiram diversas vezes na turma M nas operações com numerais decimais, principalmente por parte de Elsa que preferia, quase sempre, transformar os numerais decimais em frações decimais.

Quadro 28. Estratégias para a resolução de $0{,}5 + 0{,}25$.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="4">Tipo de estratégia</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aluno/Estratégia</th><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Outros elementos</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td>TM</td><td>João: Cinco décimas é $\frac{1}{2}$ e 25 centésimas é $\frac{1}{4}$. Se é $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ vai dar $\frac{1}{4}$ . . . Não, vai ...da r$\frac{3}{4}$. . . eu depois transformei em 75 centésimas.</td><td>Relações numéricas</td><td>Mudança de representação</td><td></td><td>Representação proposicional</td></tr>
<tr><td rowspan="2">TL</td><td>Bernardo: Se estivéssemos em dinheiro, 0,5 era equivalente a 50 cêntimos. Se somássemos 50 cêntimos com 25 cêntimos ia dar 75 cêntimos.</td><td rowspan="2">Regras memorizadas</td><td rowspan="2">Procedimentos do algoritmo de adição de numerais decimais</td><td rowspan="2"></td><td>Modelo mental</td></tr>
<tr><td>Rui: Está ali 5 décimas e ali está 25 centésimas. Fiz unidades com unidades. Zero com 5, 5. 5 com 2. Não transformei o 5 em 50 centésimas . . . zero com 5, 5. 5 com o 2, 7. Zero com zero, zero.</td><td>Imagem mental</td></tr>
</table>

Bernardo e Rui apresentam estratégias centradas na aplicação de *regras memorizadas* sendo a de Rui mais explícita quanto aos procedimentos algorítmicos usados. No entanto, as representações mentais subjacentes a estas estratégias parecem ser diferentes. A explicação de Bernardo sugere que este recorreu a um *modelo mental* de um contexto de dinheiro para realizar o cálculo pretendido e a de Rui sugere que recorreu a uma *imagem mental* de um algoritmo escrito dado o pormenor com que explica a forma como realizou o cálculo ("Fiz unidades com unidades. Zero com 5, 5. 5 com 2 . . . 7. Zero com zero, zero").

A adição de numerais decimais não apresentou grandes dificuldades para os alunos, possivelmente pela semelhança que têm com a adição de números naturais e por serem largamente trabalhadas no 1.º ciclo. Este conhecimento acumulado dos alunos poderá originar estratégias como as de Bernardo e Rui. No entanto, o desenvolvimento desta experiência de ensino pode ter influenciado estratégias como as de João, pelo facto de este ter recorrido à mudança de representação para adicionar numerais decimais.

### $\mathbf{1{,}9 - 0{,}50}$

As estratégias de Pedro e Rui (Quadro 29) são semelhantes, mas ilustram como o cálculo mental é pessoal e realizado com os conhecimentos que cada um possui. Ambos os alunos recorrem a *relações numéricas* e *relacionam expressões* usando a propriedade de que o valor de uma diferença não se altera ao subtrair/adicionar uma mesma quantidade ao aditivo e ao subtrativo. Pedro opta por adicionar uma décima ao aditivo (considerando 10 décimas em vez de 9) e uma décima ao subtrativo (considerando 6 décimas e não 5) e parece realizar cálculos apenas com a parte decimal do numeral (10-6). No final junta a parte inteira à diferença que obtém entre as partes decimais A sua estratégia poderá ter sido baseada numa *representação proposicional* centrada nesta relação: se $1{,}9 - 0{,}5 = (1{,}9 + 0{,}1) - (0{,}5 + 0{,}1)$ e $10 - 6 = 4$ então $1{,}9 - 0{,}5 = 1 + 0{,}4$.

Rui prefere subtrair uma décima ao aditivo (considerando 1,80 e não 1,90) e ao subtrativo (considerando 0,40 e não 0,5) certamente porque assim iria ficar com duas partes decimais múltiplas uma da outra o que lhe iria facilitar o cálculo. O aluno volta a recorrer a um contexto de dinheiro o que sugere o uso de um *modelo mental*, mas a sua estratégia também parece basear-se numa *representação proposicional* à semelhança de Pedro: se $1{,}9 - 0{,}5 = (1{,}9 - 0{,}1) - (0{,}5 - 0{,}1)$ então $1{,}8 - 0{,}40 = 1{,}40$.

Na mesma tarefa, Rui usa duas estratégias distintas. No cálculo da expressão anterior $0{,}5 + 0{,}25$ (tarefa 4, parte 1) usa regras memorizadas enquanto no cálculo de $1{,}9 - 0{,}50$ (tarefa 4, parte 2) recorre a relações numéricas. Esta mudança na estratégia pode ter sido influenciada pela discussão coletiva desencadeada na primeira parte da tarefa. A discussão poderá ter relembrado o aluno de algumas das estratégias que previamente já conhecia ou ter-lhe mostrado outras alternativas para o cálculo mental de numerais decimais na representação decimal.

Quadro 29. Estratégias para a resolução de $1{,}9 - 0{,}50$.

| | Aluno/Estratégia | Tipo de estratégia: Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
|---|---|---|---|---|---|
| **TM** | ***Pedro***: Fiz 10. Eu fiz 10 menos 6 porque eu não estou habituado a fazer contas com 9. . . Transformei o 9 em 10 e o 5 no 6. | Relações numéricas | Relação entre expressões | | Representação proposicional |
| **TL** | ***Rui***: 1 euro e 90 tirei . . . 10 cêntimos e no 50 menos 10 cêntimos. Então 1 euro e 80 menos 40. 1 euro e 40. | | | | Modelo mental/ Representação proposicional |

**Situação da amplitude térmica**

Na última tarefa da experiência de ensino os alunos resolveram uma situação contextualizada que envolvia o conceito de amplitude térmica e a subtração entre dois numerais decimais. Em ambas as turmas, os alunos identificaram como operação a subtração dizendo que, de 30,2 retirariam 15,9 embora não explicitando a forma como realizaram o cálculo.

Os números envolvidos apelavam ao uso de estratégias de compensação tal como anteriormente outras expressões o fizeram (por exemplo, $1{,}9 - 0{,}50$) e como fez Pedro (turma M) (Quadro 30). Pedro recorre a *relações numéricas*, mais concretamente a uma estratégia de *compensação*. Arredonda 30,2 para 30 e 15,9 para 16 e subtrai 16 de 30 colocando posteriormente as décimas que retirou. Esta estratégia parece ter subjacente uma *representação proposicional*: se $30{,}2 \cong 30$ e $15{,}9 \cong 16$ então $30{,}2 - 15{,}9 \cong 30 - 16$ logo $30 - 6 = 14$ e $30{,}2 - 15{,}9 = 14{,}3$. A estratégia de compensação surgiu em ambas as turmas principalmente na subtração de numerais decimais, embora de forma pouco frequente.

Quadro 30. Estratégia para a resolução da situação da amplitude térmica.

| | Aluno/Estratégia | Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Tipo de estratégia | | | |
| **TM** | ***Pedro***: Imaginei que os 30,2 era só 30 que 15,9 era 16. Então tive que tirar o 2.Tiro um 2 aos outros dois e depois a diferença de um para o outro. E depois acrescentando 1 é 14,3. | Relações numéricas | Compensação | | Representação proposicional |

$\mathbf{1,25-?=\ 0,75}$

No cálculo de $1{,}25 - ? = 0{,}75$, José (turma M) e Rui (turma L) recorrem a *relações numéricas* (Quadro 31). José opta por *subtrações sucessivas*, enquanto Rui opta pela *mudança de representação* (decimal para fracionária). A estratégia de José parece ter subjacente uma *representação proposicional* que espelha a forma como vai subtraindo sucessivamente 0,25 ao aditivo: se 1,25-?=0,75 com 1,25-0,25=1 e 1-0,25=0,75 então ?=0,25+0,25=0,50.

Quadro 31. Estratégias para a resolução de $1{,}25 - ? = 0{,}75$.

| | Aluno/Estratégia | Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Tipo de estratégia | | | |
| **TM** | ***José***: Tirei o 25 décimas...centésimas a uma unidade que me deu a unidade. Uma unidade e depois foi só tirar os 25 para dar 75 centésimas. . . [Deu] 50 centésimas. | Relações numéricas | Subtrações sucessivas | | Representação proposicional |
| **TL** | ***Rui***: Fiz $\frac{5}{4}$ para chegar a $\frac{3}{4}$ pus $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$. | | Mudança de representação | | |

Rui muda a representação decimal para fracionária e opera com frações pensando no número que deveria de retirar a $\frac{5}{4}$ para obter $\frac{3}{4}$ e apresenta como resultados possíveis $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$. Esta estratégia mostra alguma destreza em mudar de representação e em operar com frações de referência como $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ talvez porque a expressão dada, embora envolvendo a representação decimal, se relacionava com outras já discutidas na representação fracionária. Mais uma vez, mostra ter-se apropriado de estratégias como a mudança de representação, não recorrendo à aplicação de regras memorizadas como fez no cálculo de $0{,}5 + 0{,}25$.

### $\mathbf{0{,}25 \times 4}$

Para o cálculo de $0{,}25 \times 4$ uma grande parte dos alunos apresentou uma estratégia semelhante à de Marta (turma M) e outros, em menor número, uma estratégia como a de Francisco (turma L) (Quadro 32).

Quadro 32. Estratégias para a resolução de $0{,}25 \times 4$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Marta***: Transformei as 25 centésimas em $\frac{1}{4}$ e depois fiz vezes 4 . . . Deu-me $\frac{4}{4}$ e depois transformei em 1. | Relações numéricas | Mudança de representação | | Representação proposicional |
| **TL** | ***Francisco***: Peguei no 25 cêntimos, fui juntando 25 mais outros 25, dá 50 cêntimos. Depois juntei os 50 cêntimos mais 25 e mais 25. | | Relação entre multiplicação e adição | | Modelo mental |

Marta recorre a *relações numéricas*, mais concretamente à *mudança da representação* decimal para fracionária e assim multiplica $\frac{1}{4}$ por 4. Esta estratégia poderá ter sido baseada numa *representação proposicional* onde a mudança de representação representa um aspeto importante na estratégia da aluna: se $0{,}25 = \frac{1}{4}$ então $0{,}25 \times 4 = \frac{1}{4} \times 4 = \frac{4}{4} = 1$. Francisco também faz uso de *relações numéricas* mas opta por *relacionar a multiplicação* de $0{,}25 \times 4$ *com a adição sucessiva* de 0,25. Para isso recorre a um *modelo mental* envolvendo um contexto de dinheiro.

O trabalho prévio com a representação fracionária nas tarefas 1, 2 e na tarefa 3 em conjunto com a decimal parece ter apoiado a compreensão dos alunos no que se refere à possibilidade de mudarem de representação do número racional sempre que isso lhes facilite o cálculo mental. A estratégia de Marta, onde esta converte 0,25 em $\frac{1}{4}$ surgiu com frequência em ambas as turmas, principalmente quando números de referência como 0,25 ou 0,5 estavam envolvidos em multiplicações e divisões. Por exemplo, na resolução da situação contextualizada envolvendo o cálculo do volume do paralelepípedo, Rui (turma L), para resolver $12{,}4 \times 0{,}25$ converte igualmente 0,25 em $\frac{1}{4}$ e facilmente divide 12,4 por 4.

$? \times \mathbf{0{,}4 = 0{,}16}$

Esta expressão relaciona-se com uma situação contextualizada que envolve o cálculo da medida do lado da face de um cubo, sendo dada a área da face. A relação entre estes dois contextos (matemático e não matemático) é salientada por Tiago (turma L) que se apoia na sua estratégia e discussão anterior da situação contextualizada (tarefa 6 parte 1) que referi para resolver $? \times 0{,}4 = 0{,}16$ (tarefa 6 parte 2). Isto realça a importância de apresentar aos alunos questões de cálculo mental em contextos diferentes mas cujas operações se relacionam, de forma a ajudá-los a transitarem entre contextos, podendo os alunos recorrer ao mesmo tipo de raciocínio.

No que se refere ao cálculo de $? \times 0{,}4 = 0{,}16$, a maioria dos alunos recorre à mesma estratégia que Tiago (turma L) embora estratégias como a apresentada por João (turma L) também tenham surgido (Quadro 33).

João apresenta uma estratégia baseada em *relações numéricas*, nomeadamente, na *relação entre operações inversas* apoiando-se em regras memorizadas ("tinha de… subtrair as casas decimais"). Opera com numerais decimais como se fossem números naturais (*mudança de representação*), tal como Tiago, e divide o produto pelo fator conhecido para encontrar o fator desconhecido. Esta estratégia foi também usada pelos alunos na representação fracionária. A estratégia de João parece ter origem numa *representação proposicional* também baseada na relação entre operações inversas: se $a \times b = c$ então $a = c \div b$.

Quadro 33. Estratégias para a resolução de $? \times 0,4 = 0,16$.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Aluno/Estratégia</th><th colspan="4">Tipo de estratégia</th></tr>
<tr><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Outros elementos</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td>TM</td><td>João: 16 a dividir por 4 ia dar, ia dar 4. Então tinha de... Subtrair as casas decimais e deu-me 0,4.</td><td rowspan="2">Relações numéricas</td><td>Relação entre operações inversas/ Mudança de representação</td><td>Regras memorizadas</td><td rowspan="2">Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>TL</td><td>Tiago: Eu fiz aquilo que nós aplicámos, neste aqui (refere-se à situação contextualizada da face do cubo com 0,36m² de área). . . Fiz 0,4×0,4. 4×4, 16 depois acrescenta-se, duas casas.</td><td>Mudança de representação</td><td>Factos numéricos</td></tr>
</table>

Na resolução da situação contextualizada que referi anteriormente Tiago explicou que: “[Deu] 0,6 eu multipliquei lado vezes lado [0,6×0,6] supondo que deu 0,36”. Para o cálculo de $? \times 0,4 = 0,16$, à semelhança de João, operou com numerais decimais como se estes fossem números naturais (*mudança de representação*) e tenta encontrar um produto, no seu reportório de *factos numéricos*, cujo valor seja 16, sendo que um dos fatores é 4. No final parece relacionar $4 \times 4$ com $0,4 \times 0,4$ e assim coloca duas casas decimais no produto 16. Esta estratégia poderá ter sido originada por uma *representação proposicional* onde Tiago compara a resolução da situação contextualizada com a expressão de valor em falta que tem de resolver: se $0,6 \times 0,6 = 0,36$ com $6 \times 6 = 36$ então para $? \times 0,4 = 0,16$, $4 \times 4 = 16$ com $0,4 \times 0,4 = 0,16$.

**$12,2 \div 0,5$**

O Quadro 34 mostra as estratégias de Maria (turma M) e Inês (turma L) para o cálculo de $12,2 \div 0,5$. À semelhança do que fez Marta no cálculo de $0,25 \times 4$, também

Maria recorre a *relações numéricas* e à *mudança de representação* considerando 0,5 como sendo equivalente a $\frac{1}{2}$. Na sua explicação é possível perceber que a aluna recorre igualmente a *regras memorizadas*, nomeadamente ao algoritmo da divisão "inverte e multiplica" ao referir que:" Eu inverti 0,5 que deu 2". Curiosamente Maria não diz explicitamente que primeiro converteu 0,5 em $\frac{1}{2}$ e depois considerou o inverso deste, mas que inverteu 0,5, o que pode revelar alguma capacidade de abstração para relacionar representações dos números e suas operações ou apenas um "abuso de linguagem". Esta estratégia poderá ter sido influenciada por uma *representação proposicional* centrada na mudança de representação e na aplicação da regra "invente e multiplica": se $0{,}5 = \frac{1}{2}$ então $12{,}2 \div 0{,}5 = 12{,}2 \div \frac{1}{2} = 12{,}2 \times 2$.

Quadro 34. Estratégia para a resolução de $12{,}2 \div 0{,}5$.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="4">Tipo de estratégia</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aluno/Estratégia</th><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Outros elementos</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td>TM</td><td>Maria: A mim deu-me 24,4 . . . Eu inverti o 0,5 que deu 2. E depois fiz 12,2 vezes 2.</td><td rowspan="2">Relações numéricas</td><td>Mudança de representação</td><td>Regras memorizadas</td><td rowspan="2">Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>TL</td><td>Inês: Dividir 5 décimas . . . Por qualquer coisa que é igual a 2 vezes qualquer coisa. Então 24 unidades e 4 décimas.</td><td>Relação entre dividir por 0,5 e multiplicar por 2</td><td></td></tr>
</table>

A estratégia apresentada por Inês explicita uma *relação numérica*, a de que a *divisão por 0,5 corresponde à multiplicação por 2* onde a aluna possivelmente se baseou numa *representação proposicional*: se dividir por 0,5 corresponde a multiplicar por 2 então $12{,}2 \div 0{,}5 = 12{,}2 \times 2 = 24{,}4$. Esta relação numérica refere-se à mesma propriedade usada por Maria embora Inês não verbalize a relação entre 0,5 e $\frac{1}{2}$. Inês poderá ainda ter memorizado a relação numérica e nesse caso a sua utilização resume-se à aplicação de um procedimento.

**$4,2 \times 0,2$**

A estratégia de Eva (Quadro 35) é uma das mais usadas pelos alunos nas operações com numerais decimais. Com frequência e sempre que os números assim o permitem, os alunos mudam a representação decimal para fracionária como o fizeram Marta e Maria no cálculo das expressões analisadas anteriormente. A mudança da representação decimal para número natural referente a $\frac{10}{100}$ foi também muito frequente, tendo por vezes originado erros relacionados com o valor posicional dos algarismos como é apresentado no Capítulo 8. Assim, Eva *muda de representação* e opera com numerais decimais como se estes fossem números naturais recorrendo a *factos numéricos* (tabuada do 2). No final, coloca duas casas decimais no produto, possivelmente recorrendo a regras memorizadas (duas casas decimais nos fatores corresponde a duas casas decimais no produto) embora isto não esteja explícito na sua explicação. Esta estratégia parece sugerir o recurso de Eva a uma *representação proposicional:* se $4,2 \times 0,2$ pode ser calculado através de $42 \times 2$ então $4,2 \times 0,2 = 42 \times 2 \times 0,01$.

Quadro 35. Estratégia para a resolução de $4,2 \times 0,2$.

| | | **Tipo de estratégia** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Eva***: Pus 84 centésimas . . . Eu multipliquei dois números inteiros . . . Multipliquei 42 vezes 2 . . . Depois pus duas casas decimais. | Relações numéricas | Mudança de representação | Factos numéricos/ Regras memorizadas | Representação proposicional |

Na turma L, o uso de regras memorizadas que evidenciam a aplicação de procedimentos de algoritmo escritos continua a surgir na multiplicação de dois numerais decimais tal como explicita Aida: “Eu fiz a conta em pé e deu 84 centésimas.” Esta estratégia foi muito rara na turma M.

$? \times \mathbf{0,5} = \mathbf{30}$

Em ambas as turmas os alunos reconheceram que, neste caso, a multiplicação por 0,5 correspondia a calcular metade do valor em falta, não tendo nenhum aluno verbalizado como possível o produto de 30 por 2, embora certamente tenham pensado nele. A atenção dos alunos centrou-se essencialmente na relação de metade entre o fator em falta e o produto, como fez Pedro (Quadro 36) cuja estratégia mostra que percebe a *relação entre multiplicar uma quantidade por 0,5 e dividi-la por 2*. A estratégia de Pedro poderá ter sido originada por uma *representação proposicional* com especial ênfase na relação de metade entre o fator em falta e o produto, apoiada por *factos numéricos* conhecidos: se $? \times 0{,}5 = ? \div 2$ então para $? \div 2 = 30$, ? = 60.

Quadro 36. Estratégia para a resolução de $? \times 0{,}5 = 30$.

| | Aluno/Estratégia | Tipo de estratégia: Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
|---|---|---|---|---|---|
| **TM** | ***Pedro***: É 60 porque é a dividir por 2. 60 a dividir por 2 dá 30. | Relações numéricas | Relação entre multiplicar por 0,5 e dividir por 2 | Factos numéricos | Representação proposicional |

O cálculo de metade e dobro são factos numéricos a que os alunos parecem recorrer facilmente dada a rapidez com que os usam no cálculo e sem grandes explicações. Muitas vezes os alunos centram-se no cálculo de metade/dobro de, por exemplo, 6 para depois fazer uma extensão deste conhecimento para 60.

$\mathbf{0,82} \div ? = \mathbf{1,64}$

No cálculo de $0{,}82 \div ? = 1{,}64$ Ivo compara números naturais em vez de numerais decimais, tendo por isso *mudado de representação* (Quadro 37). Percebe de imediato que “164 era o dobro de 82” o que pode revelar o recurso a *factos numéricos* conhecidos (reportório de dobros/metades). Como a operação indicada na expressão é a divisão, Ivo conclui que “só podia ser 0,5” certamente porque tem em mente a relação entre *dividir por 0,5 e multiplicar por 2*. Esta estratégia sugere que o aluno usa uma *representação proposicional* baseada nas relações que estabelece: se $a \div ? = b$ e $\frac{b}{a} = 2$ então ?=0,5 porque dividir por 0,5 é equivalente multiplicar por 2. De salientar o facto de Ivo ter percebido que apesar da relação ser de dobro (entre quociente e dividendo) o valor a colocar no divisor teria de ser o inverso de 2, ou seja, $\frac{1}{2}$ que equivale a 0,5. De notar que muitos foram os alunos que não percebendo esta relação, indicaram 2 como divisor, como será analisado no Capítulo 8. Esta estratégia mostra compreensão das relações entre números, mas também das relações entre operações.

Quadro 37. Estratégia para a resolução de $0{,}82 \div ? = 1{,}64$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Ivo***: A mim deu-me... 5 décimas. Eu vi logo... Que 164 era o dobro de 82. Por isso, como era a dividir só podia ser 0,5. | Relações numéricas | Relação entre números e operações/ Mudança de representação | Factos numéricos | Representação proposicional |

Tiago, na turma L segue uma estratégia semelhante à de Ivo. Tiago refere explicitamente que colocou $\frac{1}{2}$, certamente influenciado pela regra "inverte e multiplica" como sugere a sua explicação: "É um e meio [antes $\frac{1}{2}$]. Porque eu fiz o inverso e multipliquei por 2", revelando igualmente um raciocínio que envolve a operação inversa em relação com o inverso de um número. Estas expressões representam oportunidades para discutir relações entre números e operações que dão sentido a regras (como a de "inverte e multiplica"), que muitas vezes os alunos apenas memorizam e aplicam sem qualquer tipo de compreensão concetual.

Na multiplicação e divisão de frações, as estratégias dos alunos centraram-se essencialmente na relação entre as operações enquanto com numerais decimais se centraram mais na relação entre números, tal como fez Ivo (Quadro 37). Isto poderá ter acontecido porque nos numerais decimais os alunos possivelmente apoiam-se em conhecimentos acerca das operações com números naturais, como já referi anteriormente, o que facilita a compreensão da grandeza dos números envolvidos. Na representação fracionária poderá haver alguma dificuldade, por parte dos alunos, em perceber as grandezas envolvidas por incompreensão do próprio conceito de fração e relação entre numerador e denominador. O recurso à mudança de representação enfatizado ao longo da experiência de ensino poderá ter apoiado os alunos nesta compreensão tendo em conta a facilidade com que foram integrando o seu uso nas suas estratégias.

**Situação do cálculo da área da base de um cilindro**

A situação contextualizada onde os alunos tinham de calcular a área da base de um cilindro envolvia a resolução da expressão de valor em falta $4{,}2 \times ? = 12{,}6$. As estratégias de Pedro e Maria (Quadro 38) ilustram as resoluções que surgiram em ambas as turmas.

Quadro 38. Estratégias para a resolução da situação do cálculo da área da base de um cilindro.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Pedro***: 3 m. Porque fiz 12,6 a dividir por 4,2. | Relações numéricas | Relação entre operações inversas | | Representação proposicional |
| **TM** | ***Maria***: Eu não fiz a dividir. Eu fiz a multiplicar. Eu achei um número, 4,2 vezes um número, que desse 12,6. E encontrei o 3. | Factos numéricos | Tabuada | | Imagem mental |

Pedro *relaciona operações inversas* (multiplicação e divisão) ao dividir o produto pelo fator conhecido, mas não explica como realizou o cálculo. A sua estratégia poderá ter-se baseado numa *representação proposicional* sobre a qual apenas é possível fazer inferências acerca da relação entre operações e não acerca da possível relação entre números ou acerca da forma como realizou a divisão: se $4{,}2 \times ? = 12{,}6$ então $? = 12{,}6 \div 4{,}2$. Dada a complexidade do cálculo, se realizado através do algoritmo, é provável que o aluno tenha percebido a relação de triplo entre os números, embora não a tenha verbalizado.

A explicação de Maria sugere que esta recorreu a *factos numéricos* (tabuada) para encontrar um número que multiplicado por 4,2 desse 3. Esta estratégia poderá ter-se baseado na *imagem mental* de factos que a aluna conhece, nomeadamente nos produtos $3 \times 2 = 6$ e $3 \times 4 = 12$, podendo tê-la levado a operar com cada uma das partes do numeral decimal, embora isto não esteja explicito na sua explicação.

### 7.1.3. Estratégias em questões com percentagens

Em ambas os ciclos de experimentação os alunos das turmas M e L começaram a resolver questões de cálculo mental envolvendo a representação percentagem a partir da tarefa 7. No total, resolveram 15 expressões e uma situação contextualizada envolvendo apenas esta representação. Destas, serão analisadas 8 expressões (Quadro 39).

Quadro 39. Questões de cálculo mental analisadas com a representação percentagem.

| | Questões | Tarefa |
|---|---|---|
| Expressões | $90\%\ de\ 30$<br>$50\%\ de\ ? = 60$<br>$25\%\ de\ 20$<br>$5\ \%\ de\ ? = 3$ | 7 |
| | $20\%\ de\ 50$<br>$\_\_\%\ de 30 = 0{,}3$ | 8 |
| | $20\%\ de\ ? =\ 8$<br>$75\%\ de\ 20$ | 9 e 10 |

As expressões com percentagens envolveram diferentes níveis de exigência cognitiva, contemplando questões com e sem valor em falta (como nas representações fracionária e decimal), mas dentro das expressões de valor em falta foram apresentados dois tipos de questões diferentes. Assim, os alunos resolveram expressões em que foi dada a percentagem e o valor sobre o qual se aplica essa percentagem (e.g., $90\%\ de\ 30$) – expressão sem valor em falta; expressão em que foi dado o valor resultante da aplicação da percentagem e a percentagem a aplicar (e.g., $25\%\ de\ ? = 20$) – expressão de valor em falta; e expressões onde foi dado o valor sobre o qual se aplicou a percentagem e valor resultante, sendo pedida a percentagem (e.g., $\_\%\ de 20 = 18$) – expressão de valor em falta.

No Quadro 40 apresento o número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos que participaram neste estudo.

Quadro 40. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com percentagem.

| | **Número de respostas** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Corretas | | Incorretas | | Não responde | |
| **Questões** | TM | TL | TM | TL | TM | TL |
| $90\%\ de\ 30$ | 0 | 2 | 14 | 3 | 6 | 13 |
| $50\%\ de\ ? = 60$ | 14 | 9 | 5 | 5 | 1 | 4 |
| $25\%\ de\ 20$ | 13 | 8 | 5 | 2 | 2 | 8 |
| $5\ \%\ de\ ? = 3$ | 4 | 0 | 10 | 6 | 6 | 12 |
| $20\%\ de\ 50$ | 12 | 6 | 7 | 6 | 1 | 7 |
| $\_\%\ de 30 = 0{,}3$ | 2 | 0 | 16 | 6 | 2 | 13 |
| $20\%\ de\ ? = 8$ | 11 | 0 | 0 | 10 | 9 | 9 |
| $75\%\ de\ 20$ | 8 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |

A análise deste quadro mostra que questões que envolveram a aplicação de percentagens superiores a 50% (por exemplo, 90% e 75%) ou próximas de 1% (por exemplo, 5% e 1%) registaram o menor número de respostas corretas ou em branco.

Expressões de valor em falta em que foi dado o valor resultante da aplicação da percentagem e a percentagem a aplicar e expressões em que foi dado o valor sobre o qual se aplicou a percentagem e o valor resultante, sendo pedida a percentagem, revelaram ser mais complexas para os alunos, tendo ambas as turmas apresentado um número de respostas corretas reduzido quando comparado com questões sem valor em falta. No entanto, isto não impediu que tivessem surgido estratégias interessantes em ambas as turmas.

**$90\%\ de\ 30$**

O cálculo de $90\%\ de\ 30$ não originou qualquer resposta correta na turma M e apenas 2 resposta corretas na turma L. Contudo, no momento de discussão coletiva, apresentaram estratégias interessantes, na turma M, Pedro e Dina, e na turma L, António, um dos alunos que respondeu corretamente à questão usando uma estratégia, em parte, semelhante à de Dina (Quadro 41).

Quadro 41. Estratégia para a resolução de $90\%\ de\ 30$.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="4">Tipo de estratégia</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aluno/Estratégia</th><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Outros elementos</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td rowspan="2">TM</td><td>Pedro: É 27. É 3 vezes 9.</td><td>Factos numéricos</td><td>Tabuada</td><td></td><td>Imagem mental</td></tr>
<tr><td>Dina: 100% de 30 é 30.<br>10% de 30 é 3. Depois dos 100% para os 10% dá 27.</td><td rowspan="2">Relações numéricas</td><td>Relação parte-todo</td><td rowspan="2">Números de referência<br><br>Factos numéricos</td><td rowspan="2">Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>TL</td><td>António: Eu pensei assim, 30 a dividir por 10 é 3. Depois 3+3+3+3 … até chegar ao 9 [vezes] dá 27.</td><td>Relação entre expressões</td></tr>
</table>

Pedro não explica por que razão apenas considera o produto de 3 por 9 como forma de calcular a percentagem solicitada, mas a sua estratégia revela que recorreu a *factos numéricos* (tabuada do 9) possivelmente tendo em mente a *imagem mental* do produto de 3 por 9. Sendo uma percentagem uma razão de denominador 100, o produto de 90 por 30 terá de ser dividido por 100 o que corresponde à expressão simplificada apresentada por Pedro, ou seja $\frac{90\times30}{100} = 9 \times 3$. Pedro apresentou uma das estratégias mais simples para o cálculo de percentagens, apenas possível quando os valores envolvidos são múltiplos de 10, o que foi posteriormente discutido nas duas turmas aquando do cálculo de 20% de 50.

Dina apresenta uma estratégia mais detalhada que Pedro, mas não explica como obteve o resultado 27 e como calculou $10\%\ de\ 30$. A aluna recorre a 10% como *número de referência* e obtém 90% retirando 10% a 100%, o que equivale a retirar 3 ao 30. Estabelece uma *relação parte-todo* que pode ter na sua origem uma *representação proposicional*: se 100% de 30 é 30 e 10% de 30 é 3, então, $100\% - 10\% = 90\%$ o que corresponde a $30 - 3 = 27$.

Na turma L, António calcula 10% do valor, obtendo 3, e adiciona-o 9 vezes (estratégia aditiva) para obter o valor correspondente a 90%. Contudo, em interação comigo António mostra ter recorrido a relações numéricas e não estar consciente de que ao dividir 30 por 10 está a calcular 10% do valor em causa:

> ***Investigadora:*** E porque é que dividiste por 10?
>
> ***António:*** Eu fiz 3×9 dá 27. Mas eu não fiz ... [não] multipliquei 3×9. Eu pensei assim 30-3.
>
> ***Investigadora:*** E porque é que pensaste 30-3?
>
> ***António:*** Por causa que 3×10 é 30, menos 3 é igual a 3×9.
>
> **Investigadora:** E o que é esse 3 aí? . . . Que significado tem o 30 a dividir por 10?
>
> ***António:*** Porque 100%, eu vou pegar no 100 e vou tentar dividir para ficar mais simples e 30 a dividir por 10 fica mais simples para mim. É como fazer a tabuada.
>
> ***Investigadora*:** Mas o que é que é esse 3. Esse 3 tem um significado? Ele corresponde a quê?
>
> ***António:*** Corresponde ao 30.

Este diálogo permite perceber algumas das *relações numéricas* realizadas por António, nomeadamente *relação entre* expressões (e.g., 3×10-3=3×9), que têm subjacente o uso de *factos numéricos* ("é como fazer a tabuada") e que não estão explícitas na primeira explicação que o aluno apresenta. À semelhança de Dina, António calcula 10%, embora não tenha consciência disso, e retira-o a 100% para obter 90%. No entanto, a sua estratégia parece basear-se mais na relação entre expressões do que na relação parte-todo. Na origem desta estratégia poderão ter estado *representações proposicionais* baseadas em proposições verdadeiras que diferem da primeira para a segunda explicação do aluno. Na primeira explicação parece ter-se baseado em: se $30 \div 10 = 3$ e $90\% = 9 \times 10\%$, então, 90% de 30 corresponde a 3+3+3+3+3+3+3+3+3. A explicação que dá a seguir, em interação comigo, encaminha-nos para uma *representação proposicional* baseada noutras proposições verdadeiras: se $30 \div 10 = 3$ e 90% de 30 corresponde a calcular 30-3, então $3 \times 10 - 3 = 3 \times 9$.

O cálculo de 10% enquanto percentagem de referência usada nesta expressão por Dina e António, à medida que os alunos a foram entendendo como a décima parte do todo, como evidenciam algumas das estratégias usadas por estes no cálculo de expressões que irei analisar a seguir, foi-se revelando ao longo da experiência uma mais-valia para a resolução de percentagens múltiplas de 10. Alguns alunos associaram o cálculo de 10% explicitamente à divisão por 10, outros apenas referiram que o seu cálculo envolvia "tirar um zero" o que sugere o recurso destes a regras memorizadas.

### $\mathbf{50\%}\ \boldsymbol{de}\ ? = \mathbf{60}$

A resolução de expressões de valor em falta envolvendo percentagens, revelou-se de difícil resolução para os alunos. Contudo o número de respostas corretas dos alunos de ambas as turmas à questão $50\%\ de\ ? = 60$ foi o melhor neste tipo de questão, possivelmente por envolver uma percentagem de referência como 50% e à qual facilmente associam o cálculo de metade. O raciocínio da maioria dos alunos é semelhante ao usado por Marta (Quadro 42).

Quadro 42. Estratégia para a resolução de $50\%\ de\ ? = 60$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Aluno/Estratégia | | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Marta:*** [Deu] 120. Eu fiz... Eu primeiro tinha pensado que era 50% de 60, deu-me 30, mas depois é que vi [que não era] … Fiz 60 vezes 2 . . . Porque 50 [%] mais 50 [%] dá 100 [%]. | Relações numéricas | Cálculo do dobro | | Representação proposicional |

Numa primeira fase, Marta calcula metade de 60, mas apercebe-se que não era isso que a questão pedia e reformula a sua estratégia. Como se pretende saber o valor ao qual corresponde 50%, a aluna *duplica* o valor correspondente a 50%, e obtém 120. Tendo em conta as relações estabelecidas por Marta, a sua estratégia poderá ter subjacente uma *representação proposicional*: se 50%+50%=100% então 60×2 corresponde ao valor em falta.

A relação de metade/dobro associada ao cálculo de 50% surgiu igualmente no cálculo de $50\%\ de\ 40$.

**$25\%\ de\ 20$**

O cálculo de 25% de um valor originou alguma diversidade de estratégias, por parte dos alunos, tendo surgido estratégias semelhantes em ambas as turmas e que vão ao encontro do que apresento no Quadro 43.

Quadro 43. Estratégia para a resolução de $25\%\ de\ 20$.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="4">Tipo de estratégia</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aluno/Estratégia</th><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Outros elementos</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td>TM</td><td>Pedro: Vi que o 25 não era múltiplo de 10. Foi assim que eu pensei e decidi logo usar o 5. O 5% de 20 é ... o 25 tinha 3 cincos... 5 cincos e depois vi automaticamente que era o 5.</td><td rowspan="3">Relações numéricas</td><td>Decomposição</td><td rowspan="3">Factos numéricos<br><br>Números de referência</td><td rowspan="3">Representação proposicional</td></tr>
<tr><td rowspan="2">TL</td><td>Ricardo: Eu só fiz 20 a dividir por 4 . . . Porque 25% é $\frac{1}{4}$de 100.</td><td>Mudança de representação</td></tr>
<tr><td>Rui: Como está ali 25[%] e 25[%] é metade da metade, fiz com 50[%] deu-me 10. A metade de 20 é 10. Depois tira-se a metade e fica 5.</td><td>Cálculo sucessivo de metades</td></tr>
</table>

Na turma L, Ricardo recorre a *relações numéricas*, mais concretamente à *mudança da representação* de 25% para $\frac{1}{4}$ mostrando conhecer a correspondência entre as representações percentagem e fracionária. Em ambas as turmas, o cálculo de 25% surgiu também associado ao *cálculo sucessivo de metades* como fez Rui. Esta estratégia envolve igualmente *relações numéricas* onde o cálculo de 25% é identificado como sendo equivalente ao cálculo de metade da metade. A estratégia de Pedro (turma M) difere em alguns aspetos da de Ricardo e de Rui uma vez que este faz uma primeira opção com base em *factos numéricos* (tabuada do 5) e usa como percentagem de *referência* 5%, porque “25 não era múltiplo de 10”. Questionado acerca do resultado de 5% de 20, refere ser 1, algo que não revelou na sua explicação. Posteriormente recorre novamente à tabuada do 5 para relacionar 25 e 5 e adiciona 5 vezes o resultado 1 (5% de

20) que, segundo o aluno, o fez ”automaticamente” chegando à resposta 5. Pedro usa uma estratégia baseada em *relações numéricas*, *decompondo* 25% em $5 \times 5\%$ e recorrendo assim a *factos numéricos* e a uma *percentagem de referência*.

As estratégias de Rui, Ricardo e Pedro envolvem *relações numéricas* de vários tipos, tendo possivelmente na sua origem *representações proporcionais* cujas proposições variam em função dos conhecimentos dos alunos e das relações que estabelecem. Por exemplo, a estratégia de Ricardo sugere que este se baseou na *representação proposicional*: se 25% = $\frac{1}{4}$ , então, 25% de 20 corresponde a $\frac{1}{4}$ de 20, ou seja, $20 \div 4$; a estratégia de Rui pode ter por base: se 25% é equivalente a metade de metade, então 25% de 20 corresponde a $20 \div 2 \div 2$; e a de Pedro: se 25 é múltiplo de 5, então 5×5%=25% e 25% de 20 corresponde a 5 vezes 5% de 20.

**$5\,\%\ \boldsymbol{de}\ ? = 3$**

O cálculo de $5\,\%\ de\ ? = 3$ revelou ser o segundo mais difícil para os alunos, envolvendo a representação percentagem. No Quadro 44 apresento as explicações de Eva, João e Maria que refletem a diversidade de estratégias que surgiram na resolução desta expressão. Eva usa 10% como percentagem de referência, pois considera que é “mais fácil”, e *relaciona parte-parte* apoiando-se em *factos numéricos* (tabuada do 2). Posteriormente, para calcular a valor em falta *relaciona parte-todo* apoiando-se novamente em *factos numéricos* (tabuada do 10). Esta estratégia poderá ter na sua origem uma *representação proposicional*: se 5% de um determinado valor corresponde a 3, então $2 \times 5\%$ corresponde a $2 \times 3$. Como $100\% = 10 \times 10\%$, o valor em falta terá de ser $10 \times (2 \times 3)$.

João apresenta uma estratégia que tem por base *uma imagem mental* baseada em experiências do “dia-a-dia” tal como refere: “Nas frações utilizávamos a piza e eu lembrei-me de uma coisa do dia-a-dia. Lembrei-me de berlindes”. A imagem mental usada por João reveste-se de alguma especificidade: (“3 berlindes em cada saco”; “enchia 20 sacos, cada um com 3 berlindes”, “fiz 3 vezes 20”) permitindo-nos “imaginar” a situação ao longo da sua explicação. João, ao *relacionar parte- todo* mostra saber que (e de acordo com a sua imagem mental) 5% corresponde a 3 berlindes e que são necessários 20 sacos para obter o todo (“enchia 20 sacos cada um com 3 berlindes porque 5 vezes 20 dá o 100%”). No final apoia-se em *factos numéricos* (tabuada) para chegar ao valor em falta.

Quadro 44. Estratégias para a resolução de $5\%\ de\ ? = 3$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Eva:*** Acho que, eu passei o 5% para 10% que era mais fácil. Mas tive de multiplicar por 2 e então tínhamos de multiplicar o resultado por 2 também 6. . . Depois multipliquei 10 por 6 que dá 60. | Relações numéricas | Relação parte-parte e parte-todo | Número de referência<br>Factos numéricos | Representação proposicional |
| | ***João:*** Então punha 3 berlindes dentro de um saco. Esse valia 5[%]. Depois ia buscar, ia buscar mais 95 sacos e enchia-os todos com 3 berlindes. Não, enchia 20 sacos cada um com 3 berlindes porque 5 vezes 20 dava o 100%. E depois fui contar os berlindes. 3 mais... Fiz 3 vezes 20. | | Relação parte-todo | Factos numéricos | Imagem mental |
| | ***Maria:*** 60. Eu lembra-me da professora estar a dizer que 5% de 20 era 1. Depois eu multipliquei 20 por 3 que é igual a 60. | | Relação entre expressões | | Representação proposicional |

Maria apresenta uma resposta em branco na folha de registo, mas depois de terem sido discutidas diversas estratégias e do resultado ter sido projetado, esta não desistiu de relacionar números e de apresentar uma estratégia. Maria recorre a um resultado prévio, que para ela pode ser um *facto numérico* (5% de 20 é 1), para posteriormente *relacionar duas expressões* (5% de ?=3 e o triplo de 5% de 20). A estratégia apresentada por esta aluna sugere o recurso a uma *representação proposicional*: se 5% de 20 corresponde a 1, então, para um resultado 3 o valor sobre a qual se aplica a percentagem terá de ser $3 \times 20$ porque $3 \times 1 = 3$.

### $\mathbf{20\%\ \textit{de}\ 50}$

O cálculo de $20\%\ de\ 50$ originou algumas estratégias (Quadro 45), que embora semelhantes, apresentam algo de singular. Na turma M, Eva recorre a um resultado previamente discutido durante a discussão da primeira parte da tarefa 8 (0,2×10=2) (*facto numérico)* e usa-o para estabelecer *relações* na segunda parte da tarefa. Reconhece que 20% é equivalente a 0,2 e usa o resultado anterior (2) para *relacionar duas expressões,* possivelmente com base numa *representação proposicional*: se 0,2×10=2 e $10 \times 5 = 50$ sendo 0,2 equivalente a 20%, então 20% de 50 corresponde a $2 \times 5$. Ao assumir que 20% é equivalente a 0,2, Eva compara os valores sobre os quais tem de aplicar a percentagem e verifica que, se 50 (de 20% de 50) é 5 vezes superior a 10 (de 0,2 de 10), o resultado 2 (de 0,2 ×10) terá de ser igualmente 5 vezes superior.

Ana apresenta uma estratégia de *decomposição* algo complexa e diferente das apresentadas até ao momento pelos seus colegas mas que, certamente faz sentido para si. Recorre a 50% como *percentagem de referência* para calcular 10% e posteriormente duplica 10% para calcular 20%, ou seja, a aluna decompõe o cálculo de 20% em $100\% \div 2 \div 5 \times 2$. Esta estratégia sugere o recurso a uma *representação proposicional*: se $100\% \div 2 \div 5 \times 2 = 20\%$ então, 20% de 50 corresponde a 50÷2÷5×2. A aluna calcula metade de 50 e divide esse resultado por 5 mostrando saber que está a calcular 10%. Para obter 20% de 50 Ana pensa em "5 mais 5, 10", ou seja duplica o valor correspondente a 10%.

Rui (turma L) apresenta uma estratégia de *decomposição* de 20% e António uma estratégia de *composição* de 20%. Rui partindo de 10% como percentagem de referência, *decompõe* 20% em 10% +10% e calcula 10% de 50. O cálculo de 10% parece constituir para si um *facto numérico*, dada a rapidez com que o realiza. Saliento que na primeira tarefa em que surgiu o cálculo de percentagens (tarefa 7), Rui manifestou muitas dificuldades, tendo apresentado como resultado de 10% de 350 o valor 3500. Esta estratégia evidencia evolução na sua aprendizagem, bem como outras que serão analisadas e discutidas no Capítulo 9.

A estratégia de Rui parece ter subjacente uma *representação proposicional*: se 20%=10%+10% então 20% de 50 é equivalente à soma de 10% de 50 com 10% de 50. A decomposição de uma percentagem é algo a que Rui tem recorrido com frequência, bem como outros alunos participantes neste estudo.

Quadro 45. Estratégia para a resolução de $20\%\ de\ 50$.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="4">Tipo de estratégia</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aluno/Estratégia</th><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Outros elementos</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td rowspan="2">TM</td><td>Eva: Eu mobilizei uma conta que estava . . . na primeira parte que era, duas décimas vezes 10, acho eu. E então duas décimas é 20% . . . Vi que dava 2 na outra. Então . . . Multipliquei . . . o outro resultado por 5 porque 10 a multiplicar por 5 dá 50. Então multiplicamos o resultado da outra por 5 e deu 10.</td><td rowspan="4">Relações numéricas</td><td>Relação entre expressões</td><td rowspan="2">Factos numéricos</td><td rowspan="4">Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>Ana: Eu fiz 50 a dividir por 2, 25 e depois 25 a dividir por 5 que dá 5. Portanto 10% é 5 e o que nós queríamos era 20%. Portanto 5 mais 5, 10.</td><td rowspan="2">Decomposição</td></tr>
<tr><td rowspan="2">TL</td><td>Rui: 20% se eu decompuser em 10% mais 10%. 10% de 50 é 5, mais outro 10% de 50 é 5.Então 5 mais 5, 10.</td><td rowspan="2">Números de referência</td></tr>
<tr><td>António: Eu dividi o 50 por 100, deu-me 0,5. Então pensei assim, 10 [%] é 5. Se 10 é 5, se 10% é 5 então 20% é 10.</td><td>Composição</td></tr>
</table>

António apresenta uma estratégia de *composição*, que parece ter subjacente uma *representação proposicional* baseada na seguinte proposição: se 50÷100=0,5 e 0,5 corresponde a 1%, então $20\% = 1\% \times 10 \times 2$. Assim 20% de 50 corresponde a $0{,}5 \times 10 \times 2$. António *compõe* 20% recorrendo a um raciocínio multiplicativo 1% é 0,5, então 10% (10 vezes maior) é 5 e 20% (duas vezes maior que 5) é 10, abandonando o raciocínio aditivo que com frequência usou em estratégias anteriores.

**$\_\% \; de 30 = 0,3$**

Para a resolução de $\_\% \; de30 = 0,3$ apenas Pedro (turma M) e António (turma L) apresentam uma estratégia de resolução (Quadro 46). António fá-lo apenas durante a discussão coletiva, uma vez que ninguém da turma L apresentou uma resposta correta para esta questão. Pedro usa 10% como percentagem de referência e recorre possivelmente a *factos numéricos* ou a *regras memorizadas* para calcular 10% uma vez que a sua explicação não é clara relativamente à forma como efetua este cálculo. Como o resultado de 10% de 30 ainda não chega ao indicado na questão (0,3) volta a calcular 10% e chega ao resultado pretendido. De salientar a forma como Pedro justifica o resultado de 1% dizendo que "10% de 10% é 1" uma vez que aplica 10% duas vezes consecutivas. O aluno justifica esta opção dizendo: "Ó stora, a stora não diz metade de metade!?". Questionado pela professora Margarida acerca do valor de 10% de 10% Pedro responde :"É 1%. É assim, nós usamos metade de metade é $\frac{1}{4}$ e 10% de 10% é 1. E 10% de 10% que é de 3 é 0,3". Se por um lado um operador não opera sobre outro, por outro lado, se considerarmos que 10% de 10% pode ser representado por $0,1 \times 0,1$, o produto será efetivamente 0,01 o que corresponde a 1%. Pedro poderá ter pensado na expressão $0,1\times0,1\times30$ ou $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times30$ e baseando-se num conhecimento que possui: "metade de metade é $\frac{1}{4}$" tenta generalizar um procedimento. Este tipo de tentativa de generalização foi igualmente verbalizada por Rui aquando do cálculo de 75% de 20, como se verá adiante. Subjacente a esta flexibilidade de raciocínio pode estar, a facilidade com que Pedro muda da representação percentagem para a decimal ou fracionária. A expressão usada por Pedro ("metade de metade é $\frac{1}{4}$") na sua explicação, parece ser reveladora de que este recorreu à *mudança de representação* para realizar o cálculo apoiando-se numa *representação proposicional* baseada nos conhecimentos que verbaliza na sua explicação: se 10% de 30 é 3 e 10% de 3 é 0,3 então o valor em falta é 10% de 10% que corresponde a 1%.

António não resolveu a questão previamente, mas no momento da discussão coletiva apresenta uma estratégia. Como tem por hábito recorrer a 1% como percentagem de referência, de forma simples e rápida explica a sua estratégia que se baseia no uso de *regras memorizadas* que poderão ter subjacentes *imagens mentais* de um determinado procedimento (desloca a virgula para a esquerda duas posições na divisão por 100), embora a sua explicação não seja clara quanto ao modo como realiza a divisão por 100 nem quanto à representação mental em que se apoia para realizar o cálculo.

Quadro 46. Estratégias para a resolução de $\_\%\ de 30 = 0,3$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Pedro***: Quase toda a gente respondeu 10% e eu vou explicar como é que isso é impossível. É assim, 10% de 30 é 3. 10% de 3 é 0,3. 10% de 10% é 1. | Relações numéricas | Mudança de representação | Factos numéricos<br><br>Regras memorizadas | Representação proposicional |
| **TL** | ***António***: Eu acho que é 1% por causa que 100 a dividir por 30 é 0,3 e 1% é igual a 0,3". | Regras memorizadas | Divisão por 100 | | Imagem mental |

**$20\%\ de\ ?=\ 8$**

Para o cálculo de $20\%\ de\ ?=\ 8$ Dina e Maria apresentam duas estratégias diferentes (Quadro 47). A estratégia de Dina baseia-se na *relação parte-todo* (20% cabe 5 vezes no 100%), semelhante à estratégia onde João usa a imagem mental dos "berlindes" para calcular 5% de?=3, mas sugere o recurso a uma *representação proposicional*: se 100% corresponde a $5 \times 20\%$ então, o valor em falta corresponde a $5 \times 8$.

Numa primeira fase de discussão, Maria assume ter realizado a mesma estratégia que Dina: "Eu fiz igual à Dina", mas apresenta outra estratégia onde recorre a 10% como percentagem de referência e à *relação parte-parte*, para posteriormente relacionar parte-todo com o apoio de *regras memorizadas*. A sua estratégia sugere igualmente o recurso a uma *representação proposicional*: se $20\% \div 2 = 10\%$ então, $8 \div 2 = 4$. Como 10% de ? =4, então $100\% \div 10 = 10\%$ e $4 \times 10$ corresponde ao valor em falta. Maria calcula metade de 20% para se centrar na referência "10%" e fá-lo também no valor correspondente a 20%, ou seja 8. Posteriormente usa uma *regra memorizada* ("acrescentar o zero ao 4") pela relação que existe entre 100% e 10%.

Quadro 47. Estratégia para a resolução de $20\%\ de\ ? = 8$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Aluno/Estratégia | Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
| TM | ***Dina:*** 20% cabe 5 vezes em 100%. Fiz 8×5 que deu 40. | Relações numéricas | Relação parte-todo | Número de referência<br>Regras memorizadas | Representação proposicional |
| | ***Maria:*** Eu fiz como a Dina, mas há uma regra que também podemos utilizar - os 10%. Se dividirmos 20% por 2 igual a 10%, é igual a 4. 10% de 40 é 4. E como nós queríamos mais ou menos 100% era só acrescentar o zero ao 4.Porque 100 [%] a dividir por 10 igual a 10% por isso temos que acrescentar o zero ao 4. | | Relação parte-parte e parte-todo | | |

**$75\%\ de\ 20$**

À semelhança do que aconteceu com o cálculo de 90% de um valor, o cálculo de 75% também originou um número reduzido de respostas corretas. O cálculo de $75\%$ de $20$ fez surgir algumas das estratégias já discutidas a propósito do cálculo de 25% de 20 mas também outras, como apresento no Quadro 48. Pedro e Dina (turma M) apresentam uma estratégia em que *relacionam parte-todo*, calculando de forma diferente 25% de uma quantidade. Rui e Diogo (turma L) apresentam uma estratégia de *relação parte-parte* e de *decomposição* respetivamente.

Pedro calcula 25% partindo de 5% como percentagem de *referência* ($5 \times 5\%$), tal como fez no cálculo de 25% de 20 e Dina calcula 25% partindo de 10% como percentagem de *referência* ($10\% \times 2 + 5\%$). Ambos calculam 75% retirando 25% ao todo (100%). Na origem das suas estratégias poderão ter estado *representações proposicionais* baseadas em proposições verdadeira, semelhantes no que respeita à *relação parte-todo* (75% =100%-25%) e diferentes no que respeita à decomposição e cálculo de 25%: se 75%=100%-25% e $5 \times 5\% = 25\%$ então 75% de 20 equivale a 20 menos cinco vezes 5% de 20 (Pedro) e Dina: se 75%=100%-25% e $25\% = (10\% \times 2) +$

(10% ÷ 2), então, 75% de 20 equivale à diferença entre 20 e a soma do dobro de 10% de 20 com a metade de10% de 20.

Quadro 48. Estratégias para a resolução de $75\%\ de\ 20$.

| | Aluno/Estratégia | Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **Tipo de estratégia** | | | |
| **TM** | ***Pedro:*** [Deu] 15. Eu sou muito teimoso e usei outra vez, em vez do 10 [%], o 5 [%]. 5% de 20 é 1. Depois fiz 5… 1 vezes 5 [deu] 5. Depois diminui ao 20 o 5. | Relações numéricas | Relação parte-todo | Números de referência | Representação proposicional |
| | ***Dina:*** 10% de 20 que é 2. Depois 20% é 4 e 5% é metade de 10% que é 2, é 1. Inteiro deu 5€, ou seja 25% é 5. 20 menos 5 dá 15. | | | | |
| **TL** | ***Diogo:*** Metade da metade. Metade da metade dá 5 e depois como 75% é o triplo de 25% é só 5 vezes 3 que dá 15. | | Relação parte-parte | | |
| | ***Rui:*** Professora, então eu pensei. Fui [e] entrei numa loja e vi coisas de 20€. Então não tinha dinheiro. Só tinha aquele dinheiro [20€]. Então estava em saldos 75 [%]. 75[%] em saldos. Então comecei a pensar 50%. 50% é 10. Então 50% de 50% equivale a 5. Então é 15 porque dividi [antes decompõe] o 75 [%] por duas partes, 25 mais 50 que equivale a 15. | | Decomposição | | Modelo mental |

Diogo apresenta uma estratégia em que *relaciona parte-parte*. Calcula 25% recorrendo ao cálculo sucessivo de metades, e multiplica o resultado obtido por 3, uma vez que “75% é o triplo de 25%”. Na realidade Diogo calcula uma parte $\left(\frac{1}{4}\right)$ e considera 3 dessas partes, mas a forma como explica a sua estratégia mostra-nos que reconheceu uma relação de triplo entre 25% e 75%. Esta estratégia sugere o recurso a uma *representação proposicional*: se $75\% = 3 \times 25\%$ e $25\% = 100\% \div 2 \div 2$, então 75% de 20 corresponde ao triplo de 25% de 20. Esta foi uma estratégia que também surgiu na turma M.A estratégia de Diogo assemelha-se a outras usadas pelos alunos no cálculo de $\frac{3}{4}$ de uma quantidade dada a equivalência entre $\frac{3}{4} = 75\% = 0{,}75$.

Ainda na turma L, Rui usa uma estratégia centrada em *relações numéricas* que contempla a *decomposição* de 75% (50%+25%), mas recorre a um *modelo mental* de uma situação real para contextualizar a expressão 75% de 20 (“Fui [e] entrei numa loja e vi coisas de 20€.”). Na sua explicação, o aluno refere-se a “50% de 50%”. Tendo em conta que uma percentagem não pode ser aplicada a outra, mas sim a uma quantidade, esta expressão de Rui pode ser uma tentativa de generalização do conhecimento que possui acerca do cálculo sucessivo de metades ou uma tentativa de formalização da linguagem natural “metade de metade”. Generalização semelhante tinha sido realizada por Pedro no cálculo de ___% de 30=0,3 como apresentei anteriormente. O recurso a modelos mentais por parte de Rui pode estar relacionado com a sua vivência pessoal e necessidade de a relacionar com um determinado contexto matemático de forma a apoiar a sua compreensão ou então com a sessão anterior de cálculo mental onde os alunos resolveram e discutiram uma situação contextualizada envolvendo percentagens, relacionando expressões em contexto matemático e não matemático.

### 7.1.4. Estratégias em questões com duas representações

Os alunos das turmas M e L resolveram questões de cálculo mental envolvendo duas representações diferentes dos números racionais nas tarefas 3, extra, 5 ou 6, 8, 9 e 10. No total, resolveram 16 expressões e 12 situações contextualizadas. Destas serão analisadas 4 expressões e 3 situações contextualizadas (Quadro 49).

O quadro 50 mostra o número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos de ambas as turmas às questões que vão ser alvo de análise. A análise deste quadro volta a confirmar a dificuldade dos alunos em resolverem expressões envolvendo a multiplicação, mas especialmente a divisão de dois números racionais. Esta dificuldade verifica-se não só na resolução de expressões, mas também na resolução de situações contextualizadas. As expressões de valor em falta continuam a apresentar um desafio maior para os alunos do que as expressões sem valor em falta.

Quadro 49. Questões de cálculo mental várias representações dos números racionais.

| Questões | | Tarefa |
|---|---|---|
| Expressões | $\frac{3}{4} + 0{,}5$ | 3 |
| | $0{,}25\ de\ ? = 10$ $\quad \frac{1}{5}\ de\ ? = 8$ | 8 |
| | $2{,}2 - ? = \frac{1}{5}$ | 9 |
| Situações contextualizadas | Uma tina tem de capacidade $22{,}5\ l$. Quantos baldes de $\frac{1}{2}\ l$ são necessários encher para despejar por completo a tina? | 5 ou 6 |
| | O sólido A tem $8{,}4\ l$ de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. Calcula a capacidade do sólido B. | 6 |
| | A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8} l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $0{,}75 l$ de refresco? | 10 |

Quadro 50. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com duas representações.

| | Número de respostas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Corretas | | Incorretas | | Não responde | |
| **Questões** | TM | TL | TM | TL | TM | TL |
| $\frac{3}{4} + 0{,}5$ | 11 | 5 | 8 | 6 | 1 | 6 |
| $0{,}25\ de\ ? = 10$ | 11 | 1 | 6 | 2 | 3 | 17 |
| $\frac{1}{5}\ de\ ? = 8$ | 8 | 1 | 8 | 4 | 6 | 14 |
| $2{,}2 - ? = \frac{1}{5}$ | 7 | 1 | 4 | 4 | 9 | 14 |
| Uma tina tem de capacidade $22{,}5\ l$. Quantos baldes de $\frac{1}{2}\ l$ são necessários encher para despejar por completo a tina? | 13 | 6 | 6 | 8 | 1 | 5 |
| O sólido A tem $8{,}4\ l$ de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. Calcula a capacidade do sólido B | 2 | 0 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8} l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $0{,}75 l$ de refresco? | 2 | 0 | 9 | 8 | 9 | 11 |

$\mathbf{\frac{3}{4} + 0,5}$

As estratégias de Maria, André e João (Quadro 51), ilustram a diversidade de formas e relações numéricas a que os alunos recorreram para resolver a expressão $\frac{3}{4} + 0{,}5$. Estes alunos recorrem à *mudança de representação* embora a estratégia de João se centre mais na *decomposição* da fração $\frac{3}{4}$, estratégia pouco frequente com a representação fracionária.

Maria parte de um *modelo mental* de um relógio para a apoiar no cálculo. A expressão: "Pus 0,50 em meia hora" parece indiciar que esta converteu o numeral decimal 0,5 na fração $\frac{1}{2}$ e que, sem recorrer a frações equivalentes ou a qualquer procedimento algorítmico calculou o valor da expressão com base na "visualização" da marcação das horas no relógio, indicando o resultado em numeral decimal.

André opta por converter a fração em numeral decimal para assim adicionar $0{,}75 + 0{,}5$, embora não seja explícito quanto à forma como realizou o cálculo. Apresenta o resultado em numeral decimal, mas também em numeral misto, representação cuja exploração não foi privilegiada na experiência de ensino, mas a que André recorreu de acordo com os seus conhecimentos. Também Maria ao referir:" Dá uma hora e um quarto" está implicitamente a considerar o numeral decimal, embora não o formalize simbolicamente como fez André. A estratégia de André poderá ter sido influenciada por uma *representação proposicional* com ênfase na mudança de representação: se $\frac{3}{4} = 0{,}5$ então $\frac{3}{4} + 0{,}5 = 0{,}75 + 0{,}5$ com $0{,}75 + 0{,}5 = 1{,}25 = 1\frac{1}{4}$.

João apresenta-nos uma estratégia em que *decompõe* $\frac{3}{4}$ em $\frac{2}{4} + \frac{1}{4}$ , embora a linguagem que utiliza não seja a mais correta uma vez que não tira" uma unidade ao numerador" mas sim uma parte das consideradas. Esta decomposição parece ter como objetivo formar uma unidade ao juntar $\frac{2}{4}$ com 0,5. Na sua explicação, João mostra que conhece representações equivalentes dos números racionais ao referir que: "Dava $\frac{1}{2}$ que era equivalente à outra [a 0,5]" e realiza todos os cálculos com recurso à representação fracionária.

Quadro 51. Estratégias para a resolução de $\frac{3}{4} + 0{,}5$.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Aluno/Estratégia</th><th colspan="4">Tipo de estratégia</th></tr>
<tr><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Outros elementos</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td rowspan="3">TM</td><td>Maria: Portanto $\frac{3}{4}$... Pensei no relógio e pus 0,50 em meia hora. Então se $\frac{3}{4}$ é igual a $\frac{3}{4}$ de hora, mais meia hora dá uma hora e um quarto. Uma hora e um quarto pus 1,25.</td><td rowspan="3">Relações numéricas</td><td rowspan="2">Mudança de representação</td><td rowspan="2"></td><td>Modelo mental</td></tr>
<tr><td>André: Igual a $1\frac{1}{4}$. . . Então eu transformei [$\frac{3}{4}$] em 75 mais 50 dá uma unidade e 25 centésimas e depois transformei em numeral misto.</td><td rowspan="2">Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>João: Eu vi que se tirasse uma unidade ao numerador da primeira ... da fração ($\frac{3}{4}$) dava $\frac{1}{2}$ que era equivalente à outra [a 0,5]. Que quer dizer que dava um número inteiro. Como eu retirei uma unidade tive de a somar depois. . . deu $\frac{5}{4}$.</td><td>Decomposição</td><td>Mudança de representação</td></tr>
</table>

Na adição de uma fração com um numeral decimal, as estratégias dos alunos centram-se na *mudança de representação*, preferencialmente de decimal para fracionária. Isto verificou-se no cálculo de $\frac{3}{4} + 0{,}5$ bem como no cálculo de $\frac{8}{10} - 0{,}2$. Na resolução desta última expressão, destaco a estratégia de Ana (turma M):" Quando vi lá os oito décimos pus logo na fração irredutível que dava $\frac{4}{5}$ e depois menos $\frac{1}{5}$ deu-me $\frac{3}{5}$", pelo facto da aluna não recorrer a frações decimais, como foi opção da maioria dos alunos, mas sim a frações equivalentes irredutíveis, como ela própria assume, mostrando assim um conhecimento mais alargado acerca da equivalência entre números racionais e de frações equivalentes em particular.

$\mathbf{2,2-?=\frac{1}{5}}$

A estratégia que Diogo apresenta para a resolução de $2{,}2-?=\frac{1}{5}$ (Quadro 52) comtempla a *mudança de representação* ao considerar no cálculo $\frac{1}{5}=0{,}2$. A expressão do aluno: “Então, se eu tirar as 2 unidades, fica 2 décimos” sugere que este poderá ter sido influenciado pela *imagem mental* da expressão $2{,}2-?=0{,}2$ onde Diogo se focou no algarismo 2 da parte inteira percebendo que o deveria de retirar (pela subtração) para ficar com a diferença 0,2. Por norma os alunos retirariam 0,2 a 2,2 e não 2 a 2,2 como fez Diogo.

Numa expressão de valor em falta envolvendo a subtração de dois números racionais, um decimal e outro fracionário, os alunos ao contrário do que fizeram na adição, optam por transformar a fração em numeral decimal como fez Diogo da turma L. Já na tarefa extra esta tendência se verificou aquando do cálculo de $1-?=\frac{1}{4}$, onde a maioria dos alunos optou por converter $\frac{1}{4}$ em 0,25 para depois subtrair a 1. Curiosamente na resolução de $1-?=\frac{1}{4}$, Diogo indicou o resultado em numeral decimal apesar de ter efetuados todos os cálculos com a representação fracionária: “0,75. porque $\frac{1}{4}$ é o resultado e vamos à unidade e tiramos $\frac{1}{4}$ e fica $\frac{3}{4}$. Então se fizemos uma metade menos $\frac{3}{4}$ dá $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$ é 0,75”.

Quadro 52. Estratégia para a resolução de $2{,}2-?=\frac{1}{5}$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Aluno/Estratégia | | Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
| TL | ***Diogo***: Coloquei 2. Porque $\frac{1}{5}$ é 2 décimos. Está lá 2 unidades e 2 décimas. Então, se eu tirar as 2 unidades, fica 2 décimos que fica $\frac{1}{5}$ | Relações numéricas | Mudança de representação | | Imagem mental |

Diogo no cálculo destas duas expressões, que foram realizadas em momentos diferentes da experiência de ensino, mostra destreza na transição entre representações equivalentes dos números racionais não se vinculando a nenhuma em especial, mas sim optando por aquela que lhe faz mais sentido no momento.

### $\mathbf{0,25}\boldsymbol{de}\ ? = \mathbf{10}$

No cálculo de $0{,}25\ de\ ? = 10$, os alunos associaram 25% e $\frac{1}{4}$ a 0,25 tal como reflete a explicação de Lídia (Quadro 53). Lídia *muda de representação* e ao referir:" Eu fiz 25% que é quartos" mostra *relacionar parte-todo* ao considerar 25% como sendo a quarta parte do todo. Assim, multiplica 10 por 4 mostrando perceber a relação entre o fator em falta (?) e o produto (10).

Esta estratégia sugere o recurso a uma *representação proposicional* centrada nas relações numéricas realizadas por Lídia: se $0{,}25 = 25\% = \frac{1}{4}$ então $\frac{1}{4} de\ ? = 10$, logo $? = 10 \times 4$. Enquanto Lídia optou por multiplicar de imediato por 4, houve alunos que preferiram calcular o dobro do dobro, certamente por relacionarem 25% com o cálculo de metade de metade.

Quadro 53. Estratégia para a resolução de $0{,}25\ de\ ? = 10$.

| | | Tipo de estratégia | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Aluno/Estratégia** | | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Lídia***: A mim deu-me 40. Eu fiz 25% que é quartos e fiz 10×4 que eu sei logo que é 40. | Relações numéricas | Relação parte-todo | Mudança de representação | Representação proposicional |

No cálculo de $\frac{1}{5} de\ ? = 8$ a relação parte-todo volta a surgir de forma explicita, desta vez na estratégia de Diogo (turma L), embora este não opte pela mudança de representação como Lídia:" Já sabemos que $\frac{1}{5}$ é 8 e para chegar à unidade que é $\frac{5}{5}$ falta-nos 5. É só multiplicar por 5". Subjacente à estratégia de Diogo poderá estar uma representação proposicional semelhante à de Lídia uma vez que também relaciona o fator em falta com o produto.

Noutras questões semelhantes onde surgiram numerais decimais e números naturais os alunos tendencialmente converteram o numeral decimal em percentagem, como no caso de $0{,}2\ de\ 10$ onde uma grande parte dos alunos pensou em 20% de 10 ou em 10% ou ainda no cálculo da décima parte para posteriormente duplicar o valor. Neste tipo de expressões de valor em falta, independentemente da representação do número racional do primeiro fator, as estratégias dos alunos parecem basear-se mais na *relação parte-todo*, possivelmente porque a própria expressão incentiva o aluno a relacionar números uma vez que não se apresenta de forma explícita uma operação a realizar e assim os alunos terão de inferir que o número racional surge, neste caso, com o significado de operador.

**Situação da tina**

A situação da tina poderia ser resolvida recorrendo ao cálculo de $22{,}5 \div \frac{1}{2}$, e surgiu como uma oportunidade para os alunos pensarem num contexto onde surge a divisão por $\frac{1}{2}$. A estratégia apresentada por Eva (Quadro 54) representa uma boa oportunidade para ilustrar a aplicação da regra “inverte e multiplica” a que muitos alunos recorrem na divisão de duas frações, bem como a discussão do sentido de divisão com números racionais uma vez que se obtém um quociente superior ao dividendo, usando um divisor de referência para os alunos como é $\frac{1}{2}$. Eva começa por explicitar a *relação entre dividir por* $\frac{1}{2}$ *e multiplicar por 2* explicando porque razão multiplica por 2. Na sua explicação evidencia conhecer a equivalência entre $\frac{1}{2}$ e 0,5 e que $0{,}5 \times 2$ forma a unidade (um balde completo de água). A estratégia de Eva poderá ter sido influenciada por uma *representação proposicional* do tipo: se $\frac{1}{2} = 0{,}5$ e $0{,}5 \times 2 = 1$ então $22{,}5 \times 2 = 45$ e ilustra, de um modo geral, o raciocínio seguido pela maioria dos alunos, onde muitos chegam a verbalizar a relação entre dividir por $\frac{1}{2}$ e multiplicar por 2.

Quadro 54. Estratégia para a resolução da situação da tina.

| | Aluno/Estratégia | Tipo de estratégia<br>Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
|---|---|---|---|---|---|
| **TM** | ***Eva***: Deu-me 45 baldes. Bastou multiplicar 22,5 litros por 2 e deu-me logo. . .Porque $\frac{1}{2}$ para dar uma unidade tem que se somar 5 décimas duas vezes então era a multiplicar por 2. | Relações numéricas | Relação entre dividir por $\frac{1}{2}$ e multiplicar por 2 | | Representação proposicional |

**Situação da capacidade do sólido B**

A situação da capacidade do sólido B poderia ser resolvida recorrendo à expressão $\frac{3}{4} \times 8{,}4$. A estratégia de Duarte (Quadro 55) surge como uma das possibilidades, adotadas por alguns alunos, para o cálculo do produto de $\frac{3}{4}$ por outro número, que posteriormente também surgiu no cálculo de $\frac{3}{4}\, de\ 60$. Houve no entanto alunos que preferiram multiplicar por 3 e dividir por 4 aplicando possivelmente um conjunto de procedimentos previamente memorizados.

Quadro 55. Estratégia para a resolução da situação da capacidade do sólido B.

| | Aluno/Estratégia | Tipo de estratégia<br>Categoria | Subcategoria | Outros elementos | Representação mental |
|---|---|---|---|---|---|
| **TM** | ***Duarte***: [6,3] Era 8,4 e dividia-se por 4 para saber os quartos e depois multipliquei por 3. | Relações numéricas | Decomposição | | Representação proposicional |

Duarte começa por dividir por 4 "para saber os quartos" evidenciando compreensão da operação que está a realizar, bem como uma possível *decomposição* de $\frac{3}{4}$ em $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, uma vez que posteriormente multiplica o valor correspondente a $\frac{1}{4}$ por 3.

Subjacente a esta estratégia poderá estar uma *representação proposicional* centrada na relação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$: se $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ então $\frac{3}{4} \times 8{,}4 = \frac{1}{4} \times 8{,}4 \times 3$.

**Situação dos copos de refresco**

A situação dos copos de refresco, da última tarefa da experiência de ensino, poderia ser resolvida através da expressão $0{,}75 \div \frac{1}{8}$. Ricardo, evidenciando conhecimento sobre *equivalência entre representações* dos números racionais e entre frações, associa 0,75 a 75% e posteriormente a $\frac{6}{8}$, possivelmente porque o divisor era uma fração de denominador 8. De notar que a fração $\frac{1}{8}$, certamente por não ter sido muito usada e discutida na experiência de ensino criou algumas dificuldades aos alunos. Isso não parece ser o caso de Ricardo uma vez que transitou facilmente entre representações dos números racionais até encontrar aquela que mais lhe facilitaria o cálculo. Ao optar por converter 0,75 em $\frac{6}{8}$ e tendo em conta que cada copo tinha a capacidade de $\frac{1}{8}$, de forma quase intuitiva e sem necessidade de cálculos demorados (como a regra do "inverte e multiplica" sobejamente usada pelos alunos), Ricardo chega ao resultado 6 mostrando compreender a relação entre as frações. Esta estratégia poderá ter tido origem numa *representação proposicional* centrada na mudança de representação e na relação entre dividendo e divisor da operação que tinha de realizar: se $0{,}75 = 75\% = \frac{6}{8}$ então $0{,}75 \div \frac{1}{8} = \frac{6}{8} \div \frac{1}{8}$ como $\frac{6}{8} = 6 \times \frac{1}{8}$ então $\frac{6}{8} \div \frac{1}{8} = 6$.

Quadro 56. Estratégia para a resolução da situação dos copos de refresco.

| | | **Tipo de estratégia** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Outros elementos** | **Representação mental** |
| **TL** | ***Ricardo***: $\frac{1}{8}$ é um copo e 75% é $\frac{6}{8}$. . . $\frac{6}{8}$ é 6 copos. | Relações numéricas | Mudança de representação | Frações equivalentes | Representação proposicional |

Na divisão de um numeral decimal por uma fração a maioria dos alunos recorre à mudança da representação decimal para fracionária e aplica os procedimentos para a divisão de duas frações (”inverte e multiplica” ou divisão de numeradores e denominadores quando estes são múltiplos). Nos casos em que o divisor é $\frac{1}{2}$ alguns alunos verbalizam a relação com a multiplicação por 2 (como Eva na situação da tina) e no caso de $\frac{1}{3}$ a relação com a multiplicação por 3.

Na multiplicação de uma fração por um numeral decimal, os alunos optam igualmente por transformar o numeral decimal em fração para posteriormente aplicarem as regras de multiplicação de frações ou então regras de simplificação de cálculo, quando isto é possível, como fizeram Bruto (turma M) e Cátia (turma L) no cálculo de $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ e que apresentei na secção onde foram analisadas questões com frações.

## 7.2. Síntese

A análise das estratégias dos alunos mostra que existe uma relação entre o tipo de estratégia e a representação do número racional usada, embora existam estratégias comuns a todas as representações. O tipo de questão de cálculo mental e as operações envolvidas parecem igualmente influenciar as estratégias dos alunos.

Assim, na representação fracionária, os alunos começam por recorrer a *factos numéricos* (tabuada, somas, produtos, diferenças, quocientes previamente conhecidos) e a *regras memorizadas* (aplicação de procedimentos algorítmicos) na adição e subtração de frações, mantendo-se o recurso a regras memorizadas (aplicação de algoritmos e de procedimentos de simplificação de cálculos) na multiplicação e divisão de frações, especialmente em expressões sem valor em falta. Nestas expressões surgem pontualmente estratégias baseadas em *relações numéricas*, nomeadamente a *relação parte-todo*, quando os alunos recorrem a imagens mentais de contextos seus conhecidos (por exemplo, cortar uma maçã ao meio para imaginar a adição de duas metades) e usam frações equivalentes sem necessidade de verbalizar o seu cálculo. A partir do meio da experiência de ensino, surge igualmente a *mudança de representação*, associada à representação fracionária (de fração para dízima) e a *relação entre operações* (caso de $\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$), bem como a *comparação entre numerador e denominador* de uma fração que conduziu à generalização de frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ (caso de $\frac{7}{14} + \frac{1}{2}$). As expressões de valor em falta e as situações contextualizadas parecem levar os alunos a optarem por estratégias mais centradas em relações numéricas onde a utilização de factos numéricos e de regras memorizadas não desaparecem, mas passam a ser auxiliares destas estratégias. As *relações numéricas* utilizadas pelos alunos com a representação fracionária centram-se no uso de *propriedades das operações,* na *relação entre expressões, relação entre operações* e *entre operações inversas* e pontualmente na *mudança de representação* dos números racionais.

Na representação decimal, estratégias apenas centradas na aplicação de *regras memorizadas* e *factos numéricos* surgem pontualmente embora continuem a revelar-se auxiliares importantes no estabelecimento de relações numéricas, desta vez em conjunto com a *mudança de representação*. Na adição e subtração de numerais decimais surge novamente a *mudança de representação* e a *relação entre expressões* nas estratégias dos alunos, surgindo outras como a *compensação* e o recurso a *subtrações sucessivas*. Na multiplicação e divisão de numerais decimais as estratégias dos alunos centram-se na *relação entre números, operações* e *entre operações inversas* e a *mudança da representação* decimal para fracionária assume um papel central nas estratégias dos alunos bem como a mudança da representação decimal para números naturais referentes a $\frac{10}{100}$. A mudança da representação decimal para fracionária pode ter sido influenciada pela exploração prévia das primeiras tarefas da experiência de ensino que envolvia frações de referência, enquanto a mudança de numeral decimal para número natural pode ter sido influenciada pelo conhecimento prévio dos alunos sobre números naturais. Na representação decimal, a diferença entre as estratégias usadas em expressões sem valor em falta e com valor em falta ou situações contextualizadas não é significativa o que, mais uma vez, pode relacionar-se com a experiência dos alunos no trabalho com números naturais e na fácil extensão deste conhecimento para as operações com numerais decimais.

No cálculo mental com a representação percentagem, as estratégias dos alunos envolvem, na sua maioria, relações numéricas de diversos tipos, sendo pouco frequentes estratégias envolvendo apenas factos numéricos ou regras memorizadas. Estratégias baseadas essencialmente em factos e regras surgem, por norma, associadas ao cálculo de percentagens e valores múltiplos de 10 (e.g, 90% de 30; __% de 20=18; __% de 30=0,3). Com maior frequência os alunos recorrem a factos numéricos e a regras memorizadas para o estabelecimento de relações numéricas como também aconteceu com as representações fracionária e decimal. Os alunos também recorrem a números de referência e à mudança de representação como apoio à relação entre números e operações. No que se refere às relações numéricas usadas pelos alunos nas suas estratégias, estas diferem em função das percentagens envolvidas e/ou do tipo de questão. No cálculo de 50% de uma quantidade, os alunos recorrem a estratégias baseadas no *cálculo de metades/dobros* e associam o cálculo de 25% de uma quantidade ao *cálculo da quarta parte* ou ao *cálculo sucessivo de metades*. A *mudança de representação* surge como uma estratégia forte no cálculo de 25%, 75% e 20% à qual os alunos associam e usam no cálculo, maioritariamente, as representações fracionárias $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{5}$ respetivamente. O facto de associarem o cálculo de 50% a metade também tem implícita a relação entre 50% e $\frac{1}{2}$. O cálculo de 10% de uma quantidade é associado ao *cálculo da décima parte* dessa quantidade onde, com frequência, os alunos recorrem a regras memorizadas para realizar a operação (“tirar zeros”). Estratégias de *decomposição*, *composição* e *relação entre expressões* surgem com maior frequência na aplicação de uma percentagem a um determinado valor (e.g., 20% de 50) enquanto estratégias de *relação parte-todo* e *relação parte-parte* surgem mais associadas aos outros dois tipos de questões (e.g., 25% de ? = 20 e __% de 30 = 0,3) e que se referem a expressões de valor em falta.

Quando surgem operações envolvendo duas representações dos números racionais ou um número racional e um número natural os alunos raramente recorrem a *regras memorizadas* ou a *factos numéricos* e frequentemente usam *relações numéricas* bem como a *mudança de representação*, selecionando a representação mais adequada para a resolução da expressão em causa. Enquanto na representação decimal se notou uma tendência de conversão para a representação fracionária, no caso em que surgem duas representações, os alunos não manifestam nenhuma tendência em especial. Estratégias de *decomposição* voltam a surgir, agora também associadas à representação fracionária, bem como a *relação numérica associada à divisão por* $\frac{1}{2}$ *e multiplicação por 2*. A *relação parte-todo* surge associada a expressões semelhantes às utilizadas com a representação percentagem, como por exemplo $0{,}25\ de\ ? = 10$, onde inclusive os alunos pensam em 0,25 como sendo 25%. O recurso a frações equivalentes e à mudança de representação surgem como elementos auxiliares no estabelecimento de outras relações numéricas.

No que se refere às representações mentais com frações, as estratégias dos alunos sugerem uma forte tendência de recurso a *imagens mentais* de procedimentos que os leva a focarem-se em determinados aspetos da operação ou dos numeradores e denominadores das frações sempre que aplicam *factos numéricos* e *regras memorizadas*. Em estratégias envolvendo *relações numéricas*, surgem *modelos mentais* e *imagens mentais* sempre que estes recorrem a contextos de apoio ao cálculo mental e *representações proposicionais* sempre que recorrem a relações entre números e operações. Na representação decimal, as estratégias sugerem mais uma vez o recurso a *imagens mentais* aquando da aplicação de *factos numéricos* e *regras memorizadas*, à semelhança do que aconteceu com a representação fracionária, mas com uma maior ênfase no recurso a *representações proposicionais* em situações onde os alunos recorreram a *relações numéricas*. Os *modelos mentais* surgem associando a contextos de dinheiro, independentemente do tipo de estratégia usada pelos alunos. Na representação percentagem e quando duas representações dos números racionais estão envolvidas, as estratégias dos alunos sugerem que estes recorrem maioritariamente a *representações proposicionais* para concretizarem uma dada relação numérica e onde estão envolvidas proposições verdadeiras, fruto do seu conhecimento matemático. Este conhecimento envolve factos numéricos, regras memorizadas e relações entre números e entre expressões à semelhança das representações proposicionais usadas nas representações fracionária e decimal. *Modelos mentais* construídos a partir da experiência do dia-a-dia dos alunos (relógio, compras) continuam a apoiar o estabelecimento de relações numéricas. *Imagens mentais* voltam a ser a base de estratégias mais baseadas em *factos* e *regras memorizadas*, embora também tenham surgido esporadicamente associadas a estratégias envolvendo relações numéricas.

De um modo geral, as estratégias dos alunos evoluíram de estratégias mais centradas em factos numéricos e regras memorizadas (na representação fracionária) para estratégias envolvendo relações numéricas de vários tipos (representações decimal, percentagem e duas representações em conjunto). Gradualmente os alunos foram evidenciando pensamento relacional ao estabelecerem relações numéricas no cálculo mental com as diversas representações dos números racionais. O pensamento relacional dos alunos esteve presente na generalização de conhecimentos (por exemplo, generalização de frações que representam “metade” ou cálculo de 10% de 10%), no recurso a propriedades fundamentais das operações e na relação entre operações, entre expressões e entre representações dos números racionais (onde a igualdade foi entendida como sinónimo de equivalência), levando-os a compor e a decompor números e a raciocinar sobre quantidades independentemente da representação em causa ser em fração, decimal ou percentagem. De realçar o papel das expressões de valor em falta e das situações contextualizadas enquanto potenciadoras de estratégias baseadas em relações numéricas e em pensamento relacional. Esta evolução foi mais lenta no ciclo de experimentação II embora as estratégias que surgiram em ambas as turmas fossem muito semelhantes. Ao longo da experimentação (ciclos I e II), os factos numéricos e as regras memorizadas continuaram a fazer parte das estratégias dos alunos (com menor frequência) revelando-se essenciais no apoio ao estabelecimento de relações numéricas. A mudança de representação foi ganhando relevância nas estratégias dos alunos à medida que novas representações dos números racionais iam sendo exploradas, verificando-se no final da experiência alguma flexibilidade por parte dos alunos em selecionar a representação do número racional mais adequada para a resolução da questão de cálculo mental em causa.

Relativamente às representações mentais, as estratégias dos alunos sugerem um recurso cada vez mais frequente a representações proposicionais por estas se associarem mais a estratégias baseadas em relações numéricas e cada vez menos a imagens mentais por estas se associarem à aplicação de factos numéricos e regras memorizadas. Imagens mentais e modelos mentais surgem esporadicamente associados a contextos significativos para os alunos, aos quais estes recorrem para contextualizar números e assim os apoiar no cálculo mental.

# Capítulo 8

# Erros dos alunos no cálculo mental

Neste capítulo apresento questões de cálculo mental da experiência de ensino onde os alunos apresentaram erros. Termino com uma síntese onde indico os erros mais comuns dos alunos no cálculo mental com números racionais nas representações fracionária, decimal e percentagem e quando surgem duas destas representações em conjunto.

## 8.1. Erros dos alunos no cálculo mental com números racionais

Durante os momentos de discussão coletiva os alunos manifestaram um conjunto de erros que importa analisar e perceber de forma a responder à segunda questão do estudo. Tendo em conta que subjacente a um erro pode estar uma estratégia de cálculo mental interessante, é necessário esclarecer o que considero como erro. Assim, identifico como erro todo o resultado incorreto (diferente ou não equivalente ao pretendido) a uma dada expressão ou situação contextualizada, independentemente da estratégia utilizada revelar, ou não, conhecimentos matemáticos importantes.

O foco da análise são as explicações das estratégias usadas pelos alunos, de forma a perceber que tipo de erro foi cometido. De salientar que, apesar de muitas vezes os alunos indicarem, na sua folha de registo, resultados incorretos, estes nem sempre apresentam nos momentos de discussão a forma como pensaram, pelo que, o número de estratégias possíveis de analisar e os erros associados são muito variáveis de questão para questão. Ao longo da experiência de ensino, em ambos os ciclos de experimentação, o número de respostas incorretas foi reduzindo enquanto o número de respostas em branco aumentou. Nos momentos de discussão coletiva, percebi que os alunos tendencialmente passaram a calcular apenas o que efetivamente conseguiam e para o qual possuíam conhecimentos, o que pode explicar esta alteração. Esta situação é mais visível nas últimas tarefas da experiência de ensino especialmente com a representação percentagem. O registo de todas as respostas dos alunos, nos ciclos de experimentação I e II, às questões encontra-se em Anexo (Anexos R e T), bem como o número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das duas turmas às diversas questões de cálculo mental por representação dos números racionais (Anexos S e U).

Os erros dos alunos foram agrupados em três categorias: *concetuais*, *procedimentais* e *percetuais.* A última categoria apesar de menos visível nos erros dos alunos emergiu da análise de dados, possivelmente por força do dispositivo utilizado – *PowerPoint* temporizado e que discutirei na síntese. Este estudo pretende apoiar a clarificação dos erros dos alunos através de interações professor/aluno e aluno/aluno, pelo que, sempre que possível, apresento em cada secção excertos de diálogos ocorridos na sala de aula nos dois ciclos de experimentação que possam evidenciar como esta pretensão foi levada à prática por mim e pelas professoras envolvidas no estudo.

O volume de dados recolhidos neste estudo implicou a necessidade de selecionar apenas algumas questões para serem alvo de análise (30 de 105). A seleção destas questões foi realizada seguindo vários critérios: (i) questões com diferentes objetivos; (ii) questões com um maior número de respostas incorretas; (iii) e destas, apenas aquelas onde os erros sejam diferentes dos já analisados; (iv) e questões onde surjam erros cuja análise seja importante para compreender conceções erróneas dos alunos sobre números racionais e suas operações, independentemente do número de respostas corretas, incorretas ou em branco. Estas opções pretendem apoiar a compreensão dos erros mais frequentes dos alunos no cálculo mental com frações, decimais e percentagens e fazer inferências acerca das possíveis razões que levaram os alunos a cometerem determinados erros.

### 8.1.1. Erros em questões com frações

Os alunos das turmas M e L começaram a experiência de ensino com questões de cálculo mental envolvendo apenas a representação fracionária, nas tarefas 1 e 2, e posteriormente nas tarefas 3, extra, 6, 8, 9 e 10 onde outras representações dos números racionais foram envolvidas. Nesta seção analiso apenas questões com a representação fracionária. No total, os alunos resolveram 30 questões com expressões e 3 situações contextualizadas com frações. No Quadro 57 apresento apenas as questões que são alvo de análise nesta secção. A análise dos erros é realizada pela ordem em que as questões surgem nas tarefas (Quadro 57) para que seja possível salientar eventuais semelhanças ou diferenças entre as estratégias dos alunos que conduziram aos erros analisados.

Quadro 57. Questões de cálculo mental analisadas com a representação fracionária.

<table>
<tr><th></th><th>Questões</th><th>Tarefa</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Expressões</td><td>$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$    $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}$    $? - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$<br>$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$    $\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{4}\div ? = \frac{1}{2}$    $?\times\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$    $\frac{3}{4}\div ? = \frac{1}{4}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$</td><td>Extra</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Situações contextualizadas</td><td>A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $\frac{3}{4}l$ de refresco?</td><td>9 ou 10</td></tr>
</table>

O Quadro 58 mostra o número de respostas corretas, incorretas e em branco que os alunos das turmas M e L apresentaram às questões envolvendo a representação fracionária, nos dois ciclos de experimentação. Tendo em conta que o número de respostas corretas, incorretas ou em branco pode não espelhar os reais conhecimentos dos alunos, este quadro apenas pretende apoiar inferências de âmbito mais geral. A análise deste quadro mostra que os alunos apresentaram um maior número de respostas incorretas em questões envolvendo a divisão e multiplicação de duas frações, na adição de duas frações equivalentes a metade (no inicio da experiência) e na adição de frações com denominadores diferentes. As expressões de valor em falta foram aquelas onde surgiu um maior número de respostas incorretas. A situação contextualizada apresenta um número significativo de respostas incorretas (mais de 40% dos alunos em ambas as turmas). Salienta-se o facto de uma grande parte dos alunos não apresentar qualquer resposta, revelando assim alguma dificuldade na resolução da situação.

Quadro 58. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com frações.

| | **Número de respostas** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Corretas | | Incorretas | | Não responde | |
| **Questões** | TM | TL | TM | TL | TM | TL |
| $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ | 9 | 5 | 6 | 7 | 3 | 7 |
| $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}$ | 11 | 8 | 6 | 7 | 1 | 4 |
| $? - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$ | 11 | 2 | 7 | 12 | 0 | 5 |
| $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$ | 16 | 8 | 3 | 7 | 0 | 4 |
| $\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}$ | 10 | 1 | 8 | 17 | 1 | 1 |
| $\frac{1}{4}\div ? = \frac{1}{2}$ | 12 | 12 | 6 | 4 | 1 | 3 |
| $?\times\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ | 2 | 1 | 12 | 9 | 5 | 6 |
| $\frac{3}{4}\div ? = \frac{1}{4}$ | 3 | 2 | 13 | 12 | 3 | 2 |
| $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ | 8 | 6 | 10 | 8 | 2 | 5 |
| $\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$ | 8 | 9 | 11 | 7 | 1 | 3 |
| A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $\frac{3}{4}l$ de refresco? | 2 | 0 | 9 | 8 | 9 | 11 |

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$

A adição destas duas frações com denominadores diferentes, originou alguns erros por parte dos alunos de ambas as turmas, no início da experiência. Isso aconteceu provavelmente porque as suas estratégias se baseavam muito na aplicação de regras memorizadas (de acordo com a análise realizada no Capítulo 7). Com o desenvolvimento da experimentação, estes erros foram sendo ultrapassados por alguns alunos, especialmente pelos que conseguiam de imediato identificar $\frac{2}{4}$ como equivalente a $\frac{1}{2}$.

Apesar de não ter realizado o cálculo de $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ Gonçalo (turma L) apresenta uma estratégia (Quadro 59) que evidencia um entendimento incorreto da operação adição com a representação fracionária (*erro concetual*). O aluno generaliza procedimentos da divisão de frações para a adição, ao mesmo tempo que aplica também procedimentos da adição ao manter os denominadores iguais. Converte uma operação cujo sentido é "juntar" numa outra com o sentido de "retirar". Assim, não reconhece que as frações apresentadas representam a quantidade "metade" e inverte a segunda parcela substituindo a adição pela subtração (procedimento que pode ter sido originado pelo conhecimento da regra "inverte e multiplica" na divisão de frações).

Quadro 59. Erro na questão $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TL** | ***Gonçalo***: Eu não fiz... Pensei assim. Fazia a operação inversa . . . Trocava o 2 com o 4 (invertia $\frac{2}{4}$ para $\frac{4}{2}$) . . . e ficava a subtrair e dava $\frac{3}{2}$. | Concetual | Adição de frações | Representação proposicional |

Como resultado final apresenta a fração $\frac{3}{2}$ que pode ter surgido a partir da subtração de numeradores (1-4 em vez de 4-1) e manutenção de denominadores (procedimento da adição/subtração de frações). Subjacente a esta estratégia, pode estar uma *representação proposicional* onde a generalização de uma proposição verdadeira que o aluno conhece para o caso da divisão de frações, o conduz a uma proposição falsa, originando assim o erro: se $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (verdadeiro) então $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$ (falso).

$\mathbf{\frac{4}{8} + \frac{2}{4}}$

A resolução desta questão, muito semelhante à anterior, originou um número significativo de respostas corretas em ambas as turmas, mas fez surgir dois tipos de erros (Quadro 60) frequentes ao longo dos dois ciclos de experimentação. Originou ainda outro erro, apresentado por Luís (turma M), que não sendo comum, também surgiu na turma L e originou uma exploração por parte de ambas as professoras e que referi no capítulo referente à experimentação.

Quadro 60. Erro na questão $\frac{4}{8} + \frac{2}{4}$**.**

| | | **Tipo de Erro** | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Marta:*** A mim deu-me $\frac{6}{4}$ mas já percebi porque é que está mal. Porque eu quando estive a reduzir os $\frac{4}{8}$ esqueci-me que o 4 também tínhamos que... Depois quando fui a somar esqueci-me que o 4 também estava reduzido. | Procedimental | Cálculo de fração equivalente | Imagem mental |
| **TM** | ***Luís*** : Eu fiz 4×4. Fiz numerador vezes denominador que deu 16 e depois fiz 8×2 que é a mesma coisa numerador vezes denominador que deu 16 e depois fui tornar na forma irredutível. E deu-me 1. | Concetual | Adição de frações/ Relação entre operações | Representação proposicional |
| **TL** | ***Bernardo***: $\frac{6}{12}$ eu esqueci-me e somei 4 +2 e 8 +4. | | Adição de frações/ Conceito de fração | Imagem mental |

As estratégias apresentadas por Marta (turma M) e Bernardo (turma L) revelam erros *procedimentais* e *concetuais*, respetivamente, que surgiram por diversas vezes em ambas as turmas e nas explicações de diferentes alunos. A estratégia de Marta evidencia um raciocínio correto para a resolução da questão, mas no cálculo da fração equivalente a $\frac{4}{8}$ com denominador 4, a sua atenção centrou-se apenas no denominador esquecendo que necessitaria de realizar cálculos com o numerador, como ela própria reconhece na sua explicação. A representação mental subjacente a esta sua estratégia pode ter sido uma *imagem mental* que foca a sua atenção nos denominadores da fração, uma vez que sabe que para adicionar deve ter duas frações com denominadores iguais.

A estratégia de Bernardo revela uma presença muito forte da adição de números naturais, pelo que a *imagem mental* de factos como 4+2=6 e de 8+4=12 provavelmente se sobrepôs ao conhecimento que possui, certamente pouco sólido, como adicionar frações com denominadores diferentes. O aluno comete um erro *concetual* ao não reconhecer que as frações representam a quantidade "metade" e ao operar com frações como se estas representassem números naturais separados por um "traço", ignorando que na adição de frações, se devem adicionar apenas numeradores quando os denominadores são iguais (apresentam a mesma medida das partes a juntar). Este procedimento revela algum desconhecimento acerca do próprio conceito de fração e do significado de numerador e denominador. Este é um erro comum na adição/subtração de frações e que foi surgindo ao longo da experimentação nos ciclos I e II. Por exemplo, no cálculo de $2{,}2-? = \frac{1}{5}$ na tarefa 9, Rui (também da turma L), volta a cometer o mesmo erro que o colega. O aluno, depois de converter 2,2 em $\frac{22}{10}$ subtrai numeradores e denominadores ($\frac{22}{10} - \frac{1}{5} = \frac{21}{5}$).

Luís (turma M) apesar de apresentar um resultado correto, comete um erro *concetual.* Recorre à multiplicação "cruzada" (numerador de uma fração vezes denominador da outra e vice-versa) para adicionar duas frações equivalentes a $\frac{1}{2}$, mas esta estratégia não é válida uma vez que só se aplica a frações deste tipo. Luis converte uma adição numa multiplicação, provavelmente influenciada pela mesma regra que pode ter influenciado Gonçalo na resolução da expressão anterior (inverte e multiplica), ignorando a relação que existe entre estas duas operações. O aluno deveria de ter reconhecido, por exemplo, que $\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$ e assim poderia ter recorrido à multiplicação $2 \times \frac{2}{4}$. Na base desta estratégia pode ter estado uma *representação proposicional* onde a generalização de uma proposição verdadeira conhecida para a divisão de frações, origina uma falsa ao ser aplicada à adição de frações: se $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (verdadeiro) então $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (falso).

Esta estratégia também surgiu na turma L, mas apenas na tarefa extra, a propósito do cálculo de $\frac{7}{14} + \frac{1}{2}$. Tanto Margarida (ciclo I) como Laura (ciclo II) aproveitaram esta estratégia não válida que conduzia a um resultado correto, para explorar com os alunos a adição de frações equivalentes (e.g., $\frac{1}{4} + \frac{2}{8}$), mas não equivalentes a $\frac{1}{2}$ para aferir a validade desta estratégia e discutir de forma mais aprofundada os resultados obtidos.

$? - \mathbf{\frac{5}{10}} = \mathbf{\frac{3}{10}}$

No cálculo de $? - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$, a estratégia de Bruno evidencia um erro *concetual* (Quadro 61). O aluno subtrai numeradores e mantém denominadores, de acordo com os procedimentos para a adição/subtração de frações, mas revela não compreender a propriedade da subtração envolvida (aditivo= subtrativo + resto).

Quadro 61. Erro na questão $? - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Bruno***: Mantive o denominador e só subtrai os numeradores e deu-me 2. Deu-me $\frac{2}{10}$. | Concetual | Propriedade das operações | Representação proposicional/ Imagem mental |

Subjacente a esta estratégia de Bruno, pode ter estado uma *representação proposicional* baseada numa proposição falsa: se $? - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$ então $? = \frac{5}{10} - \frac{3}{10}$ (falso). O conhecimento que possui sobre a adição de números naturais pode ter igualmente influenciado esta sua opção, levando-o a subtrair o menor numerador do maior. Neste caso, pode ter recorrido também a uma *imagem mental* de 5>3. Este tipo de erro surgiu com alguma frequência em expressões envolvendo a subtração (com frações ou com numerais decimais) e cujo valor em falta era o aditivo, o que revela falta de conhecimentos acerca das propriedades das operações, neste caso da subtração.

### $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

A multiplicação e divisão de frações, como referi anteriormente, são as operações onde os alunos apresentaram um maior número de respostas incorretas. Na determinação de $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$, Rúben (turma M) e Rui (turma L) cometem erros *concetuais* e Ana (turma M) um erro *procedimental* (Quadro 62). A estratégia de Rúben mostra que este generalizou procedimentos das operações divisão e adição/subtração de forma incorreta para a operação multiplicação. Na multiplicação de duas frações inverte o multiplicando ($\frac{3}{4}$ para $\frac{4}{3}$) – procedimento vindo em parte do algoritmo da divisão "inverte e multiplica" uma vez que inverte a primeira fração e não a segunda – e realiza o cálculo com os numeradores mantendo denominadores – procedimento da adição/subtração de frações.

Quadro 62. Erros na questão $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Rúben***: Usei a regra e troquei o 4 pelo 3 e depois multipliquei e deixei o denominador igual e só fiz o 4×2 que me deu $\frac{8}{3}$. | Concetual | Multiplicação de frações | Representação proposicional |
| **TM** | ***Ana***: Eu vi logo que era $\frac{6}{12}$ mas depois ao tornar irredutível é que me baralhei. Pus $\frac{3}{6}$mas depois pus $\frac{1}{3}$e era $\frac{1}{2}$. | Procedimental | Cálculo de fração equivalente | Imagem mental |
| **TL** | ***Rui***: Deu-me uma unidade . . . Porque tipo risquei o 2 e o 4. | Concetual | Aplicação de propriedades das operações | |

Rúben revela um conhecimento concetual e procedimental frágil das operações com frações pois apresenta uma estratégia baseada numa miscelânea de procedimentos de diversas operações. Subjacente a esta estratégia pode ter estado uma *representação proposicional* onde a generalização do conhecimento de que, para adicionar frações necessita sempre de ter denominadores iguais, o pode ter levado a inverter o multiplicando: se $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ (verdadeiro) então $\frac{a}{b}\times\frac{c}{a}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{a}=\frac{b\times c}{a}$.

A explicação de Ana remete-nos para um erro *procedimental*: A fração $\frac{6}{12}$ é reveladora de que multiplicou numeradores e denominadores, o que era uma das possíveis estratégias de cálculo, apresentando assim uma estratégia correta de resolução. No final, a aluna reconhece que o seu erro se centrou no cálculo incorreto da fração equivalente a $\frac{6}{12}$. Subjacente a este erro de Ana, pode ter estado uma *imagem mental* da relação entre numerador e denominador de uma fração que representa a quantidade "metade". A aluna calcula corretamente a primeira fração equivalente ($\frac{3}{6}$) mas, no cálculo da segunda fração equivalente a $\frac{6}{12}$ possivelmente focou a sua atenção na relação de metade entre denominadores das frações equivalentes e não entre numerador e denominador da mesma fração. Isto é, numa fração equivalente a metade, o numerador é metade do denominador (como alguns alunos generalizaram com frequência nas discussões de sala de aula) e neste caso, Ana pode ter assumido o denominador 3 (de $\frac{1}{3}$) como sendo metade do denominador 6 (de $\frac{3}{6}$) o que fez com que a fração resultante $\frac{1}{3}$ não satisfizesse a condição de numerador ser metade do denominador. No final a aluna reconhece que o resultado deveria ser $\frac{1}{2}$. Este erro de tipo procedimental, relativo ao cálculo de frações equivalentes associado a uma estratégia de resolução da expressão correta, surgiu algumas vezes na turma M ao longo da experiência.

A estratégia de Rui é reveladora de que, por vezes, o conhecimento de regras sem compreensão concetual pode dar origem a determinados erros. A vulgar "lei do corte" que envolve as propriedades comutativa e elemento neutro da multiplicação, apesar de envolvidas neste processo, não foram devidamente compreendidas pelo aluno. Este poderia ter recorrido ao "riscar" de números, tendo subjacentes as propriedades que referi, mas assim não "riscaria" 2 e 4, e antes os dois algarismos 3 uma vez que $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times3}{4\times3}=\frac{2}{4}$ com $\frac{3}{3}$ como elemento neutro da multiplicação. A *imagem mental* de frações que representam a unidade também vai marcando visualmente os alunos à medida que se apropriam do seu significado e representação. Rui pode ter centrado a sua atenção na busca de uma fração onde numerador é igual ao denominador ($\frac{3}{3}$) levando-o a "riscar" 2 e 4 sem compreensão do cálculo que estava a realizar.

Dois dos erros apresentados no Quadro 62 parecem ter sido influenciados por imagens mentais de conhecimentos sobre números e operações que visualmente vão marcando os alunos. No entanto, o conhecimento pouco consistente que possuem sobre procedimentos e propriedades das operações não permite aos alunos contrariarem estas imagens mentais que acabam por estar na origem dos erros cometidos, certamente muitas delas de forma inconsciente no momento do cálculo mental.

$\mathbf{\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}}$

A explicação de Diogo (turma L) para o cálculo de $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$ evidencia um erro *concetual* (Quadro 63).

Quadro 63. Erro na questão $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TL** | ***Diogo***: O meu resultado deu $\frac{2}{6}$. Porque eu pensei assim. Pensei 4 rebuçados a dividir por duas pessoas. Dava 2, 2. $\frac{2}{6}$ . . . Os denominadores são iguais e fica na mesma. | Concetual | Divisão de frações | Imagem mental/ Representação proposicional |

Diogo parece ter como ponto de partida uma *imagem mental* da sua experiência com operações com números naturais, uma vez que recorre a um contexto de divisão equitativa de rebuçados. Assim, divide apenas os numeradores das frações mantendo os denominadores. No entanto, esta sua opção pode também ter subjacente uma *representação proposicional* baseada na generalização de procedimentos da adição/subtração de frações (opera com numeradores e mantém denominadores) para a divisão: se $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ (verdadeiro) então $\frac{a}{c}\div\frac{b}{c}=\frac{a\div b}{c}$ (falso). Diogo mostra conhecer a divisão como partilha equitativa no conjunto dos números naturais, mas não consegue fazer uma extensão deste conhecimento para a divisão de frações onde $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{6}$ representam dois números e não 4 números independentes. Este raciocínio de Diogo poderia ser válido se o contexto em que se baseou não fosse a quantidade de rebuçados, mas antes partes de dois todos divididos no mesmo número de partes em que o conceito de divisão enquanto agrupamento seria o mais adequado (e.g., Quantas fatias de $\frac{2}{6}$ de um bolo, é possível fazer com $\frac{4}{6}$ desse mesmo bolo?). Em ambas as turmas foram vários os alunos que apresentaram uma estratégia semelhante à de Diogo em questões onde surgiu a divisão de duas frações com denominadores iguais ou múltiplos um do outro. No entanto, apenas Diogo recorreu a um contexto conhecido e frequentemente usado para a divisão de números naturais.

No final da experiência, quando voltou a surgir a divisão de duas frações com o mesmo denominador, o número de respostas corretas dos alunos em ambas as turmas melhorou embora na turma L se continuasse a verificar um erro semelhante ao de Diogo. Na turma M, procurando aplicar a regra "inverte e multiplica", houve pelo menos um aluno que inverteu o dividendo em vez do divisor.

### $\mathbf{\frac{3}{4}\times ?=1}$

Acácio apresenta uma explicação (Quadro 64) onde é possível perceber que cometeu um erro *concetual* ao comparar a multiplicação de duas frações iguais a $\frac{3}{4}$ com a adição de duas frações iguais a $\frac{1}{2}$, assumindo que os resultados seriam iguais. Subjacente a esta sua estratégia pode estar uma *representação proposicional*, onde a generalização de um facto numérico conhecido de Acácio baseado numa proposição verdadeira origina uma proposição falsa, levando-o a cometer este erro: se $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ (verdadeiro) então $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=1$ (falso).

O cálculo envolvendo $\frac{1}{2}$ e outras frações ou representações equivalentes esteve muito presente na experiência uma vez que calcular com frações que representem a quantidade "metade" é essencial num nível básico de cálculo mental.

Quadro 64. Erro na questão $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \times ? = \mathbf{1}$.

| | Aluno/Estratégia | Tipo de Erro: Categoria | Subcategoria | Representação mental |
|---|---|---|---|---|
| **TL** | ***Acácio***: Eu pus $\frac{3}{4}$ mas eu não sei se é. Porque na aula passada o resultado de metade com metade deu 1 e eu acho que é este. | Concetual | Propriedade das operações | Representação proposicional |

Contudo, na turma L esta exploração parece ter criado representações mentais fortes da adição de duas metades, de tal forma que alguns alunos a generalizaram para outras situações de cálculo sem qualquer reflexão prévia. Por ter percebido isto, a professora Laura em diálogo com Acácio tentou que este reformulasse a sua estratégia, clarificando e corrigindo o seu erro:

> ***Professora Laura***: Como na aula passada fizemos metade mais metade, agora ter aqui um vezes ou ter uma soma é a mesma coisa? E o $\frac{3}{4}$ é metade? É equivalente a metade?
>
> ***Acácio***: (Diz não com a cabeça)
>
> ***Professora Laura***: Não, pois não!? Então achas que essa estratégia foi bem?
>
> ***Acácio***: Não stora.
>
> ***Professora Laura***: Então como é que farias agora?
>
> ***Acácio***: Ó stora posso perguntar uma coisa?
>
> ***Professora Laura***: Podes.
>
> ***Acácio***: Punha 4 em cima e o 3 em baixo e depois chega ao 4 ou ao 3 e com aquela coisa do inverso que a stora disse e depois dava 1... Está ai o 3 e o 4 e depois riscava o 3 [e o] 3 ou o 4 [e o] 4 dava 1 ou não?
>
> ***Professora Laura***: $\frac{3}{3}$ quanto é que é?
>
> ***Acácio***: Dá 1 stora.

Laura questiona Acácio no sentido de este se consciencializar de que “metade” e $\frac{3}{4}$ não representam a mesma quantidade e desafia-o a apresentar uma nova estratégia. Acácio aceita o desafio e mostra saber que o produto de um número pelo seu inverso dá 1, propriedade envolvida nesta questão de cálculo mental e que pretendia que os alunos reconhecessem, embora a sua estratégia não reflita este conhecimento.

A estratégia de Acácio, que surgiu noutros momentos do ciclo II e nas explicações de outros alunos, sugere que a dificuldade de compreensão de alguns conceitos e relações ou a insegurança de os aplicar, leva os alunos a memorizarem factos (como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$) e a generalizá-los de forma apressada sem que reflitam acerca dos objetos matemáticos em causa, apesar de possuírem conhecimentos que permitem resolver a expressão de cálculo mental apresentada, como foi neste caso. O facto de os alunos terem que calcular o valor de uma expressão em 15 segundos pode também ter originado erros deste tipo por falta de tempo para refletir e relacionar os números envolvidos. No entanto, quando existe uma consciencialização do erro cometido, por parte dos alunos, estes referem-no de imediato nas suas explicações, como verifiquei em inúmeras intervenções dos alunos nos dois ciclos de experimentação, pelo que a influência do dispositivo de apresentação da tarefa perde relevância.

$\mathbf{\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}}$

A estratégia de João (Quadro 65) ilustra um tipo de erro *concetual* que também surgiu diversas vezes em ambas as turmas, mas com maior incidência na turma L. Como no caso da adição e multiplicação se pode recorrer às operações inversas para calcular um dos valores em falta, os alunos assumem que isso também é possível no caso da divisão e da subtração o que não é verdade pois estas operações não gozam da propriedade comutativa. Esta foi uma questão largamente discutida na turma L.

João mostra conhecer que existe uma relação entre as operações de divisão e multiplicação e pode ter generalizado o conhecimento que possui relativamente à relação da multiplicação com a divisão. Esta generalização pode ter na sua origem uma *representação proposicional* em que uma proposição verdadeira dá origem a uma proposição falsa: se $a \times b = c$ com $c \div b = a$ e $c \div a = b$ (verdadeiro) então para $a \div b = c$ , $a \times c = b$ (falso). João assume, na sua explicação, que o divisor é fruto do produto entre o dividendo e o quociente, mostrando desconhecer ou ignorar a relação que existe entre dividendo, divisor e quociente numa divisão. Por norma, os alunos conhecem a propriedade fundamental da divisão exata como dividendo=divisor×quociente e da divisão inteira como dividendo=divisor×quociente+ resto, mas nem sempre têm a oportunidade de refletir e discutir a relação entre, por exemplo, o divisor o dividendo e o quociente, podendo ficar a noção de que se recorre à multiplicação para calcular o divisor.

Quadro 65. Erro na questão $\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***João***: Para descobrir a parcela que está em falta pode-se, onde está o sinal de dividir, pode-se trocar pelo sinal de vezes e põe-se o resultado no sítio da parcela em falta $\left[\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right]$. | Concetual | Relação entre dividendo, divisor e quociente | Representação proposicional |

Esta estratégia promoveu uma discussão interessante na sala de aula, onde os próprios colegas confrontaram João com as suas opções, levando-o a perceber o seu erro:

***Ana***: Então tu fizeste $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$?

***João***: Sim

***Ana***: Mas neste caso não podíamos fazer $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$ que dava $\frac{1}{2}$?

***João***: Não, tens que inverter para fazer uma conta de dividir.

***Ana***: Mas eu não fiz assim, eu fiz outro raciocínio.

***Investigadora***: Ana, então explica lá o teu raciocínio.

***Ana***: Como eu sei que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ dá $\frac{1}{4}$ pus logo $\frac{1}{2}$.

***Alguns alunos***: Eu também.

***João***: Para dar $\frac{1}{2}$... Se puséssemos ali $\frac{1}{2}$, tínhamos de ir inverter depois $\frac{1}{2}$ e multiplicar, que dava 1×2, 2 e 4×1, 4.

***Investigadora***: E... $\frac{2}{4}$ ?

***Ivo***: $\frac{2}{4}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$.

(…)

***João***: Já sei onde é que errei . . . Este processo... [resulta se] a parcela em falta fosse a primeira parcela (o dividendo).

Neste diálogo, Ana começa por questionar João confrontando-o com uma estratégia nova. João centrado numa estratégia baseada na aplicação de regras memorizadas sente necessidade de realizar todos os cálculos para confirmar se Ana tem razão. No final consegue perceber que a sua estratégia era adequada para o cálculo do dividendo e não do divisor. O diálogo desenrola-se maioritariamente entre alunos, intervindo eu pontualmente para dar a palavra a Ana ou para focar João na análise da fração $\frac{2}{4}$.

Este diálogo mostra como a interação entre alunos apoia a clarificação de erros durante as discussões coletivas, não sendo necessário ao professor exercer um papel de liderança no processo. Os alunos questionam, confrontam ideias e raciocínios de forma a validarem as estratégias apresentadas na sala de aula, dando oportunidade aos colegas de refletirem e compreenderem os seus erros.

$?\times \boldsymbol{\frac{5}{6}} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

Na discussão do cálculo de $?\times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$, a explicação de João (Quadro 66) mostra que este aluno ainda não compreendeu completamente a relação entre divisão e multiplicação e continua com um erro *concetual* por resolver. Não apresenta dificuldades no cálculo de $\frac{5}{6} \div \frac{1}{6}$ e parece ter compreendido no caso anterior por que não pode recorrer à multiplicação para calcular o divisor, mas neste caso a relação entre dividendo, divisor e quociente de uma divisão e entre fatores e produto da multiplicação (envolvendo os mesmos números) parece ainda não estar devidamente esclarecida para si.

A noção, que vem da divisão com números naturais, em que o dividendo deve ser superior ao divisor, pode ter levado João a generalizar este conhecimento para a divisão com frações levando-o a efetuar a operação $\frac{5}{6} \div \frac{1}{6}$ em vez de $\frac{1}{6} \div \frac{5}{6}$. Assim, a sua estratégia pode ter sido influenciada por uma *representação proposicional* to tipo; se

$a \times b = c$ e $b > c$, então $a = b \div c$. Perante a estratégia de João, a professora Margarida desafia a turma a ser crítica, não referindo se esta estratégia está correta ou incorreta. Esta foi uma postura que ambas as professoras assumiram nos dois ciclos de experimentação.

Quadro 66. Erro para a questão $? \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***João***: É 5. $\frac{5}{6} \div \frac{1}{6}$ . . . Então, cortam-se os dois 6 e põe-se o 5 no numerador e o 1 no denominador. | Concetual | Relação entre operações inversas | Representação proposicional |

O diálogo que Margarida desenvolve com os alunos é longo, pelo que apenas apresento os excertos que me parecem mais relevantes para percebermos como geriu a clarificação deste erro na sala de aula:

> ***Professora Margarida***: Agora vou fazer uma pergunta à turma, só. $\frac{5}{6}$ que ele resolveu dividir por $\frac{1}{6}$ para saber o outro fator. Ele tem um fator, dividiu pelo produto para saber o outro fator. Eu só pergunto se o raciocinio dele está correto e se a conta que ele fez está correta.
>
> ***Pedro***: A conta está correta, mas o raciocinio eu penso que... Que essa teoria não dá certa pois é impossivel ser 5, porque se fosse 5 dava um número maior.
>
> ***Alunos***: Pois é é impossivel
>
> (…)
>
> ***Professora Margarida***: Se eu quero um fator da multiplicação o que é que eu faço? Pensem num exemplozinho pequenino. 2×3?
>
> ***João***: 2×3, seis
>
> ***Professora Margarida***: Seis. Se eu quiser o 2, que ele desaparece, que operação é que eu faço? Que conta é que eu faço? Multiplico o 6 pelo 3?
>
> ***João***: Não
>
> ***Professora Margarida***: ah, faço o quê?

***João***: Divide.

***Professora Margarida***: Divido o quê? O produto por um dos fatores? Ele em vez de ter feito aquela multiplicação... estão a ouvir? Ele resolveu pegar no $\frac{5}{6}$ e dividir por $\frac{1}{6}$. Porquê? Eu até sei porque é que o João fez isso.

***João***: Eih!

***Professora Margarida***: Tu tinhas era de pegar em $\frac{1}{6}$ e dividir por $\frac{5}{6}$. Não é? Ma ele lá olhou para quele número e achou que era maior e dava-lhe jeito.Olhem que as frações não é por terem numerador e denominador maiores que elas são...valem mais. E aqui também isso não é problema, está bem? Ora afinal só para rematar. Qual é o resultado certo, afinal?

***Alunos***: $\frac{1}{5}$.

(…)

***João***: É ao contrário!

Ao longo da discussão, Margarida vai dirigindo questões à turma e a João, intercalando questionamento com afirmações que lhe parecem importantes para a compreensão da situação por parte dos alunos, incentivando-os a recorrerem a exemplos mais simples para poderem compreender as relações entre os fatores e o produto de uma multiplicação. No final faz uma interpretação do erro de João e mostra à turma que as operações com números racionais não se regem pelas mesmas regras que as dos números naturais. Face ao questionamento da professora e sentido crítico da intervenção de Pedro, João percebe que devia efetivamente de ter dividido $\frac{1}{6}$ por $\frac{5}{6}$ e não o contrário como fez.

$$\mathbf{\frac{3}{4} \div ? = \frac{1}{4}}$$

O cálculo desta expressão fez surgir um erro *concetual* por parte de José que também surgiu na turma L. A simples resposta "$\frac{3}{4}$", por parte do aluno fez com que Margarida percebesse o erro que estava em causa e desencadeasse com este aluno um diálogo para o fazer perceber que um número a dividir por ele próprio é sempre 1. A resposta de José (Quadro 67) mostra que este aluno se centrou apenas nos numeradores das frações uma vez que os denominadores eram iguais, requisito supostamente indispensável para a adição/subtração de frações. Para isto pode ter contribuído a *imagem* *mental* de um procedimento (mantem denominadores ao adicionar/subtrair frações) e de um facto numérico que conhece ($3 \div 3 = 1$) e que usou para o caso dos numeradores, ignorando a importância dos denominadores uma vez que eram iguais.

Quadro 67. Erro na questão $\frac{3}{4} \div ? = \frac{1}{4}$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| **Aluno/Estratégia** | | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***José*** : $\frac{3}{4}$ | Concetual | Relação entre divisor, dividendo e quociente | Imagem mental |

De notar que o erro na manutenção de denominadores iguais na divisão de duas frações já tinha sido identificado e referido a propósito do cálculo de $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$ por parte de Diogo da turma L. Isto sugere que a transição de procedimentos de adição/subtração para procedimentos de divisão de frações é de difícil compreensão e apreensão por parte dos alunos, uma vez que com frequência, misturam procedimentos das diversas operações. Os procedimentos relativos à adição/subtração de frações e à divisão e multiplicação são diferentes, pelo que uma aprendizagem demasiado centrada na aplicação de procedimentos, sem compreensão do sentido de cada uma das operações, pode originar este tipo de erros.

O diálogo que Margarida estabelece com José tem como objetivo fazê-lo refletir acerca da divisão de dois números iguais, tal como nos apresenta o aluno, recorrendo, mais uma vez a exemplos mais simples:

> ***Professora Margarida***: Pusestes $\frac{3}{4}$.Quanto é que dá $\frac{3}{4} \div \frac{3}{4}$? Quanto é que dá $2 \div 2$?
>
> ***José***: 1
>
> ***Professora Margarida***: Ah, dois números iguais, um a dividir pelo outro dá um. Se distribuis a mesma quantidade pela mesma quantidade dá 1. Sim? Era ver logo que tinhas mal. Agora pensa, mas vais responder José, pensa num relógio, pensa na piza, pensa... Este é um daqueles casos que podemos ir a um conhecimento que temos e pensar. Se tenho $\frac{3}{4}$ de uma coisa, vou dividi-la não sei por quanto e vai parar $\frac{1}{4}$ a cada um, por quanto é

que eu tenho de dividir? $\frac{3}{4}$ quantos quartos são?

***José***: Eu acho que é 3.

***Professora Margarida***: Então, por quanto é que eu tenho de dividir $\frac{3}{4}$ para dar $\frac{1}{4}$?

***José***: 3.

Neste diálogo Margarida, incentiva José a modelar a situação recorrendo a contextos conhecidos (relógio e piza) e questiona-o de modo a que este perceba a relação entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ : "$\frac{3}{4}$ quantos quartos são?" Por fim, José parece ter compreendido esta relação e indica o resultado correto.

Um erro semelhante a este, onde os alunos não entendem que a divisão de dois números iguais dá 1, surgiu algumas vezes nos dois ciclos de experimentação, embora com maior incidência no ciclo II. Por exemplo, surgiu no caso de Acácio da turma L que analisei a propósito do cálculo de $\frac{3}{4} \times ? = 1$ e de Diogo, da mesma turma, para o cálculo de $\frac{4}{8} \div \frac{1}{2}$. Diogo reconhece que $\frac{4}{8}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$, mas assume que $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ porque $1 \div 1 = 1$: "A mim deu-me $\frac{1}{2}$ . . . Porque $\frac{4}{8}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ a dividir por $\frac{1}{2}$ dá $\frac{1}{2}$. É como se fosse 1:1 dava 1". Este tipo de explicações leva-me a questionar se a imagem mental de alguns factos numéricos conhecidos dos alunos, não condicionam por vezes as suas estratégias, quando estas não são suficientemente refletidas como no caso de Acácio.

### $\mathbf{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$

Esta expressão envolve frações que representam dízimas infinitas periódicas e, por isso, não foram muito usadas na experiência de ensino. Contudo, o facto de originarem uma dízima finita ($\frac{1}{2}$) pareceu-nos uma boa oportunidade para perceber como os alunos iriam calcular o seu valor. Em ambas as turmas, surgiram erros *procedimentais* como o que Marta revelou ter cometido no cálculo de $\mathbf{\frac{4}{8} + \frac{2}{4}}$. Os alunos apresentaram estratégias que evidenciam o cálculo de frações com o mesmo denominador, mas a aplicação incorreta de um facto numérico no cálculo de frações equivalentes ou a não multiplicação de um dos termos da fração (essencialmente do numerador) conduziu-os a soluções incorretas. A estratégia de Luís (Q uadro 68) mostra que este mantem numeradores e adiciona denominadores revelando não compreender o que representa uma fração e qual o significado e relação entre numerador e denominador. Um erro claramente *concetual*. Subjacente a esta estratégia pode estar uma *representação proposicional* onde a generalização de um procedimento baseado numa proposição verdadeira origina uma falsa: se $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ (verdadeiro) então $\frac{b}{c}+\frac{b}{a}=\frac{b}{c+a}$ (falso).

Quadro 68. Erro na questão $\mathbf{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Luís***: Eu lembro-me que às vezes os denominadores ficam iguais pensei que os numeradores podiam ser e deu-me $\frac{1}{9}$. | Concetual | Conceito de fração | Representação proposicional |

A propósito da estratégia de Luís e da importância e significado do denominador de uma fração, surge na aula uma discussão onde João em diálogo comigo, explica o seu entendimento sobre este assunto:

> ***João***: Porque se vamos estar a somar terços com sextos, como a unidade de medida é diferente, vai-nos dar outro número. Porque não se pode somar metros com centímetros.
>
> ***Investigadora***: O que é isso da unidade de medida ser diferente?
>
> ***João***: Porque $\frac{1}{3}$ é diferente de $\frac{1}{6}$.
>
> ***Investigadora***: Sim, o que é que é isso do ser diferente? É maior ou menor, já agora.
>
> ***João***: Têm resultados diferentes. $\frac{1}{6}$ é mais pequeno do que $\frac{1}{3}$.
>
> ***Investigadora***: $\frac{1}{6}$ é mais pequeno.
>
> ***João***: E se formos a somar $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, temos de transformar em unidades de medidas iguais porque se não, não dá para fazer a conta. Porque não se pode somar com unidades de medidas diferentes.
>
> ***Investigadora***: Qual é o significado de um denominador de uma fração?

> ***João***: É a unidade de medida. Quantas partes é que está dividido o nosso … [todo].

Considero interessante o facto de João entender o denominador de uma fração como "a unidade de medida" e como este expressa a necessidade de ter a mesma unidade de medida para adicionar frações, justificando com o facto de "não se pode somar metros com centímetros", um conhecimento que tem das operações com unidades de medida de comprimento. Este foi um dos momentos ricos das discussões em sala de aula, proporcionado pelos alunos da turma M, onde o conhecimento matemático de um aluno foi mais uma vez partilhado com a turma.

### $\frac{1}{3}$ *de* $\frac{1}{3}$

No cálculo de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ João comete um erro *procedimental* e Diogo um erro *concetual* (Quadro 69). João (turma M) reconhece que deve multiplicar ambas as frações e o seu erro resulta da aplicação incorreta de factos numéricos. Subjacente a esta situação pode estar a *imagem mental* de 3+3 que se sobrepõe à de 3×3 levando o aluno a indicar o mesmo resultado 6 para o segundo caso. Diogo (turma L) apresenta-nos uma expressão equivalente à inicial ( $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \div 3$) e um resultado incorreto que não é mais do que uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$. O resultado que apresenta leva-me a questionar o modo como Diogo concebe a divisão de uma fração por um número natural, uma vez que multiplica o numerador e o denominador por 3, calculando assim uma fração equivalente.

Quadro 69. Erros na questão $\frac{1}{3}\,de\,\frac{1}{3}$.

| | | **Tipo de Erro** | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***João***: Um sobre seis. Enganei-me fiz 1×1, 1 e 3×3 deu-me 6. | Procedimental | Aplicação incorreta de factos numéricos | Imagem mental |
| **TL** | ***Diogo***: $\frac{3}{9}$ . . . dividi $\frac{1}{3}$ por 3. | Concetual | Multiplicação e divisão de frações | Representação proposicional |

A estratégia de Diogo pode ter subjacente uma *representação proposicional* baseada na divisão de duas frações (multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor) uma vez que refere que: "dividi $\frac{1}{3}$ por 3" – divide o multiplicando pelo inverso do multiplicador: se $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (verdadeiro) então $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \div 3$ e $\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3}$ (falso). A estratégia deste aluno alerta-nos para a necessidade de se explorar em sala de aula a equivalência entre expressões para que os alunos possam compreender a relação que existe entre estas e entre diversos elementos de uma operação. Esta exploração irá mais tarde apoiar a aprendizagem da Álgebra, nomeadamente a manipulação simbólica de fórmulas e expressões que envolvam letras. A não compreensão destas relações leva a que diversas vezes os alunos generalizem conceitos e propriedades das operações de forma incorreta, como a aplicação da propriedade comutativa na subtração.

**Situação dos copos de refresco**

A situação dos copos de refresco pode ser resolvida recorrendo à expressão $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$. Pedro (turma M) apresenta-nos uma estratégia onde comete um erro *concetual* e Diogo (turma L) um erro *procedimental* (Quadro 70). Pedro apresenta um raciocínio válido e que envolve uma relação parte todo ("um litro era 100. $\frac{1}{8}$ do litro é 20"), embora incorreta e a divisão do todo e da parte pelo mesmo valor ("transformei o 100 em 1. Tirei dois zeros ao 100 e tirei dois zeros ao 20").

No entanto, Pedro considera 0,2 como sendo uma representação equivalente a $\frac{1}{8}$, mostrando que a equivalência entre representações não está devidamente compreendida. Esta estratégia parece ter subjacente uma *representação proposicional* em que uma proposição falsa dá origem a uma verdadeira do ponto de vista matemático, mas que não é solução para a situação apresentada: se $\frac{1}{8} = 0{,}2$ (falso) então $0{,}2 \times 3$ é aproximadamente 0,75 (verdadeiro).

Diogo apresenta uma explicação complexa e adequada à resolução da situação, mostrando conhecer a equivalência entre representações do mesmo tipo: "$\frac{4}{8}$ é $\frac{1}{2}$" e entre diferentes representações: "$\frac{2}{8}$ equivale a $\frac{1}{4}$ que equivale a 25%". No final bastava-lhe adicionar $\frac{4}{8}$ com $\frac{2}{8}$ para encontrar o número correto de copos de sumo que precisaria. O facto de referir que "já tinha imaginado um cheio" levou-o a considerar 5 copos e não 6. A complexidade da explicação de Diogo, não permite identificar a representação mental que pode ter estado na base da sua resposta, uma vez que este apresenta um raciocínio adequado do qual poderia ter inferido o resultado correto.

Quadro 70. Erros na situação dos copos de refresco.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Pedro***: Imaginei que um litro era 100. $\frac{1}{8}$ do litro é 20 . . . Depois transformei o 100 em 1. Tirei dois zeros ao 100 e tirei dois zeros ao 20. Deu-me 0,2. Depois fui somando 0,2. Cabia lá no 75 [0,75] três 0,2. $3 \times 0{,}2$.E por isso deu-me 3 copos. | Concetual | Equivalência entre representações | Representação proposicional |
| **TL** | ***Diogo***: [5 copos] então tínhamos $\frac{1}{8}$. $\frac{4}{8}$ é $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ que equivale a 50%. Então já temos esse $\frac{1}{2}$, falta-nos 25%. Então $\frac{2}{8}$ equivale a $\frac{1}{4}$ que equivale a 25%. Então já ai tínhamos obtido 75 [%] . . . Então eu juntei 4 que era para chegar a $\frac{1}{2}$ e depois não sei o que é que eu pensei que já tinha imaginado um cheio depois foi só juntar mais 1 para chegar aos $\frac{2}{8}$. | Procedimental | Valores não considerados | Não identificada |

### 8.1.2. Erros em questões com numerais decimais

A introdução da representação decimal na experiência de ensino surgiu na tarefa 3 em conjunto com a representação fracionária e posteriormente sozinha nas tarefas 4 e 5 (ciclo I) e 6 (ciclo II). A partir do meio da experiência, em ambos os ciclos de experimentação, surgiu sempre em questões que envolviam outras representações dos números racionais.

Os alunos resolveram 22 expressões envolvendo numerais decimais e 6 situações contextualizadas. Destas apenas serão analisadas as que apresento no Quadro 71 e que de algum modo evidenciam erros diferentes dos discutidos na representação fracionária.

Quadro 71. Questões de cálculo mental analisadas com a representação decimal.

| **Questões** | | **Tarefa** |
|---|---|---|
| Expressões | $? -4,3 = 0,5$ $\quad 0,6 + 0,04$ | 4 |
| | $25,5 \times ? = 5,1$ $\quad 4,2 \times 0,2$ $\quad 0,6 \times 0,30$<br>$2,1 \div ? = 8,4$ $\quad 0,14 \div 0,2$ $\quad ? \times 0,5 = 30$ | 5 ou 6 |
| | $0,75 \div ? = 3$ | 9 ou 10 |
| Situações contextualizadas | A Rita construiu um cubo em que a área da base era $0,36\ m^2$. Qual a medida do lado? | 5 ou 6 |

O Quadro 72 apresenta o número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L a questões envolvendo apenas e representação decimal. A análise deste quadro, mostra que os alunos apresentaram um maior número de respostas incorretas em expressões de valor em falta e em questões envolvendo a multiplicação e divisão de numerais decimais. As situações contextualizadas foram igualmente questões onde os alunos apresentaram um número reduzido de respostas corretas. Tendo em conta que os alunos pareceram estar familiarizados com a adição e subtração de numerais decimais (pelo número reduzido de resposta incorretas que apresentaram quando comparadas com registadas com as operações multiplicação e divisão), a análise dos erros dos alunos nesta representação irá incidir maioritariamente na multiplicação e divisão.

Quadro 72. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com numerais decimais.

| | Número de respostas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Corretas | | Incorretas | | Não responde | |
| **Questões** | TM | TL | TM | TL | TM | TL |
| $? -4{,}3 = 0{,}5$ | 6 | 3 | 10 | 6 | 4 | 9 |
| $0{,}6 + 0{,}04$ | 16 | 9 | 4 | 7 | 0 | 2 |
| $25{,}5 \times ? = 5{,}1$ | 6 | 0 | 10 | 6 | 3 | 13 |
| $4{,}2 \times 0{,}2$ | 1 | 2 | 14 | 11 | 4 | 6 |
| $0{,}6 \times 0{,}30$ | 1 | 5 | 15 | 7 | 3 | 6 |
| $2{,}1 \div ? = 8{,}4$ | 2 | 1 | 11 | 7 | 6 | 10 |
| $0{,}14 \div 0{,}2$ | 4 | 6 | 8 | 6 | 7 | 6 |
| $? \times 0{,}5 = 30$ | 6 | 1 | 11 | 12 | 2 | 5 |
| $0{,}75 \div ? = 3$ | 1 | 3 | 7 | 1 | 12 | 15 |
| A Rita construiu um cubo em que a área da base era $0{,}36\, m^2$. Qual a medida do lado? | 0 | 3 | 12 | 9 | 8 | 7 |

$? \mathbf{-4{,}3 = 0{,}5}$

No cálculo de $? -4{,}3 = 0{,}5$ foi possível identificar três tipos diferentes de erros (Quadro 73) nas estratégias dos alunos. João (turma M) visualiza 5 em vez de 0,5 mas realiza corretamente o cálculo tendo em conta o número que visualizou.

O facto de termos usado um *PowerPoint* temporizado em que os alunos tiveram 15 segundos para resolver uma expressão pode ter originado este tipo de erro que considero de *perceção*. A *imagem mental* que os alunos têm do número 5, pela referência que constitui no cálculo, pode ter estado na base deste erro cometido por João, levando-o a focar-se apenas no 5, ignorando o zero.

Elsa (turma M) opera separadamente com as partes inteira e decimal do numeral decimal, mas realiza operações diferentes, quando deveria de ter realizado a mesma operação. Subtrai as partes inteiras para obter zero (de 0,5) e adiciona as partes decimais para obter 5 (de 0,5). Esta estratégia pode revelar alguma incompreensão da estrutura dos numerais decimais (erro *concetual*), uma vez que a aluna parece entender o numeral decimal como dois números divididos por uma vírgula e não a representação de um número. Caso semelhante também foi detetado nas operações com frações, onde a interpretação de uma fração enquanto dois números e não um, levou a que os alunos operassem com numeradores e denominadores na adição/subtração de frações.

Quadro 73. Erros na questão $? - 4{,}3 = 0{,}5$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***João***: Eu pus 9,3 porque pus para 5. Para o resultado 5. | Percetual | Visualização de 5 em vez de 0,5 | Imagem mental |
| | ***Elsa***: Eu pus 42 décimas. Eu percebi que 4-4 dava zero mas depois... Não sei se somei. Acho que somei . . . o 2 mais o 3 que me deu 5. | Concetual | Estrutura do numeral decimal | |
| **TL** | ***Gonçalo***: Era igual ao Acácio [4,3 mais 0,5] só que eu pus 47 décimas. | Procedimental | Erro de cálculo | Não identificada |

A *imagem mental* de números que adicionados dão 5 (factos numéricos conhecidos) pode ter influenciado o facto de Elsa ter adicionado a parte decimal em vez de ter encontrado um número ao qual deveria subtrair 3 para chegar a 5. Este foi um tipo de erro que surgiu algumas vezes em ambas as turmas.

Gonçalo (turma L), reconhece que pode recorrer a uma propriedade da operação subtração (aditivo=subtrativo + resto), mas apresenta um resultado com menos uma centésima do que o resultado pretendido. O aluno comete um erro *procedimental* ao qual está associado um erro de cálculo. A explicação de Gonçalo não nos dá indícios de qual a representação mental subjacente à sua estratégia.

**$0,6 + 0,04$**

No cálculo de $0{,}6 + 0{,}04$ surgem essencialmente dois tipos de erros (Quadro 74). Eva (turma M) comete um erro *percetual* (subtrai em vez de adicionar) podendo a *imagem mental* da operação que realizou na expressão anterior a esta, ter influenciado este seu erro. Isto porque, resolve corretamente a subtração entre 0,6 e 0,04 sem revelar qualquer tipo de erro de cálculo ou incompreensão concetual. Este foi um erro que surgiu com alguma frequência em ambas as turmas, principalmente em questões envolvendo adição e subtração de numerais decimais.

Bernardo (turma L), recorre a um contexto de dinheiro (*modelo mental*) para o apoiar na realização da operação, podendo este contexto ter originado o seu erro ao considerar 0,04 como 40 cêntimos. Bernardo adicionou corretamente 0,6 com 0,4 mas não conseguiu reconhecer que 0,04 correspondia a 4 "cêntimos" e não a 40 "cêntimos". Subjacente a este erro pode estar a dificuldade dos alunos em transitarem de uma linguagem natural (leitura de numerais decimais em contexto de dinheiro) para uma linguagem simbólica, o que envolve a compreensão da estrutura dos numerais decimais a par de uma interpretação linguística.

Quadro 74. Erros na questão $0{,}6 + 0{,}04$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Eva***: Eu fiz a subtração . . . Eu penso que estava tão habituada ali na no 1unidade e 9 décimas menos 50 centésimas que depois a última subtrai. [Deu] 56 centésimas. | Percetual | Subtrai em vez de adicionar | Imagem mental |
| **TL** | ***Bernardo***: Eu pus uma unidade porque eu pensei em 60 cêntimos e 40 cêntimos. | Concetual | Estrutura do numeral decimal | Modelo mental |

Os alunos manifestaram, por vezes, dificuldades em representar simbolicamente 5 cêntimos e 50 cêntimos representando ambos como sendo 0,5 ou 0,50. Esta dificuldade vem reforçar a necessidade de apostarmos numa leitura correta dos numerais decimais (0,5 como 5 décimas e não como "zero virgula cinco") de forma a apoiar os alunos no estabelecimento de relações entre linguagem natural e linguagem simbólica.

$\mathbf{25,5\ \times ? = 5,1}$

No cálculo de $25{,}5 \times ? = 5{,}1$, Rui comete um erro *concetual* (Quadro 75) ao indicar como resultado a relação entre 25,5 e 5,1 (relação de 5) em vez da relação entre 5,1 e 25,5 (relação de $\frac{1}{5}$). A sua explicação parece indicar que transformou os numerais decimais em frações decimais $\left(\frac{51}{10}\ e\ \frac{255}{100}\right)$, indicando de forma incorreta a fração decimal equivalente a 25,5 (um erro que pode ter origem na leitura incorreta do numeral decimal) e reconheceu ser necessário dividir para obter o fator em falta. Explica que dividiu 51 décimas por 255 centésimas, mas a expressão "pensei quantas vezes 51 cabia em 255" indica que realiza o cálculo de 255 centésimas por 51 décimas, mostrando não perceber que neste caso deveria de dividir o número menor pelo maior (multiplicador=produto÷multiplicando).

Quadro 75. Erro na questão $25{,}5 \times ? = 5{,}1$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TL** | ***Rui***: Pus 5 . . . Fiz o inverso. Pus 51 dezenas [décimas] a dividir por 255 centésimas e pensei quantas vezes 51 cabia em 255 e cabia 5 vezes. | Concetual | Relação entre operações inversas | Imagem mental |

Esta estratégia pode ter sido influenciada pela *imagem mental* de que se divide sempre um número maior por um menor, como frequentemente realiza na divisão de números naturais. Contudo, na fase de discussão, Rui parece assumir que indicou o "inverso". Neste sentido questiono o aluno no sentido de o ajudar a perceber melhor que números deve relacionar e, consequentemente, perceber o seu erro:

***Investigadora***: E? Há aqui uma relação de 5, certo?
***Rui***: (Responde afirmativamente com a cabeça).

***Investigadora***: Só que temos aqui um problema. Este (5,1) é 5 vezes maior do que este (25,5) ou 5 vezes mais pequeno do que este (25,5)?

***Rui***: Cinco vezes pequeno.

***Investigadora***: Então que número é que se tem que colocar aqui?

***Rui***: $\frac{1}{5}$.

O meu questionamento direcionado, que confronta Rui com as duas possibilidades de relação entre os números envolvidos na expressão, parece tê-lo ajudado a perceber que a relação correta é o número inverso ao que indicou.

### $\mathbf{4,2 \times 0,2}$

A estratégia apresentada por Pedro para a resolução de $4{,}2 \times 0{,}2$ encaminha-nos para um erro *concetual* (Quadro 76). O aluno apenas opera com a parte decimal do numeral, ignorando a parte inteira. Aparentemente, parece não reconhecer que um numeral decimal é constituído por uma parte inteira e outra decimal e que ambas devem ser envolvidas na operação a realizar. A sua explicação não dá indícios do tipo de representação mental a que recorre na sua estratégia.

Quadro 76. Erro na questão $4{,}2 \times 0{,}2$.

| | | **Tipo de Erro** | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Pedro***: [4,4] Eu tive mal. Eu não sei porque fiz o 2×2... Só multipliquei as casas decimais. | Concetual | Estrutura do numeral decimal | Não identificada |

Ao apresentar a sua estratégia, Pedro reconhece de imediato que: “Eu tive mal”, pelo que eu e a professora Margarida resolvemos explorar o seu erro e por que razão considera que a sua resposta está incorreta:

***Pedro***: Eu ainda não fiz a conta mas sei que 4,2 a dividir por 5 dá... dá...

***Investigadora***: Como é que tu dividias aquele número [4,2] por 5? Como é que tu fazias essa divisão. Como é que pensavas para fazer essa divisão?

***Pedro***: Porque eu sei que 0,2 é equivalente a $\frac{1}{5}$ se for vezes $\frac{1}{5}$ é a dividir por 5. Depois, já sabia que era isso.

***Investigadora***: O que eu te estou a pedir é que faças a conta.

***Professora Margarida***: Faz lá 42 por 5. Se te saísse este cálculo 42 a dividir por 5. Como é que pensaste?

***Pedro***: Dá 8,4.

***Investigadora***: Sim, mas como chegaste ao 8,4?

***Pedro***: Fiz 8×5 e depois...

***Professora Margarida***: Tudo bem, dividiste 40 por 5.

***Pedro***: Sim.

***Professora Margarida***: 8×5 é que viste que em 40 havia 8 e agora no 2 como é que eu lhe fazia?

***Pedro***: O 2 tenho que somar... Tenho que acrescentar casas decimais até vezes cinco que é 8 virgula… Casas decimais para fazer o 42. Até encontrar um número que multiplicado por 5 dá 2... Dá 20.

***Professora Margarida***: Então aquilo vai dar?

***Pedro***:8,4

***Professora Margarida***: Então?

***Pedro***: E depois tenho que ..

***Professora Margarida***: E vai dar?

***Pedro***: 0,4.

Na discussão coletiva, Pedro reconhece que deveria de ter dividido por 5 uma vez que é equivalente a multiplicar por 0,2: “Eu sei que 0,2 é equivalente a $\frac{1}{5}$, se for vezes $\frac{1}{5}$ [substitui 4,2×0,2 por 4,2×$\frac{1}{5} = 4{,}2 \div 5$] é a dividir por 5.”. Assim, recorre à mudança de representação e de operação e posteriormente à propriedade distributiva da divisão em relação à adição, generalizando uma propriedade da multiplicação. Questionado acerca da forma como divide 4,2 por 5, Pedro acrescenta que “fiz 8×5. O 2 tenho que somar… Tenho que acrescentar casas decimais… Até encontrar um número que multiplicado por 5 dá 2… é o 20 … Dá 0,4”. Apesar da dificuldade em expor verbalmente a sua estratégia é possível perceber que perante um número não divisível por 5, Pedro muda de representação, usa 42 (número natural) em vez de 4,2 (numeral decimal), decompondo-o em 40+2. Para efetuar 40÷5, recorre à operação inversa pensando num número que multiplicado por 5 dê 40 e obtém 8. Posteriormente, como 2 continua não é divisível por 5, multiplica-o por 10 e pensa novamente num número que multiplicado por 5 dê 20, obtendo 4, que divide por 10 para obter 0,4, uma vez que já tinha multiplicado 2 por 10. A estratégia de Pedro evidencia pensamento relacional uma vez que, de forma flexível, muda de representação em função dos cálculos que necessita de efetuar e recorre à propriedade distributiva da divisão em relação à adição que, embora não sendo uma propriedade desta operação, pode ser generalizada da multiplicação para a situação em causa.

Esta discussão em torno do erro de Pedro evidencia a importância da discussão dos erros dos alunos como forma de promover aprendizagens. Se tivéssemos ficado apenas pela apresentação da estratégia e do resultado incorreto, ficaríamos com a noção de que o aluno nada sabia acerca das operações com numerais decimais e sua estrutura. O questionamento realizado proporcionou um momento rico de partilha de um raciocínio, pouco comum nos alunos participantes neste estudo. Na turma L, não foram partilhadas estratégias que evidenciassem erros por parte dos alunos, embora muitos tenham apresentado respostas incorretas.

### $\mathbf{0,6 \times 0,30}$

Esta foi uma questão que gerou alguma discussão em ambos os ciclos de experimentação acerca do valor posicional dos algarismos de um produto de dois numerais decimais e do sentido de operação multiplicação de números racionais na representação decimal. A estratégia apresentada por Lídia (Quadro 77) evidencia um dos erros *concetuais* mais comum que surgiu em ambas as turmas e que pode ter sido originado por uma *imagem mental* do valor posicional dos algarismos em situações de adição (uma casa decimal nas parcelas corresponde a uma casa decimal na soma).

Quadro 77. Erro na questão $0,6 \times 0,30$.

| | | **Tipo de Erro** | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Lídia***: A mim deu-me 1,8 décimas . . . Eu fiz logo 6 vezes 3 que dá 18. Então juntei o zero e depois pus a vírgula. | Concetual | Valor posicional dos algarismos/Sentido de operação multiplicação | Imagem mental |

Na turma M, quando questionados acerca do resultado da expressão apresentada, Lídia e João respondem 1,8 e 0,18 respetivamente. Lídia explica que "eu fiz logo 6 vezes 3 que dá 18, então juntei o zero e depois pus a virgula" e João diz "deu-me zero vírgula 18. Eu vi que 6×3 ia dar 18 e então na lógica ia dar 1,8, mas como numa conta de multiplicar tem de se somar as vírgulas para ver onde se põe a vírgula, deu-me 0,18". Perante estas respostas, a professora Margarida questiona a turma: "Quem está de acordo com a Lídia? E com o João?" A maioria está de acordo com  Lídia, mas João mantém a sua posição e repete a sua explicação. Ana, outra aluna da turma, contrapõe: "O João disse que era 18 centésimas. Se... é uma conta de vezes portanto o número [resultado] vai ser maior do que os que estão ali. Se 30 centésimas e 60 centésimas são maiores que 18 centésimas não pode ser". A intervenção de Ana fez-nos perceber que, para os alunos, o conceito de multiplicar está associado a obter um resultado maior do que qualquer dos fatores pois, tal como Ana, os restantes alunos concordaram com a resposta de Lídia (1,8). Mas João não desiste de apresentar as suas justificações: "Não dá. Quando se multiplica por um número decimal tem que dar um número mais pequeno, por isso o 1,8 já nunca dá . . . Professora um número a multiplicar por um decimal dá sempre um número mais pequeno". Procurando clarificar a explicação de João, pedi-lhe um exemplo concreto e este responde:

> Uma vez estávamos a fazer um exercício com a porta [cálculo da área da porta] e vimos que a porta media por volta de um metro e setenta. Então tínhamos de ver quanto é que era a largura e tínhamos de multiplicar por . . . Um número decimal que foi dar um número mais pequeno.

Esta explicação realça a importância do uso de referências no desenvolvimento do sentido de multiplicação de numerais decimais, para que mais tarde os alunos possam usá-las como modelos mentais em contextos matemáticos. O contexto de medida em que João trabalhou com a representação decimal marcou-o e fê-lo compreender que no conjunto dos números racionais multiplicar não conduz necessariamente a um resultado maior, como Ana referiu na sua intervenção. Mas a explicação de João ainda não estava clara, pois podemos operar com dois decimais menores que 1, com um decimal e um inteiro, ou com decimais maiores que 1. Perante o questionamento da professora Margarida, meu e dos colegas, João sentiu necessidade de dar mais alguns exemplos para fazer vingar as suas ideias:

> 0,5×2 dá 1. E o 1, essa conta já todos temos a certeza que está certa. E 1 é mais pequeno do que o 2 . . . Por exemplo $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ dá um número inferior a $\frac{1}{2}$ . . . dá vinte cinco centésimas. Quando se faz um número inteiro por um número decimal . . . A multiplicar . . . Dá um número mais pequeno do que o número inteiro e maior do que o mais pequeno. Fica entre os dois. Numa conta de vezes, em que está um número inteiro vezes um decimal dá um número entre os dois. Quando são dois números inteiros, dá um número maior do que os dois. Então quando são dois decimais dá um número mais pequeno do que os dois. Está ali um exemplo no quadro [aponta para 0,24×4].

Esta discussão evidencia os conhecimentos de João acerca da multiplicação com numerais decimais e, mais uma vez, a importância de se realizarem discussões coletivas na sala de aula a partir dos erros dos alunos. O facto de Margarida não ter validado as respostas de João e Lídia, encorajou João a apresentar os seus argumentos que mais tarde foram validados pela turma ao aceitarem a sua resposta como correta.

### $\mathbf{2,1 \div ? = 8,4}$

No cálculo de $2{,}1 \div ? = 8{,}4$, Rui (turma L) evidencia na sua estratégia um tipo de erro *concetual* que surgiu diversas vezes a propósito da multiplicação e divisão de numerais decimais (Quadro 78). Divide 8,4 por 2,1 (apesar de referir 84÷21) quando deveria de ter dividido 2,1 por 8,4 mostrando não compreender a relação entre dividendo, divisor e quociente de uma divisão. A aluna opera com cada uma das partes do numeral decimal de forma independente, não considerando 8,4 ou 2,1 como uma representação de um número (estrutura dos numerais decimais) tal como Elsa da turma M na resolução de $? - 4{,}3 = 0{,}5$. Assim, a sua estratégia pode ter sido influenciada por uma *representação proposicional* baseada apenas em proposições falsas que refletem o conhecimento matemático de Rui acerca da estrutura dos numerais decimais: se $2{,}1 \div ? = 8{,}4$ então $? = 8{,}4 \div 2{,}1$ (falso) com $8{,}4 \div 2{,}1 = 4{,}4$ (falso) porque $8 \div 2 = 4$ e $4 \div 1 = 4$. A *imagem mental* de que se divide sempre um número maior por um menor, como acontece na divisão de números naturais, pode igualmente ter influenciado a sua estratégia.

Quadro 78. Erro na questão $2{,}1 \div ? = 8{,}4$.

| | Aluno/Estratégia | Tipo de Erro: Categoria | Subcategoria | Representação mental |
|---|---|---|---|---|
| **TL** | ***Rui:*** Pus 4,4 . . . Se fosse em fração ficava $\frac{84}{10} \times 21$ . . . Não, quer dizer, a dividir por 21. 84÷21. | Concetual | Relação entre dividendo, divisor e quociente na divisão/ Estrutura dos numerais decimais | Representação proposicional/ Imagem mental |

Mais uma vez a estratégia de Rui, mostra que este se centrou na relação de quádruplo entre 8,4 e 2,1 e não na relação de $\frac{1}{4}$ entre 2,1 e 8,4 como já antes tinha evidenciado no cálculo de $25{,}5 \times ? = 5{,}1$. Esse tipo de estratégia, que recorre à divisão do quociente pelo dividendo em vez do dividendo pelo quociente, também surgiu na turma M.

**$0{,}14 \div 0{,}2$**

A resposta de Jaime pode conduzir a diversas interpretações, no que se refere ao erro cometido (Quadro 79), uma vez que a sua explicação se resume à apresentação de um resultado. No entanto, parece-me interessante interpretar este resultado.

Quadro 79. Erro na questão $0{,}14 \div 0{,}2$.

| | Aluno/Estratégia | Tipo de Erro: Categoria | Subcategoria | Representação mental |
|---|---|---|---|---|
| **TM** | ***Jaime***: A mim deu-me 28 centésimas. | Percetual/ Concetual | Visualização rápida do número/Equivalência entre representações | Imagem mental/ Representação proposicional |

Jaime pode ter interpretado 0,2 como sendo equivalente a $\frac{1}{2}$ como sugere João, na interpretação que faz do erro do colega, interpretação esta aceite por Jaime:

***João***: Já sei porque é que ele se enganou.

***Professora Margarida***: Porque é que ele se enganou. Então ele enganou-se porquê?

***João***: Porque $\frac{1}{2}$ é 0,5 e ele como $\frac{1}{2}$ é 1 sobre 2 ele confundiu o 2 com 0,2 e por isso multiplicou por 2 e tinha que multiplicar por 5, porque duas décimas são vezes 5.

***Professora Margarida***: Mas eu ainda não disse que o João tinha razão. Ele disse que tu estavas errado e até disse porque tinhas errado. Estás de acordo com ele?

***Jaime***: sim.

Neste caso, podemos considerar este erro como sendo *percetual*, em que a *imagem mental* de 2 (de 0,2) induziu Jaime a utilizar $\frac{1}{2}$ e, consequentemente, a calcular $0{,}14 \div \frac{1}{2} = 0{,}28$. A fração $\frac{1}{2}$ foi uma referência muito usada na experiência de ensino, pelo que o foco no denominador 2 pode ter condicionado a opção do aluno. Neste caso, Jaime apresenta um resultado correto para um divisor igual a $\frac{1}{2}$ e não 0,2. Erro semelhante surgiu associado à resolução da expressão $0{,}2\ de\ 10$ na tarefa 8 onde Bernardo (turma L) ao usar 0,2 enquanto metade calcula metade de 10. Neste caso a *imagem mental* de 2, enquanto número associado ao cálculo de metade (divide por 2 para calcular metade e denominador da fração $\frac{1}{2}$ que representa metade) pode ter estado na origem do erro de Bernardo. Também na resolução da expressão $\frac{1}{5} + 0{,}3$, Rita (turma M) comete o mesmo tipo de erro *percetual* que Luís e Bernardo ao considerar $\frac{1}{5}$ equivalente a 0,5. Contudo, realiza corretamente o cálculo $0{,}5 + 0{,}3$ reconhecendo na sua explicação que $\frac{1}{5}$ é equivalente a 0,2 e não a 0,5. Neste caso a sua estratégia pode ter sido influenciada pela *imagem mental* do denominador 5 em associação com 0,5. Até ao final da experiência, o erro de associar $\frac{1}{5}$ a 0,5 foi surgindo esporadicamente nas explicações dos alunos, embora estes o tivessem identificado de imediato.

No entanto, o erro de Jaime pode ser interpretado de outro modo. O aluno pode efetivamente não saber que $0{,}2 \neq \frac{1}{2}$ e assim o seu erro seria *concetual* por desconhecer a equivalência entre representações dos números racionais, nomeadamente entre 0,2 e $\frac{1}{5}$. Assim, a sua estratégia poderia ter-se alicerçado numa *representação proposicional* que partindo de uma proposição falsa dá origem a uma verdadeira: se $0{,}2 = \frac{1}{2}$ (falso) então $0{,}14 \div \frac{1}{2} = 0{,}28$ (verdadeiro).

$? \times \mathbf{0{,}5} = \ \mathbf{30}$

A resolução de $? \times 0{,}5 = 30$, quer no ciclo de experimentação I quer no ciclo II deu origem a erros *concetuais* diferentes, como os indicados no Quadro 80 por Ivo (turma M) e Tiago (turma L). Na turma M, Ivo tenta encontrar um número que multiplicado por 5 dê 30, mas não considera que na multiplicação de um número natural por um número racional o produto tem de estar entre os valores dos fatores (?>30>0,5) (sentido de operação), discussão esta que tinha ocorrido na sala de aula, desencadeada por João a propósito da resolução de $0{,}6 \times 0{,}30$.

Quadro 80. Erros na questão $? \times 0{,}5 = 30$.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="3">Tipo de Erro</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aluno/Estratégia</th><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td>TM</td><td>Ivo: 6 décimas. 6×5 era 30, mas depois faltava lá a vírgula . . . Ver o número que vezes 5 ia dar 30 e era 6.</td><td rowspan="2">Concetual</td><td>Sentido de operação multiplicação/ Valor posicional dos algarismos</td><td>Imagem mental</td></tr>
<tr><td>TL</td><td>Tiago: Eu pus 15, porque eu pus aquele 0,5 calculei como se fosse $\frac{1}{2}$. A dividir, mas enganei-me. Depois dividi pela conta inversa. Dividi por 30 deu-me 15.</td><td>Relação entre operações</td><td>Representação proposicional/ Imagem mental</td></tr>
</table>

Outro aspeto não considerado por Ivo é que, o facto de considerar 0,5 como 5 no cálculo, obriga-o a dividir o resultado 30 por 10 (valor posicional dos algarismos), uma vez que tinha multiplicado 0,5 por 10 para facilitar o cálculo. A sua estratégia conduziu-o ao resultado 3 e não 30. Uma *imagem mental* forte do algarismo 5, em vez de 0,5 (como aconteceu a João no cálculo de $? - 4{,}3 = 0{,}5$) pode ter condicionado o raciocínio de Ivo e tê-lo feito assumir que estava a multiplicar dois números naturais. Ivo parece operar com os números sem perceber que relação existe entre os fatores e o produto da multiplicação apresentada. Se entendesse 0,5 como uma representação de metade, poderia ter compreendido que o número em falta teria de ser o dobro do resultado apresentado.

Relativamente à estratégia de Tiago (turma L), este compreende que tem de dividir 30 por 0,5 e substitui, no cálculo, 0,5 por $\frac{1}{2}$, mostrando conhecer a equivalência entre estas representações. Ao "idealizar" a expressão $30 \div \frac{1}{2}$ calcula metade de 30 em vez de calcular o dobro de 30 mostrando não ter ainda interiorizado e compreendido a relação entre dividir por $\frac{1}{2}$ e multiplicar por 2. Subjacente a esta estratégia pode ter estado uma *representação proposicional* em que uma proposição verdadeira dá origem a uma proposição falsa: se 0,5=$\frac{1}{2}$ então $30 \div 0{,}5 = 30 \div \frac{1}{2}$ (verdadeiro). Se $\frac{1}{2}$ representa metade então o resultado corresponde a $30 \div 2$ (falso). O erro cometido por Tiago surgiu algumas vezes, principalmente quando o divisor era $\frac{1}{2}$ ou quando os alunos substituíam 0,5 por tal, o que pode ser indício de que a *imagem mental* de 2 (foco no denominador da fração) pode de certa forma influenciar as opções de cálculo dos alunos. Erro semelhante já tinha surgido na estratégia de Marta (turma M) a propósito do cálculo de $2{,}4 \div \frac{1}{2}$ na tarefa 3. Ao visualizar esta expressão a aluna foca-se igualmente no denominador 2 do divisor e calcula metade de 2,4 em vez de calcular o dobro.

Mais uma vez, a rapidez com que os alunos tinham de realizar o cálculo individualmente pode ter tido alguma influência neste tipo de erro. Contudo, percebi que, quando havia compreensão do conceito, o erro era de imediato reconhecido pelos alunos na sua explicação. Quando não havia compreensão concetual, não reconheciam o erro. A importância da discussão coletiva como forma de levar os alunos a refletirem sobre os erros que cometem e porque os cometem, acrescentando assim novos conhecimentos aos que já possuem, sai mais uma vez reforçada.

### $\mathbf{0,75 \div ? = 3}$

A estratégia apresentada por Diogo (Quadro 81) para a resolução de $0{,}75 \div ? = 3$ originou uma discussão que foi retomada por diversas vezes na turma L. As questões de linguagem ou mesmo de compreensão concetual levaram alguns alunos desta turma a usar os termos "número inverso", "multiplicação inversa" e "operação inversa" com o mesmo significado. O diálogo estabelecido com Rui evidencia esta confusão que, de forma gradual, se foi tentando minimizar.

Quadro 81. Erro na questão $0{,}75 \div ? = 3$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TL** | ***Diogo***: Eu talvez fizesse 75 centésimas vezes o resultado que era 3. | Concetual | Relação entre dividendo, divisor e quociente na divisão | Não identificada |

A estratégia de Diogo evidencia que este cometeu um erro *concetual* mostrando que não compreende a relação entre dividendo, divisor e quociente de uma divisão à semelhança do que já tinha acontecido com Rui no cálculo de $2{,}1 \div ? = 8{,}4$, uma vez que se limita a multiplicar o dividendo pelo quociente ("75 centésimas vezes o resultado que era 3"). A sua curta explicação não dá evidências de qual pode ter sido a representação mental em que se apoiou para realizar o cálculo que apresenta. Na discussão do erro de Diogo, Rui intervém mostrando que compreendeu o que foi discutido a propósito da sua estratégia para o cálculo de $2{,}1 \div ? = 8{,}4$, mas revela ainda dificuldades na comunicação matemática. Eu e a professora Laura questionamos Rui e guiamos o aluno no sentido de o ajudar a melhorar a sua linguagem para que este possa explicar de foram clara porque considera a estratégia de Diogo incorreta:

> ***Rui***: Se nós fizermos a operação inversa vai dar outro resultado. Porque $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ vai dar... 3 não sei o denominador.
>
> ***Investigadora:*** Rui tu disseste… Concretiza lá aquilo que o Diogo disse. O Diogo disse que multiplicava.
>
> ***Rui***: Mas não dava porque ia dar outro resultado.
>
> ***Investigadora***: Mas porquê? Multiplicar os números que ali estão?
>
> ***Rui***: Só podemos fazer a operação inversa quando é na multiplicação. Na divisão não dá porque é como a professora já disse, se fizermos a multiplicação inversa vai ser $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$
>
> ***Investigadora***: É $\frac{1}{3}$ que ali está?

***Rui***: Multiplicação inversa. O inverso de 3 unidades é $\frac{1}{3}$.

***Investigadora***. Sim eu sei mas …

***Professora Laura***: A operação inversa é uma coisa o número inverso é outra.

***Rui***: Ah, OK . . . Não dá a operação inversa porque se nós fizéssemos a operação inversa ia ser $\frac{3}{4}$ vezes 3 unidades ou 3 baixo 1 ($\frac{3}{1}$). Então 3×3, 9 e 4×1, 4.

Rui, ao referir que "Se nós fizermos a operação inversa vai dar outro resultado. Porque $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ vai dar…" , parece assumir a "operação inversa" de $\frac{3}{4} \div 3$ como o produto de $\frac{3}{4}$ pelo inverso de 3 (operação inversa da divisão em conjunto com o inverso do multiplicador). Não estando este a referir-se exatamente à operação realizada por Diogo, volto a questioná-lo e Rui mostra que compreendeu que a operação inversa é possível de aplicar sempre no caso da multiplicação, mas nem sempre no caso da divisão e mostra não concordar com a resposta de Diogo. A afirmação da professora Laura: "A operação inversa é uma coisa o número inverso é outra" fá-lo perceber o seu erro de linguagem e consequentemente da verbalização da expressão. Assim, corrige a sua explicação: "Se nós fizéssemos a operação inversa ia ser $\frac{3}{4}$ vezes 3 unidades ou 3 baixo 1 ($\frac{3}{1}$). Então 3×3, 9 e 4×1, 4", clarificando que recorrer à operação inversa é usar a multiplicação para calcular o divisor de uma divisão, estratégia esta apresentada por Diogo e de que Rui discorda. De notar a preferência de Rui pela representação fracionária uma vez que sempre se referiu a $\frac{3}{4}$ em vez de 0,75.

Na turma M voltaram a surgir nesta questão erros onde os alunos identificaram a relação entre os números mas que depois indicaram a relação inversa à pretendida (à semelhança de Rui na questão $25{,}5 \times ? = 5{,}1$).

### Situação da medida do lado da face de um cubo

A situação em que os alunos tinham de calcular a medida do lado da face de um cubo a partir da área de uma face (Quadro 71), pretendia fornecer um contexto no âmbito da Geometria e medida e trazer para a discussão erros concetuais relacionados com o valor posicional de algarismos, nomeadamente na multiplicação, onde os alunos repetidamente revelaram dificuldades. As estratégias apresentadas por Rogério e José (Quadro 82) evidenciam erros *concetuais* com origens distintas. Rogério parece confundir o conceito de área com o de perímetro e divide 36 por 4 obtendo o resultado 0,09. A sua interpretação da situação (não identificando o conceito envolvido como sendo o de área), condicionou todo o seu raciocínio pelo que não me parece possível inferir qual a representação mental subjacente a esta sua estratégia. De notar que Rogério realizou corretamente o cálculo $0{,}36 \div 4$ não apresentando qualquer dificuldade na indicação do valor posicional dos algarismos do numeral decimal obtido.

José mostra ter compreendido que o conceito envolvido era o de área e procura na tabuada dois fatores cujo produto seja 36. Ao indicar o resultado 0,06 coloca à direita da vírgula duas casas decimais. Esta opção pode ter subjacente uma *imagem mental* do valor posicional dos algarismos em situações de adição (duas casas decimais nas parcelas corresponde a duas casas decimais na soma) como discuti anteriormente no caso de Lídia a propósito do cálculo de $0{,}6 \times 0{,}30$.

Quadro 82. Erros para a questão $? \times ? = 0{,}36$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Rogério***: Eu coloquei 9 centésimas. 9 centésimas porque é um cubo e é 36 a dividir por 4 que me dava 9. | Concetual | Conceito de área enquanto produto de duas medidas | Não identificada |
| | ***José***: 6 centésimas . . . Eu sei que para calcular a área temos de fazer lado vezes lado. E então . . . Fui à procura do 36 nalguma tabuada e encontrei no 6. Fiz 6×6 que deu-me 36. | | Sentido de operação multiplicação/ Valor posicional dos algarismos | Imagem mental |

O caso de Lídia discutido na aula é relembrado por José que, após alguma discussão em torno das estratégias dos alunos para a resolução da presente situação, parece refletir sobre a sua própria estratégia fazendo um comentário onde mostra ter percebido o seu erro:

> Professora, não sei se está bem, mas numa conta que nós fizemos o João disse que 6… Era 6 décimas e 3 décimas e multiplicámos e deu 18 centésimas e aqui também podia ser se nós fizéssemos 6 décimas vezes 6 décimas, 36 centésimas.

Este comentário de José, à semelhança da intervenção de Rui na discussão da resolução de $0{,}75 \div ? = 3$, revela que as discussões coletivas a propósito das estratégias e erros dos alunos proporcionaram aprendizagens e apoiaram a clarificação dos erros que manifestam. Estas aprendizagens permitiram-lhes serem críticos, quando os seus erros voltam a ser cometidos por outros colegas (caso de Rui), ou refletir um pouco mais sobre os seus próprios erros (caso de José).

As situações contextualizadas representaram, para alguns alunos, uma dificuldade acrescida na medida em que, a não identificação do conceito matemático envolvido os levou à identificação de operações erradas, como foi o caso de Rogério nesta situação e de Luís também da turma M que, numa situação envolvendo o conceito de amplitude térmica, adicionou as temperaturas máxima e mínima em vez de as subtrair.

### 8.1.3. Erros em questões com percentagens

A representação percentagem surgiu na tarefa 7 isoladamente e partir das tarefas 8, 9 e 10 em questões que envolviam outras representações dos números racionais. Os alunos resolveram 15 expressões e uma situação contextualizada envolvendo apenas a representação percentagem, das quais apenas serão analisadas as apresentadas no Quadro 83.

Quadro 83. Questões de cálculo mental analisadas com a representação percentagem.

| | Questões | | Tarefa |
|---|---|---|---|
| Expres- | $10\%\ de\ ?= 5$<br>$5\ \%\ de\ ? = 3$ | $75\%\ de\ 80$<br>$90\%\ de\ 30$ | 7 |
| | $\_\%\ de 30 = 0{,}3$ | | 8 |

O quadro 84 apresenta o número de respostas corretas, incorretas e em branco, dos alunos das turmas M e L nas questões com percentagens analisadas.

Quadro 84. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com a representação percentagem.

| | Número de respostas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Corretas | | Incorretas | | Não responde | |
| **Questões** | TM | TL | TM | TL | TM | TL |
| $10\%\ de\ ? = 5$ | 10 | 0 | 4 | 10 | 6 | 8 |
| 75% de 80 | 6 | 1 | 5 | 6 | 9 | 11 |
| $5\ \%\ de\ ? = 3$ | 4 | 0 | 10 | 6 | 6 | 12 |
| 90% de 30 | 0 | 2 | 14 | 3 | 6 | 13 |
| $\_\%\ de30 = 0{,}3$ | 2 | 0 | 16 | 6 | 2 | 13 |

A análise deste quadro mostra que os alunos apresentaram, na generalidade, um grande número de respostas em branco e um número significativo de respostas incorretas em questões onde a percentagem envolvida era próxima de 100% (caso do 90% de 30) ou de 1% (caso de __% de 30=0,3), sendo isto mais visível na turma L do que na turma M. O número de respostas em branco apresentadas pelos alunos na representação percentagem, é superior ao apresentado na representação fracionária e decimal uma vez que neste tipo de questão os alunos, durante as discussões, mostraram que só resolviam ou tentavam resolver as questões para as quais possuíam algum conhecimento. De salientar que no currículo escolar esta é a última representação dos números racionais que os alunos aprendem, pelo que as aprendizagens poderiam não estra ainda devidamente consolidadas, como a professora Margarida chegou a referir.

**$10\%\ de\ ? = 5$**

O cálculo de $10\%\ de\ ? = 5$ revelou ser mais complexo para a turma L do que para a turma M, uma vez que nenhum aluno da turma L apresentou uma resposta correta. Acácio apresenta uma estratégia (Quadro 85) que evidencia um erro *concetual,* originado pela incompreensão da relação parte-parte. O aluno relaciona 10 e 5 e tenta encontrar um número que multiplicado por 5 dê 10, sem no entanto relacionar o todo 100% com o valor em falta. Esta sua estratégia poderia ter sido um bom ponto de partida para uma relação parte-parte, mas o seu reduzido conhecimento sobre o assunto, em conjunto com uma possível *imagem mental* do facto $2 \times 5 = 10$ pode ter originado este seu erro. As imagens mentais de factos numéricos que representam referências para os alunos, como somas, produtos, quocientes ou diferenças que originam 10 ou 5, parecem condicionar as estratégias dos alunos, principalmente quando estes não possuem uma aprendizagem sólida de conhecimentos necessários à resolução de uma dada questão. A resposta de Acácio também surgiu na turma M, bem como a resposta $\frac{1}{2}$ que surge na mesma linha, quando um aluno compara 5 com 10 em vez de 10 com 5.

A estratégia de Ricardo (Quadro 85) parece ter sido condicionada pela interpretação visual que este aluno faz da questão projetada pelo *PowerPoint*, pelo que poderá ser um erro de *perceção*. Ricardo calcula 10% de 5, o que numa visualização rápida pode acontecer, uma vez que é esta a *imagem mental* com que fica da questão que visualiza. O facto de Ricardo reconhecer que a interpretação da situação apresentada era outra: "Está errado porque é 10% de qualquer coisa que dá 5" e de ter calculado corretamente 10% de 5 reforça a hipótese de este ser um erro de perceção.

Quadro 85. Erros na questão $10\%\ de\ ? = 5$.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="3">Tipo de Erro</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aluno/Estratégia</th><th>Categoria</th><th>Subcategoria</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td rowspan="2">TL</td><td>Acácio: 2 stora . . . Porque 2×5, 10.</td><td>Concetual</td><td>Relação parte-parte</td><td rowspan="2">Imagem mental</td></tr>
<tr><td>Ricardo: Eu meti cinco décimas. Dividi 5. O 5 por 10 . . . Está errado porque é 10% de qualquer coisa que dá 5.</td><td>Percetual</td><td>Interpretação visual da questão.</td></tr>
</table>

Na turma L, diversos alunos apresentaram 15 como resposta. Este valor pode ter origem na soma de 10 com 5 revelando um outro tipo de erro concetual que discuto a propósito da questão seguinte.

**$75\%\ de\ 80$**

O cálculo de $75\%\ de\ 80$ originou um elevado número de respostas em branco em ambas as turmas. Na turma L, os alunos com respostas incorretas não apresentaram justificação para este facto. Surgem alguns resultados 20 (em ambas as turmas), que sugerem o cálculo de 25% de 80, podendo os alunos não ter concluído o cálculo que supostamente pretendiam. A estratégia de Luís da turma M (Quadro 86) surgiu com alguma frequência na turma L e já tinha surgido a propósito de 10% de ? =5.

Quadro 86. Erro na questão $75\%\ de\ 80$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Luís***: [5]. Foi 80 menos 75. | Concetual | Conceito de percentagem | Não identificado |

A estratégia de Luís evidencia um erro *concetual* onde o aluno opera aleatoriamente com os valores que visualiza na questão (neste caso subtraiu 75 de 80, mas noutros casos os alunos adicionam ou dividem os números que visualizam) mostrando não conhecer o significado de uma percentagem enquanto operador. A explicação de Luís não permite perceber que representação mental esteve subjacente à sua estratégia embora esta possa estar relacionada com uma conceção errada do que é uma percentagem, uma vez que volta a cometer na segunda parte da tarefa 7, um erro semelhante a propósito do cálculo de $90\%\ de\ 30$, mas desta vez divide 90 por 30.

Um número racional com o significado de operador, nem sempre foi corretamente identificado pelos alunos. A relação entre a palavra "de" que surge numa expressão como esta que analisei e o sinal "×"parece não ser clara ou não ter significado para os alunos, uma vez que em situações semelhantes alguns realizam operações diferentes da multiplicação. Por exemplo, no cálculo de $0{,}2\ de\ 10$ na tarefa 8 o erro cometido por Luís (na tarefa 7) volta a surgir por parte de Rúben (turma M) que apresenta como primeira resolução da expressão $10 - 0{,}2$ alterando posteriormente para $10 \div 0.2$.

A multiplicação de números racionais, de um modo geral, revelou-se complexa para os alunos, sendo ainda mais difícil quando o significado de operador está envolvido e não explícito com um sinal de operação. Assim, a operação multiplicação deve merecer alguma atenção do ponto de vista da compreensão concetual, não limitando a sua aprendizagem à mecanização de regras e procedimentos. O recurso a representações pictóricas desta operação pode apoiar a sua compreensão e o desenvolvimento do sentido de operação multiplicação com números racionais, facto já detetado como frágil na aprendizagem dos alunos a propósito do cálculo mental com numerais decimais.

$\mathbf{5\%\ de\ ?=\ 3}$

Na turma M, os alunos ou respondem corretamente ou indicam 15 como resultado, o que sugere uma estratégia semelhante à de Ricardo (Quadro 87), embora ninguém o tivesse verbalizado. Na turma L, para além do resultado referido por Ricardo, que não apresentou uma resposta na folha de registo mas que verbalizou uma estratégia no momento de discussão, surge também o resultado 2 (possivelmente 5-3) que nos encaminha para o erro concetual semelhante ao cometido por Luís na resolução de $75\%\ de\ 80$.

A explicação de Ricardo mostra que se recorda da discussão em torno da questão $10\%\ de\ ?= 5$ em que o valor em falta podia ser calculado através de $10 \times 5$. Contudo, o aluno não compreendeu o conceito de relação parte-todo e comete um erro *concetual* ao generalizar um conhecimento sem reflexão prévia. No caso de $10\%\ de\ ?= 5$ era possível multiplicar por 10 porque 100% (correspondente ao valor em falta) era 10 vezes superior à percentagem a calcular ($10 \times 10\% = 100$). No caso de $5\%\ de\ ?= 3$, Ricardo deveria de ter multiplicado por 20, uma vez que $20 \times 5\% = 100\%$. A estratégia do aluno parece ter subjacente uma *representação proposicional* onde a generalização de uma proposição verdadeira dá origem a uma proposição falsa: se 10% de ?= 5 e ? =10× 5 (verdadeiro), então 5% de ?=3 e ? =5 × 3 (falso).

Esta estratégia de Ricardo, bem como a de Acácio na questão anterior, mostram que os alunos tentam relacionar números quando estão envolvidas percentagens mas a incompreensão de conceitos essenciais para as operações com percentagens, como é o caso das relações parte-parte ou parte-todo, impede-os de chegarem a resultados corretos.

Quadro 87. Erro na questão $5\%\ de\ ? = 3$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | Aluno/Estratégia | Categoria | Subcategoria | Representação mental |
| **TL** | ***Ricardo***: Porque quando é 10% de uma coisa então o resultado… nós multiplicamos o resultado vezes 10. Então aqui pegamos no resultado [3] vezes 5. | Concetual | Relação parte-todo | Representação proposicional |

**$90\%\ de\ 30$**

Os alunos da turma L apresentam um grande número de respostas em branco a esta questão e voltam a não apresentar justificação para as respostas incorretas. No entanto, o aparecimento de diversos resultados, como, por exemplo, 120 remete-nos mais uma vez, para a soma de 90 com 30.

Quadro 88. Erro na questão $90\%\ de\ 30$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | Aluno/Estratégia | Categoria | Subcategoria | Representação mental |
| **TM** | ***Elsa***: Eu fiz 270%. Está mal. eu fiz 3 vezes 9 que deu 27 e depois acrescentei um zero. | Concetual | Conceito de percentagem | Imagem mental |

Na turma M surgem resultados difíceis de explicar sem a justificação dos alunos (resultados como 20 ou 40). Alguns alunos apresentam a resposta 3 o que sugere a divisão de 90 por 30. Elsa apresenta uma estratégia (Quadro 88) onde multiplica corretamente 3 por 9, mas provavelmente a *imagem mental* da mecanização de procedimentos (acrescenta zeros ou retira zeros) comum no trabalho com números racionais na representação decimal, fê-la cometer um erro *concetual.*

Sendo uma percentagem uma razão de denominador 100, Elsa ao multiplicar 3 por 9 já está sem reparar a contemplar a divisão por 100, não sendo necessário acrescentar ou retirar zeros ao resultado 27. Para além disto, a aluna não mostrou ter sentido crítico face ao resultado obtido, uma vez que, sendo uma percentagem uma parte de uma quantidade, o resultado nunca poderia ser superior a 30. É neste sentido que a professora Margarida intervém e questiona a aluna:

> ***Professora Margarida***: Oh Elsa, assim logo de caras, como é que tu podias me dizer logo, logo, logo que o que escreveste ai é um enorme disparate? Disseste que 90% de 30 era 270. Onde é que tu vias logo que estava errado?
>
> ***Pedro***: Como é que isso é possível ser maior.
>
> ***Professora Margarida***: Oi, chamas-te Elsa? Elsa, alguma vez podia ser o número 270?
>
> ***Elsa***: Não.
>
> ***Professora Margarida***: Porquê?
>
> ***Investigadora***: Elsa, qual é o teu 100% ali?
>
> ***Professora Margarida***: Quanto é 100% de 30?
>
> ***Elsa***: 30.
>
> ***Professora Margarida***: Oh, estão a ouvir isto? Às vezes, e foi o que aconteceu à Elsa, fez um cálculo, que já vamos ver se está errado ou não, mas ela não criticou os números que lhe deu. E eu estou a tentar agora que vejam e critiquem logo o resultado. Elsa, se 100% do número [30] é 30, 90% pode ser mais do que 30?
>
> ***Elsa***: Não.
>
> ***Professora Margarida***: Então, quando te deu 270 tu podias logo pensar qual era o outro número. 30 não era de certeza. Qual é que tu podias achar logo que era?
>
> ***Elsa***: Ah...

No diálogo com Elsa, a professora Margarida tenta que a aluna critique o resultado obtido, percebendo que este não era possível uma vez que, se 100% de 30 era 30, logo 90% sendo menor que 100% nunca poderia originar um valor superior a 30. Margarida explica a Elsa que: “Então, quando te deu 270 tu podias logo pensar qual era o outro número. 30 não era de certeza. Qual é que tu podias achar logo que era?” A reação da aluna (“Ah…”) parece indicar que percebeu a mensagem que a professora lhe quis transmitir – que o valor teria de ser próximo de 30 e que o 270 lhe daria pistas importantes para o resultado correto, ou seja, 27.

O sentido crítico dos alunos face aos resultados obtidos nas diversas questões de cálculo mental foi sendo discutido em ambos os ciclos de experimentação e muitas vezes por iniciativa dos próprios alunos, como exemplifiquei em questões envolvendo frações e numerais decimais e como nos mostra este diálogo com Elsa.

$\_\% \; \boldsymbol{de} \; \mathbf{30 = 0,3}$

Em ambas as turmas a maioria dos alunos com respostas incorretas indica como solução 10%, não apresentando qualquer justificação acerca da forma como chegaram a este resultado. Na turma M, a explicação de João (Quadro 89) mostra que este tem consciência do erro que cometeu. Generalizar um raciocínio (10% de 10%) que costuma surgir associado à representação fracionária (metade de metade ou $\frac{1}{2}$ $de$ $\frac{1}{2}$) poderia tê-lo conduzido ao resultado correto se considerasse 10% de 10% como sendo $0{,}1 \times 0{,}1$ e não como $10\% \times 2$. Trata-se de um erro de *procedimento* uma vez que o aluno apresenta uma estratégia de resolução possível, reconhece o erro e inclusive indica a resposta correta no momento da discussão. Subjacente à estratégia de João pode ter estado uma *imagem mental* de "10% de 10%" enquanto adição de 10 com 10, pela força que a adição tem nos raciocínios dos alunos enquanto operação matemática fundamental.

O resultado apresentado por Rui (turma L) também surgiu na turma M. A explicação de Rui (Quadro 89) mostra que este compreende que o cálculo de 10% envolve a divisão por 10 ("tira-se o zero"). No entanto, para obter 0,3 deveria de dividir novamente por 10. Comete assim um erro *concetual* ao mostrar não compreender que o cálculo de 100% da quantidade indicada é a própria quantidade, uma vez que 100% corresponde ao todo. Esta sua estratégia pode ter sido originada por uma *representação proposicional* onde a generalização de uma proposição verdadeira conduz a uma proposição falsa: se 10% de 30 é 3 (desloca-se a vírgula para a esquerda uma posição porque 10 tem um zero) (verdadeiro), então 100% de 30 é 0,3 (desloca-se a vírgula para a esquerda duas posições porque 100 tem dois zeros) (falso).

A memorização e aplicação de determinadas regras muitas vezes sem sentido, por parte dos alunos, associadas à multiplicação/divisão por 10, 100, 1000… onde os alunos movimentam a vírgula posições para a esquerda/direita dependendo da quantidade de zeros pode ter levado Rui a generalizar este procedimento e a cometer o erro que apresenta.

Quadro 89. Erros na questão $\_\% \; de \; 30 = 0{,}3$.

| | Aluno/Estratégia | Tipo de Erro: Categoria | Subcategoria | Representação mental |
|---|---|---|---|---|
| **TM** | ***João***: Eu enganei-me e em vez de por 1 pus 20. Fiz o dobro de 10% . . . Pensava que 10% de 10% era 20%. | Procedimental | Adiciona em vez de multiplicar | Imagem mental |
| **TL** | ***Rui***: Eu pus 100 professora . . . Porque se for de 10[%], tira-se o zero. Tem que dar 3. Depois se pusermos 100 vai duas casas para trás. Então 0, 3 e depois ponho uma vírgula. | Concetual | Noção de todo/ Valor posicional dos algarismos | Representação proposicional |

### 8.1.4. Erros em questões com duas representações

Em ambos os ciclos de experimentação, os alunos começaram a resolver questões de cálculo mental com duas representações diferentes dos números racionais na mesma questão a partir da tarefa 3. Voltaram a fazê-lo na tarefa extra, 6, 8, 9 e 10. No total, resolveram 16 expressões e 12 situações contextualizadas. Destas, analiso apenas as que constam do Quadro 90. Foram selecionadas questões onde os alunos apresentaram erros diferentes dos analisados nas secções anteriores ou outros sobre os quais considerei importante refletir.

O quadro 91 apresenta o número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos da turma M e L às questões que vão ser alvo de análise. Uma breve análise deste quadro leva-me a inferir que a divisão entre dois números racionais continua a ser problemática para os alunos, bem como a resolução de situações contextualizadas onde surge a divisão ou a multiplicação.

Quadro 90. Questões de cálculo mental analisadas com duas representações dos números racionais.

| | Questões | Tarefa |
|---|---|---|
| Expressões | $\frac{1}{5}+0{,}3$ | Extra |
| | $0{,}25\ de\ ? = 10$ | 8 |
| Situações contextualizadas | O sólido A tem 8,4 $l$ de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. Calcula a capacidade do sólido B. | 6 |
| | A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com 8,16 $m$ retirou $\frac{1}{8}$. Que porção de tecido usou? | 10 |

Quadro 91. Número de respostas corretas, incorretas e em branco dos alunos das turmas M e L em questões com duas representações dos números racionais.

| | Número de respostas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Corretas | | Incorretas | | Não responde | |
| **Questões** | TM | TL | TM | TL | TM | TL |
| $\frac{1}{5}+0{,}3$ | 10 | 1 | 6 | 9 | 4 | 9 |
| $0{,}25\ de\ ? = 10$ | 11 | 1 | 6 | 2 | 3 | 17 |
| O sólido A tem 8,4 $l$ de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. Calcula a capacidade do sólido B | 2 | 0 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com 8,16 $m$ retirou $\frac{1}{8}$. Que porção de tecido usou? | 0 | 2 | 10 | 8 | 10 | 9 |

### $\mathbf{\frac{1}{5}+0,3}$

A leitura correta dos numerais decimais é um passo importante para a compreensão da sua estrutura. O erro de Diogo (Quadro 92) centra-se exatamente na leitura que faz do numeral decimal equivalente a $\frac{1}{5}$, considerando que esta fração é equivalente a "20 décimas" e não a 2 décimas.

O aluno comete um erro *concetual* que surge a partir de uma leitura errada do numeral decimal. Apercebendo-me disso, questiono Diogo na tentativa de que seja o próprio aluno a perceber o seu erro confrontando-o com a leitura dígito a dígito e com a leitura que este fez do numeral decimal.

Quadro 92. Erro na questão $\frac{1}{5} + 0{,}3$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TL** | ***Diogo***: Eu respondi 23 décimas. $\frac{1}{5}$ equivale a 20 décimas. Então pus 20 décimas mais $\frac{1}{5}$ . . . E fiz $\frac{20}{10}$ mais 3 décimos e deu-me $\frac{23}{10}$. | Concetual | Leitura e estrutura dos numerais decimais | Representação proposicional |

No diálogo comigo, Diogo mostra saber que $\frac{1}{5} = 0{,}20$ e reconhece que a leitura que efetuou do numeral decimal “0,20” estava incorreta:

> ***Investigadora***: Diz lá isso na leitura “aldrabada”.
>
> ***Diogo:***0,20.
>
> ***Investigadora***: E isso é?
>
> ***Diogo***: Isso equivale a $\frac{1}{5}$ stora.
>
> ***Investigadora***: Certo. São 20 décimos? Tens uma casa decimal à direita da vírgula? Então são?
>
> ***Diogo***: Duas unidades. Não! Já sei, 20 centésimas.

Na interação com Diogo, apenas peço ao aluno que faça a leitura do numeral decimal dígito a dígito e questiono-o relativamente à forma como este considerou a leitura desse numeral decimal na sua explicação. Perante a questão: “Tens uma casa decimal à direita da vírgula? ”, o aluno reconhece o erro e faz a leitura correta do numeral.

Na turma L, a linguagem matemática dos alunos foi alvo de diversas discussões e ajustamentos, tal como mostra este diálogo com Diogo e como já tinha referido a propósito do termo “inverso” verbalizado por Rui na explicação do cálculo de $0{,}75 \div ? = 3$.

A dificuldade dos alunos em comunicarem matematicamente parece, por vezes, criar alguns problemas não só ao nível de uma comunicação percetível por todos, mas também de apropriação de conhecimentos matemáticos cuja verbalização é um passo importante para a sua compreensão, como o caso da estrutura dos numerais decimais.

$\mathbf{0{,}25}\ \boldsymbol{de}\ ? = \mathbf{10}$

Leandro apresenta uma explicação que evidencia um erro *concetual* (Quadro 93). Este erro parece começar com a equivalência incorreta entre 0,25 e $\frac{1}{5}$ (a quinta parte), passa pelo cálculo da quinta parte de 25 e 10 (calcula a quinta parte das partes 0,25 e 10) e pelo produto entre estas, não estabelecendo qualquer relação parte-parte.

Quadro 93. Erro na questão $0{,}25\ de\ ? = 10$.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TL** | ***Leandro***: Não fiz . . . É 20. Se a quinta parte de 25 é 5 e a de 10 é 2, então pensei 5×2 10 com 10 dá 20. | Concetual | Equivalência entre representações/ Relação parte-parte | Representação proposicional |

Esta estratégia pode ter sido originada por uma *representação proposicional* baseada em proposições verdadeiras e falsas, onde as verdadeiras, apesar de corretas do ponto de vista matemático, não contribuem para a resolução da expressão: se $0{,}25 = \frac{1}{5}$ (falso) então $\frac{1}{5} \times 25 = 5$ (verdadeiro) e $\frac{1}{5} \times 10 = 2$ (verdadeiro), logo $? = 10 \times 2$ (falso). O facto de 25 ser múltiplo de 5 pode também ter tido alguma influência nas opções de Leandro.

Ao perceber a dificuldade de Leandro, questiono o aluno no sentido de o ajudar a compreender a relação entre o valor em falta, o resultado 10 e a parte a que corresponde esse resultado 10:

> ***Investigadora***: Então agora eu vou-te fazer uma questão. Se aqui está 20 [valor em falta] que relação é que existe entre o 10 e o 20?

***Leandro***: Metade.

***Investigadora***: Este [10] é metade deste [20] e o que é que tu disseste na tua síntese o que era o 25? O 25 centésimas? Que é a mesma coisa que 25% não é Leandro. Então o que é que tu disseste que era o 25% Leandro?

***Leandro***: Que era a quinta parte.

***Investigadora***: Era? Foi isso que tu disseste?

***Leandro***: A quarta parte.

***Investigadora***: Mas ali o 20 não é a quarta parte de 10. O quadruplo de 10, porque agora estamos a fazer ao contrário. Pois não? Então como é que seria?

***Professora Laura***: Quadruplo de 10.

***Leandro***:40

Tendo em conta que Leandro escreveu uma síntese das estratégias usadas na aula anterior (algo singular na turma L), onde a equivalência entre 25% e $\frac{1}{4}$ era explicitada, apoio-me nesta síntese para ajudar o aluno perceber que a quinta parte não corresponde a 0,25. No meu discurso estabeleço primeiro equivalência entre 25 centésimas e 25%, para depois chegar a $\frac{1}{4}$ uma vez que os alunos reconhecem mais facilmente 25% como equivalente a $\frac{1}{4}$ do que 0,25. A intervenção da professora Laura torna explícita a relação pretendida e assim Leandro chega ao valor em falta na expressão.

Erros percetuais onde os alunos calcularam 0,25 de 10 sem considerar que existia um valor em falta, como fez Ricardo (turma L no cálculo de 10% de ?=5) surgiram também nesta questão em ambas as turmas.

**Situação da capacidade do sólido B**

A situação da capacidade do sólido B poderia ser resolvida recorrendo ao cálculo de $\frac{3}{4} \times 8{,}4$. Na turma M, Bruno estabelece corretamente a equivalência entre as representações fracionária e decimal, mas parece não compreender que no contexto do problema (Quadro 90) a fração $\frac{3}{4}$ ou o numeral decimal 0,75 funcionam como operadores. Mais uma vez se verifica a dificuldade em identificar um número racional com o significado de operador. Como tal, o aluno comete um erro *concetual* ao subtrair 0,75 de 8,4 (Quadro 94).

A representação mental subjacente a este erro de Bruno não é de fácil identificação, uma vez que a sua opção foi provavelmente condicionada pela interpretação da situação contextualizada e pela dificuldade em selecionar a operação adequada para a sua resolução. O facto de o aluno ter subtraído a parte do todo pode indiciar que este compreendeu a expressão "o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A" como sendo uma situação de retirar e não uma situação em que o sólido B corresponde a uma parte da capacidade do sólido A.

Quadro 94. Erros na situação da capacidade do sólido B.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TM** | ***Bruno***: Primeiro transformei os $\frac{3}{4}$ em zero... deu 75 centésimas e depois tirei os 75 centésimas ao 8,4 e deu-me 7,65. | Concetual | Conceito de fração enquanto operador | Não identificada |
| **TL** | ***Diogo***: Eu pus 7,5. Eu pensei 4÷8 dá 2. Mas depois eu dividi o 4 por 4 deu-me 5 e eu não sei porquê, mas era 1 . . . Depois como me deu 5, deu-me 2,5 e eu somei 3 vezes. 2,5 mais 2,5 é 5 depois mais 2,5 é 7,5. | Procedimental | Erro de cálculo | Representação proposicional |

Na turma L, Diogo apresenta uma estratégia correta para a resolução da situação, em que primeiro divide por 4 e depois multiplica por 3. Faz uma divisão por partes (divide primeiro a parte inteira por 4 e depois a parte decimal) e comete um erro de linguagem ao dizer que divide 4 por 8, quando o que faz é dividir 8 por 4 tendo em conta o resultado 2 que indica. Apesar de cometer um erro de cálculo (erro *procedimental*) ao considerar que $4 \div 4 = 5$, calcula corretamente $3 \times 2{,}5$. A estratégia de Diogo pode ter sido influenciada por uma *representação proposicional*: se $\frac{3}{4} \times 8{,}4 = 8{,}4 \div 4 \times 3$ (verdadeiro) então $8{,}4 \div 4 = 2{,}5$ (falso) porque $8 \div 4 = 2$ (verdadeiro) e $4 \div 4 = 5$ (falso), logo, $8{,}4 \div 4 \times 3 = 7{,}5$ (falso).

A estratégia de Diogo mostra como um pequeno erro de cálculo pode conduzir a um resultado incorreto embora o aluno tenha uma estratégia correta de resolução. Este é um dos exemplos que reforça a necessidade de ouvirmos os alunos, as suas explicações e justificações para podermos compreender efetivamente que conhecimentos matemáticos possuem.

**Situação da saia da Sofia**

Na resolução da situação da saia da Sofia, António comete um erro *concetual* (Quadro 95) que envolve a compreensão da divisão de numerais decimais e o valor posicional dos algarismos do quociente. Divide o numeral decimal por partes, como fez Diogo na situação da capacidade do sólido B, mas ao indicar o numeral decimal correspondente ao quociente (fruto da divisão por partes de 8,16) não considera que está a dividir 0,16 por 8 o que implica que o quociente seja 2 centésimas e não 20 centésimas. Esta estratégia pode ter subjacente uma *representação proposicional* baseada em proposições verdadeiras mas onde António centrou a sua atenção na divisão de números naturais ignorando que a parte direita do numeral decimal em causa representa centésimas: se $\frac{1}{8} \times 8{,}16 = 8{,}16 \div 8$ (verdadeiro) então $8 \div 8 = 1$ (verdadeiro) e $16 \div 8 = 2$ (verdadeiro).

Quadro 95. Erro na situação da saia da Sofia.

| | | Tipo de Erro | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Aluno/Estratégia** | **Categoria** | **Subcategoria** | **Representação mental** |
| **TL** | ***António***: É $\frac{1}{8}$ a dividir [por 8,16]. [8 a dividir] por 8 deu 1. Dividi o 16 por 8 e deu 2. Ai eu coloquei 1,2. | Concetual | Divisão de numerais decimais/ Valor posicional dos algarismos | Representação proposicional |

O valor posicional de 2 no quociente, não foi devidamente compreendido por António, face ao resultado que obteve da divisão de 16 por 8. Se para dividir 16 por 8 o aluno multiplicou 16 por 100 (para lhe facilitar o cálculo), teria posteriormente de dividir 2 por 100 e assim obter 2 centésimas. Na sequência da explicação apresentada por António, Rui intervém chamando a atenção do colega para este facto:

***Rui***: Está errado.

***Professora Laura***: Porque é que está errado?

***Rui***: Porque ele pôs 1,2 . . . É 2 centésimas. Ele pôs foi 1 unidade e 20 centésimas.

***Diogo***: Mas a conta dele está bem. O resultado é que está mal.

(...)

***Rui***: Para fazeres $\frac{1}{8}$. 8÷8 dá 1, certo? E 16 a dividir por 8?

***António***: 2.

***Rui***: Sim, mas tu puseste 20.

***António***: Está correto.

Rui pretendia ajudar António a perceber que estava a dividir 16 centésimas por 8 o que iria corresponder a 2 centésimas no quociente e não a 20, pois ao indicar como resultado 1,2, o aluno estava a considerar que a parte decimal era constituída por 20 centésimas. O erro evidenciado por António foi mais frequente na turma M do que na turma L. Este diálogo entre Rui e António, mostra como, em certos momentos da experiência, os alunos traziam para a discussão coletiva aspetos das explicações dos colegas que não consideravam corretos e assim mereciam clarificação.

## 8.2. Síntese

A análise das estratégias dos alunos no cálculo mental com números racionais nas representações fracionária, decimal e percentagem a diversas questões permite identificar erros do tipo percetual, procedimental e concetual. Os *erros percetuais* surgem com maior frequência na representação decimal mas também associados às representações fracionária e percentagem. Na adição/subtração de numerais decimais surgem erros associados à visualização de 5 em vez de 0,5 e à visualização de uma adição quando se indica uma subtração (a operação realizada imediatamente antes era uma adição). Na divisão/multiplicação de numerais decimais, quando surge 0,2 numa expressão, os alunos visualizam-no como 2 ou $\frac{1}{2}$ e calculam metade (no caso da multiplicação) ou o dobro (no caso da divisão) da quantidade indicada. Em questões envolvendo mais do que uma representação do número racional, surge o mesmo tipo de erro associado à fração $\frac{1}{2}$ e para $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{8}$ em que os alunos as consideram equivalentes a 0,5 e 0,8 respetivamente. Na representação percentagem o erro de perceção surge quando os alunos realizam cálculos corretos numa expressão de valor em falta sem considerar o valor em falta, ou seja, no cálculo de $10\%\ de\ ? = 5$, calculam corretamente $10\%$ de 5.

Os erros percetuais podem ter sido uma consequência do próprio dispositivo de apresentação de tarefas utilizado, em conjunto com imagens mentais de factos ou procedimentos conhecidos dos alunos, uma vez que estes apenas tinham entre 15 e 20 segundos para realizar individualmente cada questão. Este curto tempo de apresentação e resolução de cada questão pode ter levados os alunos a focarem-se mais em determinados números de uma dada expressão, fazendo surgir imagens mentais significativas para cada um, como é o caso do cálculo de metades associado ao algarismo 2, de somas, produtos, diferenças ou quocientes que originam 5 ou 10. Os erros percetuais detetados não envolvem incompreensão de conceitos, uma vez que os alunos realizam corretamente o cálculo de acordo com o número que visualizam. São essencialmente fruto de uma visualização errada dos números ou operações indicadas.

Os *erros procedimentais* surgem essencialmente associados a erros de cálculo em todas as representações dos números racionais. A aplicação incorreta de factos numéricos ou procedimentos (esquecimento, por parte do aluno, em multiplicar o numerador ou denominador de uma fração no cálculo de uma fração equivalente) originou erros deste tipo. Tal como os erros de perceção, estes são erros que não estão associados à incompreensão de conceitos uma vez que, à semelhança dos anteriores, os alunos apresentam uma estratégia de resolução correta e, na maioria das vezes, identificam o erro quando explicam como pensaram para resolver uma dada expressão ou situação contextualizada. As representações mentais associadas a este tipo de erro são essencialmente imagens mentais de factos e procedimentos que surgem, certamente de forma inconsciente, no momento do cálculo pelo peso e importância que têm na memória de longo termo.

Os *erros concetuais* foram os que surgiram nas estratégias dos alunos de forma mais consistente em todas as representações dos números racionais e estão associados à ausência de compreensão concetual no que se refere à aprendizagem dos números racionais e suas operações. No caso dos erros concetuais, é possível estabelecer uma relação entre a representação do número racional envolvida e a origem do erro. Assim, na representação fracionária os erros concetuais detetados estão associados à generalização de regras memorizadas de umas operações para outras, o que faz com que os alunos usem na adição procedimentos da multiplicação ou divisão e vice-versa (e.g., na adição inverte a segunda parcela e substitui a adição pela subtração ou inverte a segunda parcela e substitui a adição pela multiplicação). Em geral, os erros mais frequentes associam-se à generalização não só de procedimentos mas também de outros conhecimentos matemáticos, como a relação entre operações (e.g., na divisão recorre-se sempre à multiplicação para calcular qualquer valor em falta). Estas generalizações parecem basear-se em representações proposicionais onde os alunos, usando os seus conhecimentos, umas vezes assentes em proposições verdadeiras e outras vezes em proposições falsas, aplicam este conhecimento a novas situações sem que isto seja possível. Pontualmente, o foco em factos numéricos, regras e procedimentos conhecidos dos alunos e a sua generalização parecem igualmente ter contribuído para erros que envolviam, por exemplo a incompreensão ou dificuldade de identificação de determinadas propriedades das operações, como no caso de dividir sempre a fração maior pela menor ou o de subtrair o menor número do maior quando o correto era o oposto.

Outro erro concetual analisado prende-se com a incompreensão do que representa uma fração e a relação existente entre numerador e denominador, o que faz com que os alunos, na adição/subtração, adicionem/subtraiam numeradores e denominadores concebendo uma fração como dois números independentes e não apenas um. Neste caso, a imagem mental de factos numéricos ou regras memorizadas comuns à adição e subtração de números naturais pode estar na origem deste erro exercendo influência sobre conhecimentos pouco consolidados sobre números racionais ou revelando conhecimentos não adquiridos.

O desconhecimento ou incompreensão de algumas propriedades das operações foram igualmente potenciadoras de erros deste tipo, uma vez que envolvem relações entre números numa mesma operação e entre operações, para as quais os alunos não estão devidamente despertos ou conscientes. Exemplo disto é a relação entre a operação multiplicação e divisão e entre a adição e subtração ou a relação entre dividendo, divisor e quociente numa divisão ou entre aditivo e subtrativo e resto numa subtração.

Por fim, o estabelecimento de equivalências incorretas entre representações dos números racionais, embora em menor número do que as anteriores, também originou erros concetuais, por não haver uma compreensão do porquê de uma fração ser equivalente a um determinado numeral decimal ou percentagem. A origem deste erro pode alicerçar-se em representações proposicionais onde os alunos partem de proposições falsas (como assumirem que $\frac{1}{8} = 0{,}2$) para proposições verdadeiras do ponto de vista matemático, uma vez que resolvem corretamente a expressão com a nova representação considerada, mas não respondem corretamente à questão colocada.

Na representação decimal a maioria dos erros concetuais dos alunos está associada à incompreensão da estrutura dos numerais decimais. Uma grande parte dos erros analisados envolve operações diferentes com as partes inteira e decimal de um numeral decimal sugerindo que os alunos concebem este numeral como dois números separados por uma vírgula. Outro aspeto que parece ter condicionado o sucesso no cálculo mental com esta representação, foi a influência de leituras incorretas dos numerais decimais e a dificuldade em relacionar linguagem natural com linguagem simbólica. Isto foi mais visível quando os alunos recorreram a contextos de dinheiro para os apoiar no cálculo. A dificuldade em identificar o valor posicional de quocientes e produtos também originou soluções erradas, embora os valores obtidos se aproximassem dos reais (indicam 1,8 em vez de 0,18). Este erro concetual relacionado com o valor posicional dos algarismos, acentua-se com a falta de sentido de operação multiplicação e divisão dos alunos, uma vez que muitas vezes entendem a operação multiplicação como uma operação em que os produtos aumentam e a divisão como a operação em que os quocientes diminuem, o que é verdadeiro para as operações com números naturais mas não no conjunto dos números racionais.

A incompreensão da relação entre operações e entre elementos de uma dada operação origina erros concetuais. Por exemplo, os alunos dividem por 2 quando numa divisão o divisor é $\frac{1}{2}$ (depois de converterem 0,5 em $\frac{1}{2}$), ou dividem e relacionam sempre o maior com menor número, quando a situação requer o oposto, como já referi na representação fracionária.

Nas situações contextualizadas, a interpretação das situações apresentadas, bem como a dificuldade em identificar o conceito matemático envolvido nessas situações foram os principais promotores de erros concetuais.

Os erros concetuais analisados na representação decimal parecem ter a sua origem maioritariamente em imagens mentais ao contrário do que acontecia com a representação fracionária. Este facto pode ser explicado pela experiência matemática dos alunos no conjunto dos números naturais que por serem aparentemente semelhantes aos numerais decimais ou por estes poderem ser operados como sendo números naturais (repondo o valor posicional retirado aquando da conversão de numeral decimal para número natural) os levam consciente ou inconscientemente a aplicar factos numéricos e/ou regras e procedimentos que regularmente usam nas operações com números naturais, embora estes nem sempre se apliquem de forma direta.

Na representação percentagem os erros concetuais estão associados à incompreensão da relação parte-parte ou parte-todo, levando os alunos a relacionarem os números que visualizam na questão de forma aleatória. A não compreensão de uma percentagem enquanto “uma parte de” ou operador leva-os a apresentarem, por vezes, resultados superiores ao todo sem revelarem sentido crítico acerca da situação, quando a percentagem a calcular é inferior a 100%, ou a adicionarem, subtraírem ou dividirem os números envolvidos na expressão. A relação da representação percentagem com a decimal fez com que as dificuldades associadas ao valor posicional dos algarismos originasse erros na representação percentagem, embora pontualmente.

As representações mentais associadas as erros dos alunos com esta representação referem-se essencialmente a imagens mentais de factos numéricos ou a representações proposicionais que têm na sua base generalizações de proposições verdadeiras associadas a conhecimentos e procedimentos.

Em questões com mais do que uma representação do número racional os alunos evidenciaram erros concetuais muito semelhantes aos já referidos. A estrutura dos numerais decimais e o valor posicional dos algarismos de um quociente volta a surgir, bem como a dificuldade em compreender o significado de fração enquanto operador, a relação parte-parte ou a equivalência de representações. No que se refere às representações mentais, os erros nas questões analisadas sugerem uma ênfase nas representações proposicionais influenciada por questões de linguagem (e.g., leitura dos numerais decimais) ou aplicação de conhecimentos baseados em proposições falsas e que não são válidos para a resolução das situações de cálculo mental em causa.

As dinâmicas de discussão desenvolvidas em ambos os ciclos de experimentação, que ilustrei com diálogos reveladores de interações entre professor, investigador e alunos e entre alunos, revelaram-se importantes para corrigir e ajustar a linguagem matemática dos alunos, para aferir aprendizagens (uma vez que um resultado correto ou errado diz muito pouco acerca do conhecimento matemático dos alunos), para enfatizar determinadas relações entre números e operações e para acrescentar conhecimento e promover aprendizagens de alunos para alunos (como no caso em que João explicou o papel do denominador e o sentido de operação multiplicação com numerais decimais). Estas discussões foram sobretudo importantes para clarificar os erros dos alunos promovendo momentos de reflexão individual e coletiva através do confronto de estratégias de cálculo mental e para melhorar o seu sentido crítico visível através das suas observações acerca das suas próprias estratégias ou acerca das estratégias de outros (como Rui ao chamar a atenção de Diogo para a sua estratégia na resolução de $0,75 \div ? = 3$).

# Capítulo 9

# Avaliação da experiência de ensino

Neste capítulo analiso o *design* da experiência de ensino, bem como a forma como decorreu a realização desta experiência nos dois ciclos de experimentação. Esta análise tem por base a sistematização de ideias resultantes da análise micro realizada no Capítulo 6, bem como das entrevistas realizadas aos alunos e professoras em ambos os ciclos de experimentação.

## 9.1. Avaliação do *design* da experiência de ensino

O *design* da experiência de ensino (tarefas e gestão da discussão na sala de aula) foi alvo de reflexão e avaliação sistemática em ambos os ciclos de experimentação, tendo originado o refinamento da sequência de tarefas e das próprias tarefas, bem como o ajustamento da forma como as professoras foram gerindo a discussão na sala de aula, tal como descrevi no Capítulo 6. Nesta secção pretendo refletir e avaliar o *design* da experiência de ensino como um todo.

Era objetivo da experiência de ensino promover o desenvolvimento e apropriação de estratégias de cálculo mental dos alunos, bem como contribuir para a redução de dificuldades e erros por estes apresentados nos momentos de discussão coletiva. De um modo geral, este objetivo foi cumprido, como decorre da análise realizada nos Capítulos 7 (estratégias dos alunos) e 8 (erros dos alunos) e reforçada através da entrevista realizada no final de cada um dos ciclos de experimentação a José (ciclo I) e Rui (ciclo II). No entanto, considero que a complexidade do ambiente de sala de aula, o contexto e realidade escolar e a heterogeneidade dos alunos (nomeadamente no que respeita a conhecimentos prévios) entre ciclos de experimentação e dentro do próprio ciclo, condicionou, de certo modo, o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos. Nem todos os alunos evidenciaram ter ampliado o seu reportório de estratégias de cálculo mental nem eliminado determinados erros no cálculo. Isto foi visível em ambos os ciclos de experimentação através da participação dos alunos, pela evolução das estratégias que partilharam ao longo da experiência de ensino e pela forma como se apropriaram de modo compreensivo de determinadas estratégias discutidas na sala de aula. Esta apropriação e compreensão permitiram a alguns alunos a correção de erros embora, em alguns casos, isto não tenha acontecido, verificando-se a persistência de alguns erros até ao final da experiência.

Na experiência de ensino as tarefas foram construídas tendo por base um conjunto de princípios orientadores. Estes princípios (a par do estudo preliminar) apoiaram e consciencializaram-me para a necessidade de construir questões em contexto matemático (expressões) e não matemático (situações contextualizadas), expressões com e sem valor em falta e questões relacionadas entre si, independentemente do contexto (relação entre expressões com e sem valor em falta e entre estas expressões e situações contextualizadas). Esta rede de relações entre questões tinha como objetivo ajudar os alunos a desenvolverem um reportório de estratégias baseadas em relações entre contextos, representações (mentais e simbólicas), números e operações. Apesar de considerar que estas opções referentes às tarefas foram adequadas, tendo em conta os alunos que participaram no estudo, considero que num hipotético terceiro ciclo de experimentação se poderia incluir um maior número de situações contextualizadas de forma a usar sempre tarefas mistas (expressões e situações contextualizadas) conferindo à sequência de tarefas um maior equilíbrio entre questões de ambos os contextos. Esta proposta de reformulação para o futuro tem por base as dificuldades manifestadas pelos alunos nos dois ciclos de experimentação. No ciclo I de experimentação os alunos interpretaram com relativa facilidade expressões, mas não tanto situações contextualizadas e no ciclo II de experimentação verificou-se exatamente o contrário, daí a necessidade de incluir mais tarefas mistas no ciclo II recorrendo ao desdobramento de algumas das tarefas utilizadas no ciclo I. Uma sequência de tarefas mistas poderia assim colmatar algumas das dificuldades sentidas, tanto no ciclo I como no ciclo II.

No que se refere à gestão da discussão na sala de aula, esta centrou-se no questionamento aos alunos (algumas evidências são apresentadas no Capítulo 8), principalmente por parte das professoras e, por vezes, da minha parte, tendo, no entanto, surgido momentos de questionamento entre pares, interação esta da iniciativa dos alunos ou fomentada pelas professoras em ambos os ciclos de experimentação. Os momentos de discussão coletiva revelaram ser os mais importantes neste processo pois permitiram-nos (investigadora e professoras) adquirir conhecimento e compreender o cálculo mental dos alunos e as dinâmicas inerentes ao desenvolvimento das suas estratégias. Este conhecimento adquirido na prática foi de extrema importância para a preparação, experimentação e reflexão da experiência de ensino e consequente ajustamento da ação das professoras na sala de aula. Este ajustamento passou pelo reforço no questionamento aos alunos (ou a um determinado aluno para incentivar a participação), na discussão e ênfase em relações numéricas importantes (como a conversão entre representações dos números racionais) ou entre operações e no reforço de aprendizagens detetadas como menos conseguidas nos momentos de partilha de estratégias. A necessidade de discutir, por diversas vezes, normas de sala de aula foi algo que surgiu apenas no ciclo de experimentação II.

As dinâmicas desenvolvidas nos momentos de discussão coletiva, com especial ênfase no questionamento aos alunos, revelaram-se frutíferas pois criaram hábitos de discussão nos alunos e apoiaram-nos na construção de um reportório de estratégias de cálculo mental baseadas em relações numéricas e na clarificação de erros. Os casos de José (ciclo I) e Rui (ciclo II) são evidência disto e mostram que o objetivo da experiência de ensino foi alcançado, embora isto não se tivesse evidenciado em todos os alunos pelas condicionantes que referi anteriormente. A intervenção destes alunos, ao longo da fase de experimentação, evoluiu positivamente notando-se na entrevista individual final uma progressão nas estratégias e na forma como explicitaram algumas dessas estratégias.

### O caso de José

José (ciclo I) sempre foi um aluno pouco participativo. Participava essencialmente incentivado pela professora. Só intervinha voluntariamente quando sentia confiança para o fazer. O número de respostas corretas que apresenta em cada tarefa (Quadro 96) pode não ser indicativo de estratégias corretas de resolução, contudo dá-nos uma ideia geral da sua prestação ao longo da experiência de ensino. O aluno respondeu corretamente a aproximadamente 46% das questões (48 em 105), sendo que o baixo número de respostas corretas em algumas questões pode ser indicativo de dificuldades da sua parte. Neste sentido, a análise do Quadro 96 leva-me a concluir que José teve dificuldades em multiplicar e dividir numerais decimais (tarefa 5) e frações (tarefa 2) e em operar com mais do que uma representação do número racional (tarefas 3, extra, 6, 7 e 8) não só em expressões, mas também em situações contextualizadas. Nas tarefas 9 e 10 o número de respostas corretas apresentadas por José aumenta, o que pode ser indicativo de alguma evolução na forma como opera com as diversas representações dos números racionais em ambos os contextos apresentados (matemático e não matemático), algo onde tinha mostrado dificuldade (nas tarefas 3, extra, 6, 7 e 8).

Quadro 96. Questões corretas apresentadas por José ao longo do ciclo de experimentação I.

| Tarefa | Operação/Representação do número racional | Número de questões | Questões corretas |
|---|---|---|---|
| 1 | Adição/subtração de frações | 10 | 6 |
| 2 | Multiplicação/divisão de frações | 10 | 4 |
| 3 | Quatro operações com decimais e frações | 9 | 3 |
| 4 | Adição/subtração de decimais | 10 | 8 |
| 5 | Multiplicação/divisão de decimais | 10 | 1 |
| Extra | Quatro operações com decimais e frações | 10 | 4 |
| 6 | Quatro operações com frações e decimais | 8 | 3 |
| 7 | Percentagens | 10 | 4 |
| 8 | Multiplicação com as três representações | 10 | 4 |
| 9 | Quatro operações e as três representações | 10 | 6 |
| 10 | Quatro operações e as três representações | 8 | 5 |
| Entrevista | Quatro operações e as três representações | 12 | 7 |

No final da experimentação, realizei uma entrevista aos alunos da turma M com 12 questões semelhantes às utilizadas na experiência de ensino, contemplando as quatro operações básicas entre a mesma representação do número racionais ou entre representações diferentes, em contextos matemáticos e não matemáticos. Dos 20 alunos da turma M, José foi o que respondeu corretamente ao maior número de questões (7 em 12) no menor tempo de entrevista (cerca de 25 minutos). De salientar que na entrevista o *PowerPoint* não foi temporizado e que os alunos entrevistados usaram para o cálculo o tempo que necessitaram.

Centrando-me nas dificuldades manifestadas por José ao longo da experimentação e que referi anteriormente, a entrevista mostra que o aluno continua com algumas dificuldades em multiplicar frações e numerais decimais. Na questão $? \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ responde $\frac{1}{3}$ não conseguindo explicar o porquê desta sua resposta e na questão $0{,}7 \times 0{,}40$, responde 0,028 referindo que: "Eu tirei os zeros e multipiliquei o 7×4 que deu 28. Mas tinha três casas para pôr", revelando ainda alguns problemas na colocação do valor posicional dos algarismos.

No que se refere à sua evolução, saliento o facto de José ter conseguido realizar com sucesso a divisão de frações e de numerais decimais e a multiplicação de números racionais envolvendo duas representações diferentes em expressões e situações contextualizadas, como mostram as estratégias que apresentou na entrevista (Quadro 97).

Quadro 97. Estratégias de José às questões da entrevista final.

| Questão da entrevista | Estratégia de José |
|---|---|
| $\frac{9}{8} \div \frac{3}{4}$ | $\left[\frac{3}{2}\right]$ a dividir é a multiplicar pelo inverso do divisor só que eu fiz como se fosse uma multiplicação . . . só que neste caso dividi . . . 9÷3 e 8÷4. |
| $3{,}1 \div ? = 6{,}2$ | 3,1. tinha que dividir por um número que desse 6,2. Como nas frações também usa-se para dar um número maior, usa-se $\frac{1}{2}$ e . . . então desse número penso que iria dar 6,2. |
| $\frac{4}{8} \times 0{,}25$ | $\frac{4}{32}$. Transformei o 0,25 em fração que deu $\frac{1}{4}$ e depois multipliquei 8×4 dava 32 e 4×1 dava 4. |
| De uma peça de tecido com 24,6 $m^2$ a D. Vera usou $\frac{1}{4}$. Que quantidade de tecido usou? | 6,15. Então 6÷4, o 4 cabia 1 vez no 6 mas depois teria de ser metade e como era metade eu pus 5. |

As estratégias apresentadas por José são evidência de que este ultrapassou as dificuldades iniciais, integrando no seu conhecimento um conjunto de relações entre números e operações. Na resolução de $\frac{9}{8} \div \frac{3}{4}$ destaco o facto de o aluno reconhecer que pode dividir duas frações usando a regra "inverte e multiplica" mas que também pode dividir numeradores e denominadores (quando estes são múltiplos um do outro). Saliento a forma como José se refere à regra "inverte e multiplica": "Multiplicar pelo inverso do divisor", algo pouco comum entre os alunos e que provavelmente se deve ao facto da professora Margarida enfatizar esta questão no seu discurso uma vez que reconhece que alguns alunos aplicam a regra sem sentido invertendo o dividendo em vez do divisor.

Na resolução de $3{,}1 \div ? = 6{,}2$, José mostra uma evolução significativa. A expressão "Como nas frações também usa-se para dar um número maior, usa-se $\frac{1}{2}$" mostra que compreende que a divisão de dois números racionais pode originar um número maior que o dividendo e o divisor (sentido de operação). Curiosamente José refere-se verbalmente a $\frac{1}{2}$ mas regista como resultado 0,5 o que também revela alguma flexibilidade no uso de diferentes representações do mesmo número racional. Recordo que na tarefa onde José multiplicou e dividiu pela primeira vez numerais decimais (tarefa 5), apenas acertou uma das questões, a que se referia a $0{,}25 \times 4$.

As tarefas envolvendo mais do que uma representação dos números racionais revelaram ser de difícil resolução para José, começando a surgir alguma evolução a partir das tarefas 9 e 10 como já referi. A resolução da questão que referi anteriormente, onde pensa em $\frac{1}{2}$ e regista o resultado 0,5 e na questão $\frac{4}{8} \times 0{,}25$, onde de imediato transforma 0,25 em $\frac{1}{4}$ para realizar o cálculo, mostra que o aluno compreendeu a vantagem de transitar entre representações equivalentes dos números racionais, ultrapassando algumas das dificuldades que tinha inicialmente.

Por fim, na resolução da situação da peça de tecido, José identifica que tem que dividir 24,6 por 4. Ao perceber que tinha realizado a divisão do numeral decimal por partes ($24 \div 4$ e $6 \div 4$) questionei-o apenas acerca da forma como dividiu 6 por 4. A sua explicação mostra que compreende o conceito de divisão como agrupamento.

### O caso de Rui

Rui (ciclo II) sempre foi um aluno muito participativo, embora revelasse muitas dificuldades na comunicação oral, apresentando um discurso muitas vezes confuso. Era acompanhado pela terapeuta da fala dadas as dificuldades de comunicação que manifestava. De entre os 39 alunos que participaram neste estudo, foi o que respondeu, na entrevista, ao maior número de questões no menor tempo (16 minutos), quando a maioria dos alunos entrevistados demorou entre 25 e 30 minutos. Foi igualmente o aluno que respondeu corretamente a mais questões na turma L.

Ao longo da experimentação Rui respondeu corretamente a cerca de 57% das questões (60 em 105), embora, como referi no caso de José, o número de resposta corretas possa não ser indicativo de estratégias de resolução corretas. O Quadro 98 mostra o número de respostas corretas apresentadas por Rui às 11 tarefas da experiência de ensino e na entrevista e a sua análise leva-me a inferir que Rui teve mais dificuldades na multiplicação e divisão de frações (tarefa 2) e no cálculo de percentagens (tarefa 7) seguida das operações com mais do que uma representação do número racional (tarefas 3 e 6) e da multiplicação e divisão de numerais decimais. A partir da tarefa 8, Rui mostrou alguma consistência no número de respostas corretas apresentadas (mais de 50% de respostas corretas) embora tivessem existido tarefas onde acertou 100% do número de questões (tarefa 4) ou 80% (tarefa extra).

Quadro 98. Questões corretas apresentadas por Rui ao longo do ciclo de experimentação II.

| **Tarefa** | **Operação/Representação do número racional** | **Número de questões** | **Questões corretas** |
|---|---|---|---|
| 1 | Adição/subtração de frações | 10 | 8 |
| 2 | Multiplicação/divisão de frações | 10 | 2 |
| 3 | Quatro operações com decimais e frações | 9 | 3 |
| 4 | Adição/subtração de decimais | 10 | 10 |
| 5 | Multiplicação/divisão de decimais | 9 | 3 |
| Extra | Quatro operações com decimais e frações | 10 | 8 |
| 6 | Quatro operações com frações e decimais | 9 | 3 |
| 7 | Percentagens | 10 | 2 |
| 8 | Multiplicação e as três representações | 10 | 7 |
| 9 | Quatro operações e as três representações | 9 | 6 |
| 10 | Quatro operações e as três representações | 9 | 7 |
| Entrevista | Quatro operações e as três representações | 12 | 7 |

No final do ciclo de experimentação II Rui foi sujeito à mesma entrevista que José, apresentada nos mesmos moldes. Das 12 questões acertou 7 (tal como José). Na entrevista continuou a manifestar alguma confusão acerca da forma como deve operar com numerais decimais. Na questão $0{,}7\times0{,}40$ revela, tal como José, problemas na colocação do valor posicional dos algarismos: "Vinte e oito décimas . . . Então, tirei zero de quarenta e pensei 7 × 4. Equivale a 28 . . . E pus a vírgula no sítio" e na questão 3,1÷?=6,2, envolvendo a divisão de numerais decimais dá como resultado 2,2, não conseguindo explicar como fez o cálculo. Apenas justifica o seu resultado dizendo que: "Quando nós dividimos por decimais é como se nós tivéssemos a fazer vezes". Esta observação revela que Rui tem ideias confusas acerca da divisão de numerais decimais e que poderá estar a confundir procedimentos da divisão de frações (inverte e multiplica) com a divisão de numerais decimais. O resultado que apresenta sugere que este poderá ter operado primeiro com a parte decimal (2×2=2) e depois com a parte inteira (3×2=6).

No que se refere à evolução manifestada por Rui este revela ter ultrapassado as suas dificuldades na multiplicação e divisão de frações, na multiplicação de números racionais envolvendo duas representações destes números e, principalmente, uma evolução significativa ao nível do cálculo de percentagens como mostram as suas estratégias (Quadro 99).

No cálculo de $\frac{1}{4}\ de\ \frac{1}{4}$ responde $\frac{1}{8}$ mas ao explicar a sua estratégia reconhece rapidamente que $4 \times 4$ é 16 e não 8. Quando a multiplicação envolve a representação fracionária e decimal, como no caso de $\frac{4}{8} \times 0{,}25$, Rui converte o numeral decimal em fração e opera corretamente mostrando conhecer a equivalência entre representações dos números racionais. Neste caso, a sua explicação mostra o quanto o seu discurso é confuso uma vez que omite pormenores, como o caso da palavra "centésimas" ou refere uma operação que na realidade não é o que realiza ("2 por 2" em vez de 1×1). A apresentação de estratégias por parte de Rui sempre foram acompanhadas de algum questionamento, quer por parte da professora Laura quer da minha parte, com o objetivo de ajudar Rui a clarificar o seu discurso a mais possível.

Na divisão de duas frações, Rui mostra ter-se apropriado de uma estratégia que até, não sendo a que mais surgiu na discussão em sala de aula, parece ter feito sentido para si. Por norma os alunos da turma L recorriam à regra "inverte e multiplica" para dividir duas frações.

No cálculo de percentagens Rui mostra ter ultrapassado com sucesso as suas dificuldades, recorrendo agora a relações numéricas discutidas em sala de aula. Das 16 questões envolvendo a representação percentagem (propostas a partir da tarefa 7), Rui apenas acertou 5. Relembro que inicialmente Rui calculava 10% de uma quantidade multiplicando por 10 e que considerou que o valor em falta na expressão __% de 30=0,3 seria 100. Na entrevista a forma como calcula 5% de __=10, apesar do seu discurso pouco claro, mostra que se centra em relações de metade/dobro entre a percentagem (5%) e o valor correspondente a essa percentagem (10) recorrendo a 50% e a 5% de uma mesma quantidade para explicar o seu raciocínio. No cálculo de 30% de 80 Rui recorre à decomposição de 30% (5%+25%) e calcula 5% relacionando-o com o cálculo de 10%. A sua explicação mostra que já não concebe o cálculo de 10% como a multiplicação por 10, mas sim a divisão por 10 (se fosse 10% ia ficar sem um zero) e que o cálculo de 25% é realizado com recurso a metades, uma vez que, quando questionado acerca da forma como calculou 25% de 80 responde:" Então, a metade menos a metade". O cálculo de metades/dobros foi algo que Rui incorporou de forma significativa no seu conhecimento uma vez que recorreu a ele diversas vezes, inclusive na resolução da situação contextualizada em que necessitava de calcular 24,6÷4.

Quadro 99. Estratégias de Rui a questões da entrevista final.

| Questão da entrevista | Estratégia de Rui |
|---|---|
| $\frac{1}{4} de \ \frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ . . . $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$, quer dizer $\frac{1}{4}$ vezes $\frac{1}{4}$. Deu $\frac{1}{8}$ . . . Então, 8. 4× 4, por acaso devia dar, devia dar 16. |
| $\frac{9}{8} \div \frac{3}{4}$ | $\frac{3}{2}$. . . Então 9 a dividir por 3, 3. 8 a dividir por 4, 2. |
| $\frac{4}{8} \times 0{,}25$ | $\frac{1}{8}$. . . $\frac{4}{8}$ equivale a um meio. Transformei 25 [centésimas] em $\frac{1}{4}$ .Depois 2 por 2 (antes 1 ×1). 2 por 4, 8 (antes 2×4=8). |
| 5% de ?=10 | 200. . . . 50% de 60 equivale 30 e 5% de 60 era 3. . . era metade [refere-se ao 10], mas com o zero [refere-se ao número em falta]. |
| 30% de 80 | 24. . . Então 5% de 80 equivale a 4 porque se fosse 10% ia ficar sem um zero. . . Depois pensei o 25 para por o 30. Então, 25 de 80, 25% de 80 equivale a 20. Isto dá 24. |
| De uma peça de tecido com 24,6 $m^2$ a D. Vera usou $\frac{1}{4}$. Que quantidade de tecido usou? | 6,15 $m^2$. . . metade da metade. Por isso é metade, deu 12,30. Depois pensei outra vez na metade 6,15. |

Os resultados das entrevistas realizadas a José (ciclo I) e Rui (ciclo II) sugerem que o *design* da experiência de ensino foi adequado uma vez que originou aprendizagens nos alunos. As explicações destes alunos na entrevista final mostram que estes se apropriaram de diversas estratégias, por vezes pouco comuns na discussão em sala de aula como no caso de Rui, bem como de um conjunto de relações numéricas que lhes permitiram ultrapassar muitas das dificuldades de cálculo que sentiam inicialmente e que os conduziam a soluções incorretas. Contudo, a persistência de alguns erros, em especial na multiplicação e divisão de numerais decimais e na reposição do valor posicional dos algarismos, alerta para a necessidade de continuar a discutir estas questões com os alunos. Na experiência de ensino a multiplicação e divisão de numerais decimais poderá não ter sido suficientemente discutida. Questões semelhantes a $0{,}7\times0{,}40$ surgiram poucas vezes e as que surgiram deram origem a erros semelhantes aos manifestados por José e Rui. A inclusão na experiência de ensino de mais expressões e situações contextualizadas onde surja principalmente a multiplicação mas também a divisão de numerais decimais poderá contribuir para o aprofundamento de situações onde os alunos tenham que decidir qual o valor posicional dos algarismos.

## 9.2. Avaliação da realização da experiência de ensino

Em cada um dos ciclos de experimentação as professoras Margarida (ciclo I) e Laura (ciclo II) assumiram um papel importante no processo de desenvolvimento de estratégias dos alunos, desde a fase de preparação, passando pela gestão da aula até à reflexão e ajustamento da experiência de ensino. No final dos ciclos I e II entrevistei Margarida e Laura, respetivamente, na tentativa de perceber qual a opinião de cada uma acerca da experiência de ensino e sua realização, como percecionaram a articulação realizada entre o que estava a ser desenvolvido na experiência de ensino e as restantes aulas de Matemática, bem como o que aprenderam os alunos neste processo de desenvolvimento de estratégias de cálculo mental.

As professoras avaliam de forma positiva a realização da experiência de ensino em que estiveram envolvidas salientando aspetos que, para cada uma, foram mais significativos ao nível da organização da experiência, da aprendizagem dos alunos e até das suas próprias aprendizagens.

Questionadas acerca da forma como avaliam a integração do desenvolvimento do cálculo mental no percurso de aprendizagem dos alunos, ao longo de um determinado período de tempo (entre 3 e 4 meses), como foi o caso desta experiência de ensino, ambas reconhecem que esta opção trouxe mais-valias para este processo, apoiando a articulação entre aprendizagens.

Margarida encarou as sessões de cálculo mental como uma "continuidade da aula" acrescentando que:

> Foi sempre um auxiliar, um pouco estável. No fim eu não sentia estar com mais um conteúdo, mais uma coisa a trabalhar, não era. Estava integrado, fazia parte daquilo, saber calcular volumes e saber fazer determinados cálculos, que eram multiplicações ou assim. Em cálculo mental ajuda imenso.

Esta ideia de continuidade é partilhada por Laura e pelos alunos da turma L. Na entrevista, esta professora assume que intencionalmente propunha tarefas onde pudessem surgir situações de cálculo mental nas aulas de Matemática para reforçar aprendizagens detetadas como menos conseguidas nas sessões de cálculo mental:

> Por vezes propunha tarefas quando tínhamos problemas, propunha problemas idênticos no contexto de sala de aula. Quando nos deparávamos com cálculos de tarefas, revisitava episódios das sessões de cálculo mental para relembrar como é que se pode resolver aquela situação . . . E eu acho que também houve momentos em que os miúdos trouxeram situações de sala de aula para as sessões de cálculo mental. Eu acho que eles nem sequer distinguiam uma coisa da outra . . . Inclusive houve aulas que eu trouxe de propósito para melhorar algumas coisas que não tinham, por exemplo da operação inversa, que não tinha ficado bem trabalhadas no cálculo mental que eu achava que podiam ser alvo de maior aprofundamento.

Esta continuidade apoiou a integração e articulação de aprendizagens muitas vezes concretizada de forma intencional por Laura, tendo em conta as dificuldades manifestadas pelos seus alunos em Matemática. As características dos alunos da turma M poderão ter levado Margarida a deixar que esta integração e articulação do cálculo mental surgissem naturalmente nas restantes aulas de Matemática. Esta professora considera que a sintonia natural entre aprendizagens teve efeitos positivos para os seus alunos no que respeita à aquisição de conceitos (fração e percentagem) e disciplinou o uso da máquina de calcular na sala de aula:

> As coisas fluem, não integrei nada, nem nunca mais pensei nisso. Quer dizer, as coisas veem naturalmente e quando é preciso a gente faz uso delas. Então não se lembram… Primeiro comecei a deixar cair a máquina de calcular, um bocado por imposição e porque também sempre achei que a máquina não era para usar para fazer continhas de que eles podem muito bem fazer rapidamente e por isso. Mas também estando a pensar na experiência, fui mais incentivada a ter cuidado e acho que eles fazem bom uso, acho que cresceram e perceberam, acho que eles percebem o que é uma fração, quase que aposto que metade dos alunos da escola não sabe o que é uma fração, não percebem o sentido de uma percentagem, não percebem. Fazem mecânicas certinhas, mas não sabem o que aquilo efetivamente é, e acho que estes alunos sabem.

Do ponto de vista da aprendizagem, Laura também considera que, no caso dos seus alunos, a integração do cálculo mental no percurso de aprendizagem facilitou o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Refere a este respeito:

> Sou professora há nove anos nesta escola e portanto este meio mais fragilizado, em termos de capacidade, neste meio eu tenho muita dificuldade em trabalhar o raciocínio proporcional e o que eu senti nesta turma é que tive mais facilidade em trabalhar o raciocínio proporcional e tive mais alunos a compreender, a desenvolver o raciocínio proporcional. Eu não posso fazer generalizações mas eu posso, inferir, eu acho que é muito porque tiveram a experiência de ensino. Porque como havia ali muitas, como a experiência de cálculo mental implica que eles desenvolvam raciocínio relacional, isso vai inevitavelmente influenciar o raciocínio relacional que neste momento é uma turma que já interiorizou completamente.

O facto da experiência de ensino ter decorrido na sala de aula de Margarida e de Laura cerca de 3 a 4 meses não foi contraproducente, antes pelo contrário. Margarida considera que não teria havido aprendizagens significativas se a experiência tivesse uma duração menor, alertando para a necessidade de integrar e relacionar aprendizagens em geral:

> Vinhas cá e davas duas semanas. Agora vamos trabalhar durante duas semanas cálculo mental. Não teria havido aprendizagem nenhuma, como eu acho que não há aprendizagem às vezes das outras coisas se a gente não as for integrando. Os racionais, mais, as coisas têm de ser sempre retomadas e pautadas, por isso.

Para Laura, o tempo de desenvolvimento da experiência não foi excessivo. Considera que esta experiência deveria de ter sido realizada também no 5.º ano ou ter começado no início do 6.º ano. Para a professora, é no final da experiência que os seus alunos estão preparados para aprendizagens mais profundas:

> Eu se pudesse tinha tido esta experiência de ensino, desde o princípio do ano, ou desde o ano passado, até ao final. Porquê? Porque o que eu sinto é que agora é que os miúdos estavam prontos para fazermos aprendizagens mais profundas ainda . . . Porque agora é que já interiorizaram as regras de discussão, as normas e qual é o seu papel dentro da sala de aula. Só agora é que eles começaram a perceber quais eram as mais-valias de ouvir os outros e as estratégias dos outros, só no último mês é que eles começaram a nomear as estratégias. Ah, notei que muitos alunos registavam apontamentos das estratégias, porque houve um momento que nós começamos a pedir que um aluno reescrevesse, fizesse um resumo da sessão e portanto eles nunca sabiam quem é que era esse aluno. Eu acho que essa estratégia foi fabulosa, porque conseguimos que miúdos que nunca fazem registos na aula de Matemática, sem serem os registos que a professora manda copiar do quadro, passaram a fazer registos sobre as aprendizagens na aula de Matemática . . . Eles recorriam aos registos para fazer a síntese da sessão . . . E portanto esses registos foram muito importantes para eles.

Laura considera que a experiência de ensino e as dinâmicas desenvolvidas contribuíram para disciplinar os alunos, principalmente no que se refere à organização da discussão na sala de aula, onde se registaram alguns avanços e recuos, e ao modo como passaram a encarar o registo de ideias e raciocínios na aula de Matemática. A necessidade de realizar registos das estratégias discutidas na sala de aula ocorreu apenas na turma L, muito por necessidade dos alunos. Estas dinâmicas de discussão foram sendo transpostas para as restantes aulas de Matemática pelos alunos de forma natural, como refere a professora com agrado e centrando-se num exemplo recente:

> O que é uma discussão matemática e como é que se podem ter discussões matemáticas. Eu por exemplo, hoje tive um aluno que disse: "OK, mas se achas isso, traz isso para debate da turma". Portanto são estes tipos de frases que são depois ditas por estes miúdos, na minha aula em que tu não estás e portanto não… que me fazem dar conta. Eles hoje discutiram um trabalho de casa, entre eles, em que eu só tive de entrar em alguns momentos para redizer o que uma criança estava a dizer para os outros compreenderem porque eles já conseguem fazer uma discussão do princípio ao fim sozinhos, em que eles próprios, é muito engraçado, porque eles próprios já fazem o redizer. Repara, tenho alunos que fazem o meu

> papel na discussão, eles já perceberam que tem de haver ali um orquestrador da discussão e fazem essa orquestração entre eles.

Ambas as professoras consideram a discussão na sala de aula como o momento mais importante de toda a experimentação. Assim, Margarida assume que a "discussão foi o ponto forte disto tudo" e desvaloriza o facto de os alunos terem mais ou menos tempo para resolverem individualmente cada uma das questões de cálculo mental: "Acho que não se podia dar muito tempo. Acho que não faz diferença eles terem errado à primeira, desde que depois a discussão fique mais rica". Acrescenta, ainda, que a discussão na sala de aula desenvolveu o sentido crítico dos alunos pois deu-lhes oportunidade para mostrarem o que sabiam e não sabiam levando-os a estarem atentos e a criticaram as explicações uns dos outros:

> Desenvolveu todo o sentido crítico, o cálculo mental. Eles perceberam, aprenderam na discussão determinadas técnicas e processos de rapidamente chegarem ao que queriam sem ser pelo algoritmo . . . [Os alunos] sabiam, fizeram o disparate, continuaram a fazê-lo . . . Mas é engraçado que fazem, cometem o erro e o criticam às vezes de imediato.

Laura destaca a vantagem de se discutirem estratégias e erros dos alunos e da discussão coletiva permitir a apropriação de estratégias por parte destes:

> Como eu já disse, eu acho que é muito importante [a discussão], porque permite que eles não só, aumentem a sua panóplia de estratégias porque vão assumindo as estratégias uns dos outros, inclusive, nós temos evidências quando eles dizem, utilizem a estratégia do não sei quantos. Eles não se limitam só a aprender as estratégias que eles conseguiram desenvolver, mas também a dos outros. Mesmo as estratégias que nós vamos trazendo à discussão, não é? Porque quando vamos discutir erros, os erros dos alunos, nós na realidade vamos introduzindo estratégias, nós não demos uma aula de estratégias, não é?

As professoras identificam algumas das aprendizagens realizadas pelos alunos, mas também referem que a participação nesta experiência de ensino foi uma aprendizagem para elas. Na turma M, o trabalho em torno da representação percentagem marcou Margarida uma vez que percebeu que os alunos tinham conhecimentos pouco consistentes. Segundo a professora, as sessões de cálculo mental apoiaram a compreensão e consolidação do conceito de percentagem e sua utilização noutros tópicos, como foi o caso de organização e tratamento de dados:

> Penso que sabem o que é uma percentagem. Mas é um conceito que… Acho que, mesmo as frequências e tudo, perceberam muito bem. A frequência relativa, quando voltei, por exemplo quando voltei às frequências relativas, agora, ao fazer as revisões, acho que aquilo lhes fez muito mais sentido do que tinha feito.

Outra aprendizagem reconhecida por Margarida como bem conseguida foi a facilidade com que os alunos passaram a transitar entre representações dos números racionais não ficando agarrados à representação que aparecia na expressão. Isto deu-lhes mais liberdade no cálculo e oportunidade para porem em prática estratégias pessoais de cálculo mental. Como refere:

> Sim e acho que [o poder recorrer a representações equivalentes] quebrou um bocado aquela noção da conceção, o professor quer que eu trabalhe com frações, ou o professor quer que eu trabalhe… Eles às vezes têm essa ideia que o professor vai gostar mais que eu faça com frações. Libertaram-se disso, fazem o que acham que lhes é mais útil naquele momento.

A propósito do uso das três representações dos números racionais, Laura considera que o auge da experiência de ensino "foi quando juntamos as três representações". Isso evidencia a importância e utilidade do trabalho com as representações fracionária, decimal e percentagem nesta experiência.

Do ponto de vista da comunicação e do raciocínio, Margarida percecionou um grande avanço na forma dos alunos expressarem os seus raciocínios de forma mais clara e evidenciando compreensão:

> [Evolução] na linguagem. Muita, muita. Isso acho que sim . . . Eu acho que eles falam com muito mais sentido, justificam as coisas, muito, de uma maneira muito mais correta do ponto de vista matemático e a perceberem o que estão a dizer . . . Porque eles ouvem-se e criticam logo quem errou. Podiam estar a ouvir o outro e não estar a perceber porque é que, mas têm ali um sentido critico mais apurado do próprio trabalho deles e de ouvir os outros e perceber.

No que se refe ao raciocínio, a professora refere que ficou surpreendida com as estratégias de alguns alunos. Provavelmente se não se tivessem desenvolvido discussões de cálculo mental na sala de aula, Margarida nunca se teria apercebido da complexidade dos raciocínios dos seus alunos: "Surpreendida. Se calhar não tinha dado por alguns alunos que conseguiam fazer raciocínios a um nível tão elaborado, que era difícil a gente segui-los". De um modo geral, a professora considera que todos os seus alunos evoluíram de algum modo, mas admite que "50% da turma está num nível bastante bonzito".

Pelo seu lado, Laura também realça aspetos positivos do ponto de vista da aprendizagem dos seus alunos e o facto de se ter sentido necessidade de desdobrar várias sessões de cálculo mental em duas, pelas dificuldades manifestadas pelos alunos, não foi para ela uma perda de tempo. Mais uma vez, a sua resposta enfatiza a importância do cálculo mental ser desenvolvido de forma integrada:

> Desenvolvemos o raciocínio proporcional nas crianças, nós desenvolvemos a capacidade de olhar para problemas e formalizar, por exemplo, com impacto positivo na que diz respeito à geometria. Quando trabalhámos as percentagens teve um impacto positivo, quer na proporcionalidade quer na organização e tratamento de dados porque os alunos deram sentido com mais facilidade às tarefas propostas da OTD. Portanto de facto utilizou-se $\frac{2}{3}$ do tempo letivo com esta experiência de ensino, mas não era estanque e como não era estanque relativamente ao resto dos tópicos, foi alimentar o trabalhar com os tópicos.

No âmbito da Geometria, Laura acrescenta ainda algumas das aprendizagens que considera terem sido realizadas pelos seus alunos:

> Relativamente à geometria esta experiência de ensino, permitiu que eles compreendessem melhor a questão das fórmulas, da área, portanto o conceito de área, perímetro e volume é trabalhado na geometria, mas depois quando temos situações problemática onde eles têm que utilizar, têm que formalizar com situações de lacuna. Eles têm muita dificuldade em utilizar a fórmula e portanto vem ajudar a trabalhar o cálculo mental, a parte algébrica. É assim, aritmética da geometria. Depois relativamente à medida ajudou porque eles vão desenvolvendo o sentido de número racional e a medida tem muito a ver com o número racional e portanto há uma relação intima no trabalho de medida.

Outra aprendizagem que Laura referiu na entrevista final foi o facto de os seus alunos terem transitado de um raciocínio aditivo para o raciocínio multiplicativo ao longo da experimentação:

> Alguns alunos que estavam ainda muito no raciocínio aditivo passaram para o raciocínio multiplicativo. A dada altura havia um que dizia: "Deixa-te lá disso, somar, somar, somar, passa logo isso para multiplicação". Eles perceberam que a multiplicação era a simplificação da adição sucessiva. Pode parecer muito lógico, mas naquelas cabeças não tinha grande lógica.

O desenvolvimento da capacidade de abstração dos alunos da turma L e consequente melhoria na comunicação matemática oral foi outra aprendizagem que Laura considera que os seus alunos realizaram, como refere:

> [No inicio da experiência] eles precisavam de ir ao quadro, escrever . . . desenhar o que estavam a pensar. Tinham que fazer o desenho, concretizar aquilo que queriam dizer, isso é outra componente da comunicação matemática que foi muito desenvolvida, o raciocínio matemático, foram duas componentes muito desenvolvidas com esta experiência de ensino e portanto os alunos tinham necessidade de esquematizar ou desenhar aquilo que estavam a pensar. [Depois] deixaram de o fazer, deixaram de ir ao quadro, já não têm necessidade absoluta, não há nenhum miúdo que peça para ir ao quadro desenhar o que está a pensar, ou escrever. . . . Portanto, não só uma formalização escrita, se calhar nem muito escrita, portanto o que foi, foi uma verbalização, uma argumentação matemática na oralidade. E conseguem, é muito interessante ver aqueles alunos a debaterem matemática, é delicioso.

À semelhança do que referiu Margarida, também Laura considera que a experiência de ensino contribuiu de forma bastante visível para o desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos.

Tanto Margarida como Laura assumem que a participação nesta experiência foi gratificante tendo proporcionado uma aprendizagem constante. Segundo Margarida, a sua destreza de cálculo mental melhorou significativamente e hoje adota algumas das estratégias discutidas na sala de aula:

> Sou muito sincera. Aprendi, revi. Desenvolvi eu própria destrezas de cálculo mental. Eu agora estou sempre a fazer cálculo mental, faço muito mais cálculo mental do que fazia dantes . . . Por exemplo a decomposição de números, eu usava muito pouco.

Para a professora, um dos aspetos significativos desta experiência foi a ampliação do seu conceito de cálculo mental:

> Acho que isso foi muito para além da ideia que eu tinha de cálculo mental, ampliou-me a minha vida . . . Dantes era umas destrezas que as pessoas tinham para lhes facilitar a fazer contas ou estimativas, ou qualquer coisa no génere . . . Mas agora acho que o trabalharmos o cálculo mental vai para além disso, dá sentido aos números e quando lhes estamos a ensinar técnicas de destreza, não sei como lhe chamar isso, de cálculo mental, eles estão a criar o sentido de número, e quando têm o sentido de número, essas técnicas são todas muito mais fáceis para eles, porque só empinadas não. Acho que eles não vão lá, a gente dava-as muito, e depois eram muitas propriedades, era a comutativa, distributiva, ou por dez, ou por, mesmo assim era pouco, pouco.

Margarida passou a encarar o desenvolvimento do cálculo mental como algo que vai muito para além do ensino de técnicas, destrezas e propriedades de cálculo sem sentido. Para a professora, desenvolver o cálculo mental dos alunos é "criar o sentido de número" o que facilita a manipulação de números com sentido. Salienta, portando, da sua participação nesta experiência, aspetos que têm a ver com o conhecimento didático.

Laura analisa esta experiência enquanto experiência pessoal e de desenvolvimento profissional, enumerando um conjunto de aspetos que, para ela, foram significativos. Admite que as aprendizagens que realizou superaram as suas expectativas pois, apesar de realizar pontualmente cálculo mental na sua aula, a sua rapidez no cálculo ainda tinha espaço para evoluir:

> Eu aceitei este convite, porque achei que era uma oportunidade de formalizar os meus conhecimentos sobre cálculo mental . . . Enquanto professora titular de turma e eu sei que quando estou envolvida em situações dessas eu faço um crescimento enorme em termos de conhecimento profissional e portanto à partida eu sabia que ia ganhar com isto. Nunca pensei que fosse ganhar tanto, estou a ser muito honesta. Porquê? . . . Porque eu achava que tinha algum cálculo mental, mas eu percebi que quando tinha de resolver as tarefas para antecipar as sessões eu fui ficando mais rápida conforme as fui resolvendo.

Realça ainda que esta experiência contribuiu para ampliar o seu conhecimento matemático e didático e recorda duas situações de sala de aula que a fizeram repensar a sua prática. Uma relaciona-se com uso recorrente do contexto de dinheiro e sua adequação no âmbito dos números racionais e suas representações:

> Houve uma influência no meu conhecimento matemático porque tornei-me mais rápida na resolução das expressões e no didático em termos de

> gestão das discussões. Portanto eu uso muito o exemplo do dinheiro. Pela primeira vez que eu me lembre, porque depois o facto de estar envolvida numa experiência de ensino que depois envolve reflexão à posterior, esse é outro aspeto muito importante, faz com que nós não nos limitemos a pensar sobre o que aconteceu, mas de facto a refletirmos sobre o que aconteceu e eu acho que tu te lembras que houve uma situação em que eu tive de contextualizar uma multiplicação entre racionais na forma decimal em que o contexto dinheiro não é, não existe . . . Nunca se me tinha colocado a questão de quais as limitações do contexto do dinheiro no âmbito dos racionais.

A outra situação refere-se ao uso das operações inversas em expressões de valor em falta. Para Laura, o facto de se discutir em profundidade os erros dos alunos no cálculo mental fez emergir momentos de aprendizagem que em situações de aula normal poderiam não surgir, desafiando-a a repensar a sua prática:

> Para mim é perfeitamente, portanto assumido, não é? Que a operação inversa só se trabalha quando faltam determinados fatores ou parcelas da expressão lacunada. É óbvio, não é? É óbvio matematicamente, mas didaticamente não era óbvio, depende da expressão. Não era óbvio, pensava eu que era. Não era óbvio na minha prática, nunca eu me tinha confrontado, porque isso é outra coisa que esta experiência de ensino faz, como nós temos que trabalhar os erros, com muita profundidade, por causa do cálculo mental, confrontamo-nos com dificuldades dos alunos que numa situação de sala de aula normal não emergem com tanta força.

Laura valoriza também os momentos de reflexão pós-aula porque a "obrigam" a pensar sobre de forma mais profunda sobre a sua prática:

> Eu nunca converso com ninguém de forma focada sobre o meu conhecimento matemático e sobre o meu conhecimento didático a seguir à aula . . . Se nós não tivermos ninguém que nos "obrigue" a pensar efetivamente sobre o que aconteceu, nós limitamo-nos a pensar e não a refletir sobre aquilo que estamos a fazer.

Por fim, Laura valoriza a oportunidade que teve em desenvolver um trabalho de parceria com a investigadora dentro e fora da sala de aula, mas especialmente dentro, conferindo-lhe mais confiança para enfrentar desafios como é o caso da gestão da discussão de sala de aula:

> Se tu não estivesses estado presente se calhar eu desistia, eu não acredito muito, mas se calhar desistia, porque ia ser tão difícil, tão difícil, tão difícil, que eu iria ter que ser muito forte para continuar a fazer . . . Porque

> eu acho que fazendo um balanço sozinha eu pensava, fogo eu estou a perder $\frac{2}{3}$ das minhas aulas, a perder entre aspas, não é!? E eles não estão a evoluir, eles não estão a aprender, eles não trouxeram nada do ano anterior e nesse momento de choque, tu foste muito importante, porque mantiveste o ritmo de trabalho e depois eu pude entrar, como se eu entrasse num comboio em andamento porque de facto estava chocada e também claro há competências na prática que eu fui aprendendo, ao ver-te fazer também vou melhorando as minhas capacidades de gestão de sala de aula, como é lógico . . . Portanto como foi muito intenso, muito intenso, muito intenso, isso teve que desenvolver competências e o facto de estar com outra pessoa a fazer essa mesma dinâmica eu aprendi imenso em termos de gestão de discussão. E é mesmo muito difícil, e é mesmo muito difícil.

O ciclo de experimentação II foi pautado por diversos avanços e recuos nas dinâmicas de cálculo mental, mas perante as adversidades, por vezes difíceis de contornar, há um aspeto que Laura realça e que não posso deixar de enfatizar. Na sua turma, o cálculo mental não se cingiu às quatro paredes da sala de aula. Houve alunos que, segundo a professora "ensinaram aos pais o cálculo mental" que aprenderam na escola.

Os excertos das entrevistas realizadas a Margarida e Laura mostram que a experiência de ensino proporcionou um contexto rico do ponto de vista da aprendizagem dos alunos mas também das professoras participantes, pelo que avaliam de forma positiva esta experimentação na sala de aula. As tarefas e a forma como foram construídas e realizadas na sala de aula originaram discussões profundas acerca dos números e das operações mas também acerca de aprendizagens menos conseguidas pelos alunos, o que posteriormente apoiou o desenvolvimento de outras, como assumido por Margarida (no caso da OTD) e Laura (no caso do raciocínio proporcional). O trabalho desenvolvido nesta experiência apoiou a mudança de perspetivas de Margarida e contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento profissional de Laura. A parceria entre investigadora e professoras, dentro e fora da sala de aula, revelou-se fundamental neste processo, apoiando de forma sistemática e situada as dinâmicas de cálculo mental desenvolvidas na sala de aula e a reflexão pós-aula acerca dessas mesmas dinâmicas, aspeto essencial para o repensar constante acerca da adequação da experiência de ensino e seu *design*.

# Capítulo 10

# Conclusões

Neste capítulo apresento as principais conclusões do estudo no que se refere às estratégias e erros dos alunos no cálculo mental com números racionais, bem como à forma como estas estratégias foram evoluindo ao longo da experiência de ensino. Termino com algumas considerações acerca da investigação realizada e propondo novas questões para investigação, fruto da minha experiência e reflexão enquanto investigadora.

## 10.1 Estratégias de cálculo mental dos alunos com números racionais

A primeira questão deste estudo pretende perceber que estratégias usam os alunos quando calculam mentalmente com números racionais positivos em questões que envolvem as quatro operações aritméticas básicas. De um modo geral, os alunos recorrem maioritariamente a relações numéricas de vários tipos e pontualmente a estratégias centradas apenas no uso de factos numéricos e regras memorizadas. Existem estratégias comuns a todas as representações dos números racionais (fração (F), decimal (D) e percentagem (P)) mas também estratégias que se relacionam diretamente com uma dada representação ou operação. No que se refere às representações mentais dos alunos subjacentes às estratégias que apresentam, é possível identificar a existência de modelos mentais, imagens e representações proposicionais embora estas também se relacionem de forma particular com cada uma das categorias de estratégias. De seguida apresento para cada categoria (factos numéricos, regras memorizadas e relações numéricas), subcategorias de estratégias, em cada uma das representações dos números racionais e para as quatro operações aritméticas básicas, bem como as representações mentais subjacentes às diversas estratégias analisadas.

*1. Estratégias de factos numéricos*. O Quadro 100 apresenta situações onde o recurso a factos numéricos é um aspeto forte e central nas estratégias dos alunos. Este tipo de estratégia, embora pouco frequente neste estudo, surge essencialmente associado a questões envolvendo adição e subtração de frações, multiplicação e divisão de numerais decimais e multiplicação envolvendo percentagens. Os alunos recorrem a resultados previamente conhecidos (somas ou produtos) para indicarem de imediato o resultado ou para preencherem um valor em falta numa dada operação. Estes factos numéricos, segundo Dehaene (1997), estão armazenados em módulos neurológicos que os alunos recuperam automaticamente em situações de cálculo, sem necessidade de recorrerem a raciocínios elaborados. Considero-os como uma estratégia de cálculo mental por permitirem alcançar o resultado de uma operação de forma rápida e eficaz.

Quadro 100. Estratégias de factos numéricos.

<table>
<tr><th rowspan="3">Subcategoria</th><th colspan="5">Estratégias de factos numéricos</th><th rowspan="3">Representação mental</th></tr>
<tr><th colspan="2">Adição e subtração</th><th colspan="3">Multiplicação e divisão</th></tr>
<tr><th>F</th><th>D</th><th>F</th><th>D</th><th>P</th></tr>
<tr><td>Resultados de operações previamente conhecidos</td><td>(e.g., “duas metades formam a unidade”)</td><td></td><td></td><td colspan="2">(e.g., uso de tabuadas)</td><td>Imagem mental</td></tr>
</table>

As estratégias dos alunos nesta categoria e nas três representações dos números racionais sugerem o recurso a imagens mentais de representações pictóricas (“duas metades formam a unidade”) e a números ou resultados de operações conhecidas dos alunos (tabuadas). Estas imagens mentais parecem associar-se a imagens concretas (Presmeg, 1986, 1992), isto é, imagens fotográficas sem movimento mas com muito detalhe (um desenho que represente a adição de duas metades, um número específico ou uma operação e sua solução previamente conhecidas). No caso da adição e subtração de frações, a imagem mental subjacente à estratégia de “duas metades formam a unidade” pode estar relacionada com a visualização (Duval, 1999) de uma representação pictórica, fruto da experiência dos alunos, a que estes recorrem para modelar uma dada expressão simbólica e assim resolvê-la. Este tipo de imagem mental já tinha sido referido no estudo de Caney e Watson (2003) como uma estratégia de cálculo mental dos alunos com números racionais. Neste estudo, não a considero como uma estratégia mas sim como um suporte a estratégias de factos numéricos, uma vez que, segundo a Teoria dos Modelos Mentais (Johnson-Laird, 1990) a construção de processos de compreensão e inferência baseia-se em representações mentais que construímos a partir do mundo que nos rodeia. Assim, considero que cada estratégia depende da representação mental que cada individuo constrói acerca de um dado conceito ou processo, com o qual já contactou ao longo da sua experiência escolar e de vida. Representações mentais significativas e fruto da compreensão matemática dos alunos originam estratégias de cálculo mental rápidas e eficazes. A ausência de representações mentais ou a dificuldade em criar novas representações a partir de outras já existentes refletem dificuldades na aquisição de conceitos por parte dos alunos e, consequentemente, originam erros no cálculo mental.

Estratégias baseadas na utilização de factos conhecidos são também referidas por Caney e Watson num estudo que realizaram em 2003. As autoras consideram que, neste tipo de estratégias, os alunos fazem correspondências entre o que lhes é apresentado e o que já sabem, usando para isso referências que possuem. O termo “factos conhecidos” usado pelas autoras parece associar-se a uma interpretação mais abrangente, contemplando conhecimentos de diversos tipos, incluindo alguns que neste estudo associo a relações numéricas tendo em conta o exemplo que apresentam (no cálculo de 10% de 45, os alunos usam o conhecimento que têm sobre 10% para retirar primeiro 10% de 40 e depois 10% de 50). Considero o termo “factos numéricos” mais específico, indo ao encontro do conceito apresentado por autores como Brocardo (2011), Heirdsfield (2011) e Wolman (2006). Para Wolman (2006) estes factos numéricos não são mais do que a sistematização de um conjunto de somas, diferenças, produtos e quocientes disponíveis na memória (como refere Dehaene, 1997), facilmente recuperáveis na reconstrução de resultados a partir de outros factos memorizados, que permitem ao aluno progressivamente construir um conjunto de procedimentos pessoais.

Os dados analisados não revelam a existência de estratégias de factos numéricos em questões de adição e subtração de numerais decimais. Este facto pode estar associado a conhecimentos prévios dos alunos, adquiridos no 1.º ciclo, e que poderão envolver a capacidade de compor e decompor números e de usar no cálculo propriedades das operações, facilitando assim a adição e subtração com esta representação dos números racionais. A semelhança entre a adição e subtração de numerais decimais e a de números naturais (Pérez, 1997) pode igualmente ter facilitado o uso, por parte dos alunos, de estratégias baseadas em relações numéricas e não tanto em factos numéricos.

*2. Estratégias de regras memorizadas.* O Quadro 101 apresenta estratégias onde o recurso a regras memorizadas é um aspeto forte e central nas estratégias dos alunos. À semelhança das estratégias de factos numéricos, também estas surgem de forma pontual nas estratégias dos alunos.

Nesta categoria de estratégias e na representação fracionária, os alunos recorrem, nas quatro operações básicas, à aplicação de procedimentos algorítmicos. O mesmo acontece na adição e subtração de numerais decimais. O recurso a regras memorizadas para a simplificação de cálculos surge com maior ênfase na multiplicação e divisão de frações. Na representação percentagem, estratégias de regras memorizadas surgem associadas à multiplicação e divisão por 10 ou 100. As regras relativas à multiplicação e divisão por 10, 100 e 1000 é encarada por Gálvez et al. (2011) como sendo factos conhecidos dos alunos enquanto Caney e Watson (2003) as consideram regras memorizadas, tal como assumo neste estudo, por implicarem a memorização e aplicação de regras que, verbalizadas pelos alunos, se resumem ao “tirar zeros” ou “acrescentar zeros”.

Nesta categoria, as estratégias dos alunos sugerem o recurso a imagens mentais de procedimentos previamente conhecidos, que parecem associar-se a imagens de fórmulas (Presmeg, 1986, 1992) dada a especificidade com que descrevem os procedimentos que realizam para efetuar o cálculo (e.g., unidades debaixo de unidades, décimas debaixo de décima na adição e subtração de numerais decimais). Este tipo de imagem mental pode ser bastante precisa e detalhada, constituindo uma forma de recordar informação e um poderoso meio de representar informação abstrata, embora em alguns casos não reflita a compreensão matemática dos alunos (Presmeg, 1986, 1992). Talvez por isso os alunos optem pela aplicação de regras memorizadas ao invés da composição e decomposição de números ou estabelecimento de relações entre números e entre operações.

Quadro 101. Estratégias de regras memorizadas.

| **Subcategoria** | **Estratégias de regras memorizadas** | | | | | **Representação mental** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Adição e subtração | | Multiplicação e divisão | | | |
| | F | D | F | D | P | |
| Simplificação de cálculos | | | (e.g., $\frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{4} = \frac{1}{4}$) | | | Imagem mental |
| Procedimento algorítmico | (e.g., adiciona ou subtrai numeradores e mantém denominadores) | (e.g., unidades debaixo de unidades, décimas debaixo de décimas…) | ( e.g., multiplica numeradores e denominadores na multiplicação, “inverte e multiplica” na divisão) | | | Modelo mental |
| Divisão por 10 e/ou 100 | | | | | (e.g., tira-se o zero) | Imagem mental |

Na representação decimal as estratégias de regras memorizadas dos alunos parecem sugerir também o recurso a modelos mentais associados a contextos de dinheiro, certamente fruto de representações pessoais e privadas (Medeiros, 2001) que estes possuem e usam para modelar situações de cálculo com numerais decimais, relacionando assim representações dos números e contextos de vida real. Estes modelos mentais não se revestem de especificidade como as imagens mentais mas desempenham um papel central na representação e compreensão de objetos (Johnson-Laird, 1990).

Caney e Watson (2003) encaram a utilização de regras memorizadas e de formas mentais de algoritmos escritos (ao invés de apenas imagens mentais), por parte dos alunos, como duas estratégias diferentes. Neste estudo, estas estratégias são consideradas complementares e indissociáveis, surgindo a primeira em função da segunda. Reforço a perspetiva de que, subjacentes a estratégias de regras memorizadas, estão imagens mentais de procedimentos ou modelos mentais de contextos significativos para os alunos que influenciam as suas estratégias, principalmente quando estes não possuem outro tipo de representações mentais (como representações proposicionais) ou um conhecimento sólido e suficientemente abrangente sobre números e operações que lhes permita estabelecer relações e diversificar estratégias de cálculo mental.

O recurso a factos numéricos e a regras memorizados, por parte dos alunos, surge neste estudo não tanto como uma estratégia principal de cálculo mental, como apresentei nos Quadros 100 e 101, mas sim como um precioso auxiliar ao estabelecimento de relações numéricas. As explicações dos alunos mostram que estes recorrem a resultados previamente conhecidos (e.g., somas, produtos, …) ou a regras memorizadas (e.g., multiplicação e divisão por 10, 100 …) para realizarem cálculos intermédios em estratégias mais complexas ou relacionarem operações e números. Factos numéricos envolvendo a relação entre $\frac{1}{2}$ e 1 (como $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$) e entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ (como $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$), quer na representação fracionária e decimal (e.g., $0{,}5+0{,}25=0{,}75$; $1{,}25-?=0{,}75$), quer envolvendo estas duas representações (e.g., $\frac{3}{4}+0{,}5=1{,}25$) foram sendo apropriados pelos alunos ao longo da experiência de ensino, o que foi visível pela destreza com que os começaram a usar em diversas situações de cálculo. A divisão por 10 (no cálculo de 10% como número de referência para o cálculo de percentagens) enquanto regra memorizada (tira-se um zero ou desloca-se uma posição para a esquerda), discutida diversas vezes em ambos os ciclos de experimentação, originou um uso mais regular desta regra, por parte dos alunos.

*3. Estratégias de relações numéricas.* O Quadro 102 apresenta a diversidade de estratégias de relações numéricas usadas pelos alunos no cálculo mental com números racionais nas representações fracionária, decimal e percentagem. Estratégias deste tipo foram as mais usadas pelos alunos na experiência de ensino, sendo mais evidente a sua utilização na representação percentagem.

Associada apenas à representação fracionária, surgem estratégias de *relação entre numerador e denominador*, que parecem ter subjacente uma generalização acerca de frações que representam "metade"; estratégias de *frações equivalente* associadas às quatro operações básicas, onde o elemento mais forte se refere à substituição de uma fração dada por outra equivalente, sem necessidade de verbalização do cálculo associado; e ao uso de *propriedades das operações* principalmente na subtração (para o cálculo do aditivo) e multiplicação de frações (produto de um número pelo seu inverso). No cálculo mental, o recurso a propriedades das operações é essencial para o desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos (Empson et al., 2010) e o seu uso, bem como da relação entre numerador e denominador reflete a relação estreita entre as frações e a Álgebra. Esta relação parece ter emergido neste estudo, tendo em conta que estratégias baseadas na relação entre numerador e denominador e em propriedades das operações apenas surgiram associadas à representação fracionária nas quatro operações básicas.

Este tipo de estratégias concetuais (Caney & Watson, 2003), são reveladoras da compreensão matemática dos alunos. Por exemplo, a relação entre operações evidencia, no caso particular de $\frac{1}{3}$, o significado de multiplicar por uma fração unitária; a relação entre numerador e denominador permite fazer generalizações quanto à grandeza dos números; frações equivalentes apoiam igualmente a compreensão da grandeza dos números havendo uma consciência, por parte do aluno, de que várias frações podem representar a mesma quantidade (Lamon, 2007); e o uso de propriedades das operações enfatizam, como referi anteriormente, as características algébricas das frações revelando-se um contributo para o desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos.

Quadro 102. Estratégias de relações numéricas.

| | **Estratégias de relações numéricas** | | | | | **Representação mental** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Adição e subtração | | Multiplicação e divisão | | | |
| **Subcategoria** | F | D | F | D | P | |
| Relação parte-todo | (e.g., Pensei numa maçã e parti. E depois juntei os dois meios) | | | | (e.g., Para 20% de ?=8, considera que 20% cabe 5 vezes em 100% logo ?=8 $\times$ 5) | Representação proposicional<br>Imagem mental<br>Modelo mental |
| Relação parte-parte | | | | | (e.g., Para 75% de 20 pensa em metade de metade, ou seja 25%, e relaciona 75% com o triplo de 25%. Se metade de metade de 20 é 5, o triplo será 15) | |
| Relação entre numerador e denominador | (e.g., Metade de 14 é 7. Então $\frac{7}{14}$ equivale a $\frac{1}{2}$) | | | | | |
| Relação entre operações inversas | (e.g., Para $\frac{1}{2}+?=1$, $?=1-\frac{1}{2}$) | | | (e.g., $4{,}2\times?=12{,}6$ com $?=12{,}6\div4{,}2$) | | |
| Relação entre operações | | | (e.g., $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=0,(3)\div3$) | (e.g., $0{,}25\times4=0{,}25+0{,}25+0{,}25+0{,}25$) | | |
| Propriedades das operações | (e.g., Para $?-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$, $?=\frac{5}{10}+\frac{3}{10}$) | | (e.g., Para $\frac{2}{3}\times?=1$, ?=$\frac{3}{2}$ porque são frações inversas) | | | |
| Relação entre expressões | (e.g., se $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ então para $\frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$, ?=$\frac{1}{4}$) | (e.g., Se $1{,}9-0{,}5=(1{,}9-0{,}1)-(0{,}5-0{,}1)$ então $1{,}9-0{,}5=1{,}8-0{,}40$) | | | (e.g., Se 5% de 20=1 então para 5% de?=3, ?=3$\times$ 20) | |
| Mudança de representação | (e.g. ,Para $\frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$, $?=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ sendo considerado como $0{,}50-0{,}25$) | (e.g., $0{,}5+0{,}25=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$) | (e.g., Para $\frac{1}{4}\div?=\frac{1}{2}$, $?=\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$, sendo considerado como 25% $\div$ 50%) | (e.g., $4{,}2\times0{,}2$ é calculado como $42\times2$, repondo duas casas decimais) | (e.g., $25\%\ de\ 20=20\div4$ porque 25%=$\frac{1}{4}$) | |

| Subcategoria | Estratégias de relações numéricas: Adição e subtração F | Adição e subtração D | Multiplicação e divisão F | Multiplicação e divisão D | Multiplicação e divisão P | Representação mental |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frações equivalentes | (e.g., $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}$) | | (e.g., se $\frac{3}{4}$ é equivalente a $\frac{6}{8}$ então $\frac{6}{8}\div\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\div\frac{6}{8}$) | | | Representação proposicional<br>Imagem mental<br>Modelo mental |
| Decomposição/composição | | | (e.g., $\frac{3}{4}+0{,}5=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+0{,}5$) | | (e.g., No cálculo de $20\%\ de\ 50$ decompõe 20% em 10%+10% ou divide 50 por 100 para calcular 1% e chega a 20% multiplicando 1% por 10 e depois por 2) | |
| Compensação | | (e.g., Se $30{,}2 \cong 30$ e $15{,}9 \cong 16$ então $30{,}2-15{,}9 \cong 30-16$) | | | | |
| Dobros/metades | | | | | (e.g., Para $50\%\ de\ ?=60, ?=60\times 2$ ou para calcular 25% de 20, calcula metade de metade) | |
| Subtrações sucessivas | | (e.g., Para $1{,}25-?=0{,}75$ é considerado como $1{,}25-0{,}25-0{,}25=0{,}75$) | | | | |
| Relação entre multiplicar ou dividir por 0,5 ou $\frac{1}{2}$ e dividir ou multiplicar por 2 | | | (e.g., $22{,}5\div\frac{1}{2}=22{,}5\times 2$) | (e.g., $?\times 0{,}5=30$ com $?\div 2=30$) | | |
| Relação entre números | | | | (e.g., Para $0{,}82\div?=1{,}64$, se $164=82\times 2$ e $\times 2=\div 0{,}5$ então $0{,}82\div 0{,}5=1{,}64$) | | |

Associadas à representação decimal, surgem estratégias de *compensação* e de *subtrações sucessivas* na adição e subtração de numerais decimais, possivelmente pela semelhança que a adição e subtração de numerais decimais tem com a de números naturais. De notar que estratégias de compensação foram identificadas por Thompson (1999) num estudo sobre cálculo mental com números naturais. No estudo de Caney e Watson (2003) esta estratégia pode ser incluída na categoria de "estabelecimento de ligações", embora o exemplo dado pelas autoras não clarifique esta situação (para 6,2+1,9, consideram 1,9 como 2). As subtrações sucessivas, apesar de poderem ser categorizadas como "repetição da operação" no estudo de Caney e Watson (2003), não foram referidas pelas autoras como estratégia de cálculo mental com números racionais.

Ainda com a representação decimal, surgem, nas operações multiplicação e divisão, estratégias baseadas na *relação entre números* (e.g., para $0{,}82 \div ? = 1{,}64$, se $164 = 82 \times 2$ e multiplicar por 2 equivale a dividir por 0,5, então $0{,}82 \div 0{,}5 = 1{,}64$). A dificuldade dos alunos em multiplicar e dividir numerais decimais (que emergiu neste estudo) aliada à falta de tempo (apenas 15 segundos) para realizarem multiplicações e divisões com números de dois ou três algarismos, parece ter incentivado o uso de estratégias de relação entre números nesta representação do número racional (embora pudessem ter surgido em qualquer das representações), ao invés da aplicação de estratégias mais instrumentais como identificaram Caney e Watson (2003) no seu estudo. Segundo as autoras, nas operações com decimais os alunos recorreram mais a estratégias instrumentais (baseadas na aplicação de factos e regras) do que nas representações fracionária e percentagem. No estudo que realizei, as estratégias de cálculo mental com numerais decimais revelaram ser mais concetuais (baseadas em relações numéricas) do que instrumentais contrariando de certo modo esta conclusão das autoras. Apenas no ciclo de experimentação II emergiram estratégias mais instrumentais (Quadro 101) associadas à adição e subtração de numerais decimais.

Associada apenas à representação percentagem, surgem estratégias de *dobros/metades* para o cálculo de 50% (cálculo de metade), 25% (cálculo de metade de metade) ou 75% (cálculo de metade mais metade de metade) e de *relação parte-parte*. A estratégia de dobros/metades foi identificada por Caney e Watson (2003) como sendo uma estratégia de repetição de operação, não fazendo referência à relação parte-parte enquanto estratégia de cálculo mental dos alunos. A relação parte-parte é um dos significados dos números racionais que se associa à representação percentagem (razão)

(Behr et al., 1983; Lamon, 2007; Llinares & Garcia, 2000; Parker & Leinhardt, 1995), pelo que é natural que surja nas estratégias dos alunos. No presente estudo, esta estratégia pode ter sido impulsionada pelo uso de expressões de valor em falta que, segundo Parker e Leinhardt (1995), representam oportunidades para os alunos estabelecerem este tipo de relações.

Na resolução de questões com mais do que uma representação de um número racional, surgem estratégias de *relação parte-todo* e de *composição/decomposição*, nas representações fracionária e percentagem, a *relação entre operações* e entre *operações inversas* e a *relação entre dividir por 0,5 ou* $\frac{1}{2}$ *e multiplicar por 2*, nas representações fracionária e decimal. Estratégias de relação parte-todo, surgem associadas à adição e subtração de frações, principalmente quando imagens mentais estão subjacentes a estas estratégias ("pensei numa maçã e parti") refletindo possivelmente experiências de aprendizagens onde este significado foi abordado. Estas estratégias surgem com maior ênfase na representação percentagem onde os alunos relacionam o todo e partes em percentagem, com o correspondente ao todo e partes de valores apresentados.

Estratégias de decomposição/composição, identificadas por Thompson (1999) no cálculo mental com números naturais e por Caney e Watson (2003), no cálculo mental com números racionais, embora com outra designação (trabalho com partes de um segundo número) e para as representações decimal e percentagem, surgem neste estudo essencialmente associadas à representação percentagem, numa primeira fase e posteriormente à representação fracionária (e.g., $\frac{3}{4} + 0{,}5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0{,}5$). Estratégias de decomposição associadas ao cálculo de percentagens podem ser justificadas pela semelhança existente entre a representação percentagem e os números naturais (Moss & Case, 1999), podendo os alunos transpor conhecimentos de decomposição/composição de números até 100 para o cálculo de percentagens. No caso das frações, esta capacidade de decompor frações pode estar relacionada com o conjunto de relações numéricas que foram sendo discutidas ao longo da experiência de ensino e que ajudaram os alunos a interiorizar várias formas de decompor um número na representação fracionária, nomeadamente números de referência como foi o caso de $\frac{3}{4}$.

A relação entre operações surge associada à multiplicação e divisão de frações (e.g. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \div 3$ caso particular que surgiu na estratégia de uma aluna do ciclo de experimentação I e verbalizada por outro aluno no ciclo II embora desse origem a um erro) e na multiplicação e divisão de numerais decimais onde os alunos relacionam a multiplicação de um decimal por um inteiro com a adição sucessiva de parcelas. Estratégias baseadas na relação entre dividir por 0,5 ou $\frac{1}{2}$ e multiplicar por 2 surge na divisão de numerais decimais quando o divisor é 0,5 ou $\frac{1}{2}$ e em situações onde apenas estão envolvidos numerais decimais ou estes em conjunto com frações.

Estratégias de relação entre operações inversas surgem associadas às representações fracionária (na adição e subtração) e à decimal (na multiplicação e divisão). Neste tipo de estratégia, os alunos recorrem à subtração para resolver uma adição de valor em falta. Este tipo de estratégia foi identificado no cálculo mental com números naturais por Thompson (1999) e com números racionais por Caney e Watson (2003), sendo considerado pelas autoras como uma estratégia de mudança de operação. Neste estudo optei pelo termo “relação entre operações inversas” por ser mais específico e assim não ser possível contemplar nesta subcategoria situações em que os alunos relacionam e transformam, por exemplo, uma multiplicação numa adição.

A *mudança de representação* revelou ser uma estratégia importante e transversal a todas as representações dos números racionais independentemente da operação aritmética envolvida, indo ao encontro do descrito por Caney e Watson (2003). Os alunos utilizam diferentes representações dos números racionais (fração, decimal e percentagem) convertendo uma representação noutra sempre que assim o considerem pertinente e útil. Neste estudo, preferencialmente, os alunos convertem as representações, decimal e percentagem em fracionária. Quando a representação fracionária está envolvida, os alunos convertem, na adição e subtração, fração→decimal→número natural referente a $\frac{10}{100}$ e na multiplicação e divisão, fração→dízima (no caso de dízimas infinitas periódicas como $\frac{1}{3}$ embora este tivesse sido um caso singular) e fração→percentagem. Na representação decimal, converteram decimal→fração, nas quatro operações e decimal→número natural referente a $\frac{10}{100}$ na multiplicação e divisão. Na representação percentagem apesar de converterem percentagem→decimal, verificou-se mais a conversão percentagem→fração possivelmente porque os números de referência envolvidos apelavam à relação entre 50% e $\frac{1}{2}$, 25% e $\frac{1}{4}$, 75% e $\frac{3}{4}$ e 20% e $\frac{1}{5}$. No caso em que surgem duas representações diferentes de um número racional numa mesma questão, os alunos optam pela mudança de representação, não mostrando preferência por uma ou outra representação, escolhendo aquela que mais lhes parece adequada para a resolução da expressão em causa.

A capacidade de relacionar diferentes representações de um número racional, favorece a compreensão dos números racionais e sua grandeza (Behr et al., 1986), dando significado a representações e a operações entre estes números. Por exemplo, se um aluno compreender a relação entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ e perceber que a segunda fração é menor que a primeira, certamente consegue criar uma representação mental e compreender porque razão a multiplicação entre dois racionais menores que 1 origina um produto de menor grandeza, ao contrário do que acontece na multiplicação de dois números naturais (sentido de operação). A relação de equivalência entre $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ e $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$ pode facilitar esta compreensão, bem como a relação entre frações e numerais decimais, como defendem diversos autores (Galen et al., 2008; Llinares & Garcia, 2000; Pérez, 1997). O conhecimento e destreza com números, convertendo certas representações noutras equivalentes é um aspeto que McIntosh et al. (1992) consideram como essencial para o desenvolvimento do sentido de número. Neste estudo, os alunos mostram preferência pela conversão de decimais e percentagens em frações, revelando assim algum conhecimento sobre frações que, segundo Galen et al. (2008), é um aspeto essencial para a compreensão das outras duas representações. Para estes autores, as frações dão significado às percentagens e numerais decimais e desempenham um papel importante no cálculo mental como revelaram as estratégias dos alunos em ambos os ciclos de experimentação.

A estratégia *relação entre expressões* revelou ser comum às três representações dos números racionais e envolve a relação entre expressões simples que os alunos conhecem e que de algum modo, se relacionam com questão de cálculo mental apresentada (e.g., para o cálculo de $\frac{1}{2} - ? = \frac{1}{4}$ pensam em $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ e assim retiram $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ para ficar com $\frac{1}{4}$). No seu estudo, Caney e Watson (2003) referem-se a estratégias onde os alunos estabelecem relações entre números que já conhecem ou entre o todo e as partes que o constituem, mas não parecem incluir relações entre expressões na categoria que definem como "estabelecimento de ligações". A estratégia de relação entre expressões está associada à capacidade dos alunos em mobilizarem um reportório de relações numéricas que, na perspetiva de Brocardo (2011), deve ser construído para que possa facilitar o desenvolvimento do cálculo mental dos alunos. Ao longo da experiência de ensino desenvolvida nos ciclos de experimentação I e II, o recurso a números de referência em várias representações e em diversas operações potenciou a criação de algumas relações numéricas que, de certa forma, se refletiram neste tipo de estratégias usadas pelos alunos.

No que se refere a representações mentais, as estratégias verbalizadas pelos alunos sugerem que estes, sempre que usam relações numéricas, recorrem fundamentalmente a representações proposicionais (Johnson-Laird, 1990), sendo no entanto possível identificar modelos e imagens mentais. Segundo o autor, as representações proposicionais são fundamentais para estabelecer relações e fazer inferências e baseiam-se em proposições verdadeiras ou falsas tendo em conta os modelos mentais que o ser humano possui do mundo real. No caso das estratégias de cálculo mental analisadas no Capítulo 7, as representações proposicionais dos alunos conduzem à resolução correta das questões apresentadas e baseiam-se em proposições verdadeiras assentes em relações entre números e operações que os alunos conhecem. Estas representações proposicionais parecem, por vezes, não coexistir isoladamente, sugerindo as estratégias dos alunos alguma simbiose entre estas e imagens mentais (e.g., metade de um bolo) ou modelos mentais (e.g., contextos de dinheiro). Esta simbiose ou complementaridade é assinalada por Schnotz et al. (2010) ao referir que, por vezes, uma representação representativa (modelo ou imagem) permite a criação de uma representação descritiva (representação proposicional) simples facilitando acesso rápido a um processo simbólico. Por exemplo, no caso do ciclo de experimentação II, os alunos partem de modelos mentais baseados em contextos de dinheiro para estabelecer relações entre as representações fracionária e decimal e recorrerem a propriedades das operações para resolver uma expressão de valor em falta. Também recorrem a uma propriedade da operação divisão (que tem por base uma representação proposicional tendo em conta as relações estabelecidas) e concluem a sua estratégia baseando-se na imagem mental de procedimentos que conhecem (como a divisão de numeradores e denominadores múltiplos um do outro no caso da divisão de duas frações).

A identificação de representações mentais associadas às estratégias de cálculo mental dos alunos permite fazer inferências acerca dos conhecimentos matemáticos que estes revelam e dos contextos que são ou foram mais significativos para estes ao longo da aprendizagem dos números racionais. Dada a complementaridade entre modelos, imagens (representações representativas) e entre representações proposicionais (representações descritivas), torna-se fundamental que o ensino e a aprendizagem dos números e das operações contemplem situações suscetíveis de promover a criação de representações mentais diversas nos alunos, que possam servir de base a processos de compreensão e inferência matemática (Johnson-Laird, 1990).

## 10.2 Erros dos alunos no cálculo mental com números racionais

A segunda questão deste estudo relaciona-se com a compreensão dos erros evidenciados pelos alunos no cálculo mental com números racionais positivos nas quatro operações básicas. A análise das estratégias dos alunos permite identificar erros *percetuais*, *procedimentais* e *concetuais* nas três representações dos números racionais (fracionária, decimal e percentagem). Erros concetuais surgem de forma mais consistente no cálculo mental com números racionais, estando em linha com a investigação de McIntosh (2006). Erros percetuais e procedimentais parecem ter subjacentes imagens mentais construídas pelos alunos, enquanto erros concetuais parecem ter na sua origem não só imagens mentais mas também representações proposicionais, fruto da assunção de proposições falsas como verdadeiras.

*1. Erros percetuais*. O Quadro 103 apresenta os erros percetuais revelados pelos alunos no cálculo mental com números racionais na representação fracionária, decimal e percentagem. Este tipo de erro emerge da análise de dados e refere-se à perceção visual ou visualização (Dias, 2008; Duval, 1999) de números ou operações de forma incorreta e não à incompreensão de conceitos. Esta visualização ou perceção incorreta não impede a realização correta de cálculos (usando os valores "visualizados" ou "percecionados") reconhecendo o aluno de imediato o erro aquando da verbalização da estratégia usada.

Este erro surge na representação fracionária (quando em conjunto com a decimal numa dada expressão) em situações em que os alunos consideram, de forma incorreta, uma equivalência entre representações. Na representação decimal relaciona-se essencialmente com a troca da operação (adicionam ou subtraem quando se apresenta uma subtração ou adição), podendo esta perceção incorreta da operação estar relacionada com a operação apresentada imediatamente antes (depois de uma subtração é projetada uma adição e os alunos subtraem em vez de adicionar). Pontualmente alguns alunos visualizam 0,5 como sendo 5, realizando corretamente a operação mas considerando o número visualizado, o que reforça a ideia de que este tipo de erro não é de incompreensão de conceitos, mas sim de perceção dos números envolvidos.

Quadro 103. Erros percetuais.

| | **Erros percetuais** | | **Representação mental** |
|---|---|---|---|
| | Adição e subtração | Multiplicação e divisão | |
| **Fração** | (e.g., Em operações envolvendo $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\ ou\ \frac{1}{8}$ os alunos realizam corretamente o cálculo, mas considerando estas frações equivalentes a 0,2, 0,5 e 0,8 respetivamente) | | |
| **Decimal** | (e.g., Para ?-4,3=0,5 visualização de 5 em vez de 0,5 e responde que ?=9,3) (e.g., Para 0,6+0,04 considera 0,6-0,04 e responde 0,56) | (e.g., Na multiplicação e divisão por 0,2 considera 0,2 como sendo 2 ou $\frac{1}{2}$ e calculam metade na multiplicação e o dobro na divisão) | Imagem mental |
| **Percentagem** | | (e.g., Para o cálculo de 10% de ?=5, efetuam 10% de 5) | |

Na representação percentagem este tipo de erro envolve, por parte dos alunos, a realização de cálculos de forma correta, entre os valores apresentados na expressão não considerando estes que o que se pretende é o cálculo do valor sobre o qual se está a aplicar uma determinada percentagem (e.g., Para o cálculo de 10% de ?= 5, efetuam 10% de 5).

Erros percetuais podem ter sido uma consequência do dispositivo de apresentação das tarefas (*PowerPoint* temporizado) em conjunto com o acionar involuntário de imagens mentais de factos numéricos conhecidos dos alunos (Dehaene, 1997).Nos seus estudos, Goméz (1995) e McIntosh (2006) não referem este tipo de erro, mas o seu aparecimento neste estudo faz sentido tendo em conta que o cálculo mental desenvolvido apelou mais ao recurso mental de relações numéricas apoiadas por factos e regras memorizadas do que ao cálculo mental apoiado por registos intermédios em papel, caso em que o tempo de análise e reflexão acerca dos números e suas relações é maior. O curto tempo para a apresentação e resolução de cada questão neste estudo pode ter levado os alunos a focarem-se mais em certos números de uma dada expressão, fazendo emergir imagens mentais significativas para cada um, como é o caso do cálculo de metades associado ao algarismo 2, resultados de operações que originam 5 ou 10, ou ainda de equivalências entre representações cujo foco nos denominadores 2, 5 e 8 influencia a opção pelos numerais decimais 0,2, 0,5 e 0,8 que julgam equivalentes a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{8}$ respetivamente. O facto de os alunos reconhecerem o erro aquando da discussão da questão de cálculo mental reforça a ideia de que o que está em causa não são conceções erróneas mas sim erros de perceção e visualização das representações simbólicas apresentadas nas expressões, uma vez que este tipo de erro apenas surge associado a questões em contexto matemático. É de notar que os erros de perceção visual, ao envolverem o tratamento de informação e fenómenos como a formação de conceitos e significados (Dias, 2008), fazem emergir conhecimentos e representações mentais conhecidas dos alunos associadas ao que percecionam (por exemplo, o caso de subtrair ou adicionar quando se apresenta uma adição e subtração). Pelo seu lado, os erros de visualização, tendo por base representações semióticas que não representam diretamente os objetos mas sim suas relações (Duval, 1999), fazem emergir relações numéricas conhecidas dos alunos, como por exemplo o de associar o algarismo 2 ao cálculo de metades.

*2. Erros procedimentais*. O Quadro 104 apresenta os erros procedimentais manifestados pelos alunos. São essencialmente erros de cálculo associados à aplicação incorreta de factos ou procedimentos e não à incompreensão de conceitos (McIntosh, 2006), onde os alunos apresentam estratégias corretas de resolução para uma dada questão de cálculo mental e identificam, na maioria das vezes, o erro cometido aquando verbalização da estratégia usada. Erros procedimentais surgiram tanto em questões de contexto matemático como de contexto não matemático, não parecendo haver uma relação direta entre o tipo de questão e o erro identificado.

Associadas a este tipo de erro parecem estar imagens mentais de factos e procedimentos que, na sua maioria, envolvem a operação multiplicação (cálculo de frações equivalentes, produto de duas frações ou percentagem como operador), o que pode ser explicado pela dificuldade de integração de factos sobre multiplicação na memória a longo prazo, como refere Dehaene (1997), e sua consequente recuperação em situações de cálculo. Contudo, o autor considera que, com frequência, respondemos automaticamente a um problema de adição com um facto de multiplicação sendo que o contrário raramente acontece. Mas no caso de $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ (análogo do caso em que $3 \times 3$ é considerado como igual a 6), é possível perceber que os alunos se apoiaram em factos de adição para indicar o resultado de uma multiplicação. Esta situação pode estar, mais uma vez associada ao acionar involuntário de informação armazenada nos módulos neurológicos onde factos sobre adição estão presentes na memória dos alunos de forma mais consistente (por serem os primeiros a surgirem na aprendizagem dos números) do que factos de multiplicação, pela dificuldade que supostamente existe (segundo Dehaene) na retenção e armazenamento deste tipo de informação. Erros de cálculo em situações de adição, como os apresentados no Quadro 104, podem ter sido influenciados por processos incorretos de "contagem a partir de" (Thompson, 1999) em que o aluno inicia a contagem considerando 5 e não a partir de 5 (por exemplo, para 5+3 considera 5, 6 e 7). Neste caso uma imagem mental de somas que originam 8 poderia ter apoiado o aluno num cálculo correto.

Quadro 104. Erros procedimentais.

| | **Erros procedimentais** | | **Representação mental** |
|---|---|---|---|
| | Adição e subtração | Multiplicação e divisão | |
| **Fração** | (e.g., No cálculo de $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}$ considera $\frac{4}{8}$ como equivalente a $\frac{4}{4}$ reduzindo apenas o numerador) | (e.g., No cálculo de $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ considera $3\times 3=6$) | Imagem mental |
| **Decimal** | (e.g., No cálculo de ?-4,3=0,5 considera 4,3+0,5=0,47) | | Não identificada |
| **Percentagem** | | (e.g., No cálculo de __% de 30=0,3 considera o resultado como sendo 20% em vez de 1% porque 10% de 10%=10%×2) | Imagem mental |

*3. Erros concetuais*. O Quadro 105 apresenta os erros concetuais revelados pelos alunos no cálculo mental com números racionais. Este é um tipo de erro que envolve a incompreensão de conceitos e cuja diversidade permite perceber que aspetos podem ser considerados críticos na aprendizagem dos números racionais. A análise das estratégias dos alunos permite identificar que erros se associam mais a cada uma ou a várias representações dos números racionais e perceber que o tipo de contexto (matemático ou não matemático) exerce influência no aparecimento de erros concetuais uma vez que estes surgem em todos os tipos de questões. Contudo, importa realçar que as situações contextualizadas representam um contexto especialmente complexo para os alunos dada a necessidade de

Quadro 105. Erros concetuais.

| | **Erros concetuais** | | | | | **Representação mental** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Adição e subtração | | Multiplicação e divisão | | | |
| | F | D | F | D | P | |
| Conceito de fração | (e.g., Considera $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3+6}$) | | (e.g., Considera $\frac{3}{4}\ de\ 8{,}4=8{,}4-0{,}75$) | | | Representação proposicional<br>Imagem mental |
| Adição e subtração de frações | (e.g., Considera $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}-\frac{4}{2}$)<br>( e.g., Considera $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}=\frac{4}{8}\times\frac{4}{2}$)<br>(e.g., Considera $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}=\frac{4+2}{8+4}$) | | | | | |
| Multiplicação e Divisão de frações | | | (e.g., Considera $\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}=\frac{4\div 2}{6}$)<br>(e.g., Considera $\frac{1}{3}\div 3=\frac{1\times 3}{3\times 9}$)<br>(e.g., Considera $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\times 2}{3}$) | | | |
| Relação entre dividendo, divisor e quociente | | | (e.g., Para $\frac{1}{4}\div ?=\frac{1}{2}$ considera ?=$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$) | (e.g., Para $2{,}1\div ?=8{,}4$ considera ?=$8{,}4\div 2{,}1$) | | |
| Relação entre operações inversas | | | (e.g., Para ?$\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ considera ?=$\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}$) | (e.g., Para $25{,}5\times ?=5{,}1$ considera ?=$25{,}5\div 5{,}1$) | | |

| | Erros concetuais | | | | | Representação mental |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Adição e subtração | | Multiplicação e divisão | | | |
| | F | D | F | D | P | |
| Propriedades das operações | (e.g., No cálculo de $? - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$ considera $? = \frac{5-3}{10}$) | | (e.g., Considera $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{3}{3}$)<br><br>(e.g., No cálculo de $\frac{3}{4} \times ? = 1$ considera ?=$\frac{3}{4}$ porque a divisão de duas frações iguais é igual a 1) | | | Representação proposicional<br>Imagem mental |
| Equivalência entre representações dos números racionais | | | (e.g., Considera $\frac{1}{8}$ como sendo 0,2) | | | |
| Estrutura dos numerais decimais | | (e.g., Considera 0,6+0,04=0,60+0,40=1)<br><br>(e.g., Considera $\frac{1}{5} + 0{,}3 = 0{,}23$. Verbaliza 3 décimos e considera 0,03 no cálculo) | | (e.g., Para $4{,}2 \times 0{,}2$ multiplica apenas a parte decimal) | | |
| Relação entre operações | | | | (e.g., Para $? \times 0{,}5 = 30$, considera $30 \div \frac{1}{2} = 30 \div 2$) | | |
| Valor posicional[1] | | | | ( e.g., Considera $0{,}6 \times 0{,}30 = 1{,}8$ em vez de 0,18)<br>(e.g., Considera $8{,}16 \div 8 = 8 \div 8 + 16 \div 8$ e responde 1,2 em vez de 1,02) | (e.g., Para __% de 30=0,3 considera a percentagem em falta como 100% porque ao 30 retira duas casas decimais pela divisão por 100) | |

[1] Alguns dos erros relacionados com o valor posicional pode também relacionar-se com o sentido de operação dos alunos (caso da multiplicação e divisão de decimais) ou com a noção de todo (caso das percentagens).

| | **Erros concetuais** | | | | | **Representação mental** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Adição e subtração | | Multiplicação e divisão | | | |
| | F | D | F | D | P | |
| Conceito de percentagem | | | | | (e.g., Para 75% de 80 calcula 80-75) | Representação proposicional Imagem mental |
| Relação parte-parte | | | | | (e.g., Para 10% de ?=5 considera ?=2 porque 2× 5 = 10) | |
| Relação parte-todo | | | | | (e.g., Para 5% de ?=3 considera ?=5×3 porque no caso de 10% de ?=30 seria ?= 10× 3) | |

estes interpretarem a situação e o conceito matemático associado, escolherem a operação e resolvê-la. As representações mentais subjacentes aos erros dos alunos são essencialmente imagens mentais e representações proposicionais.

Na representação fracionária, a incompreensão do conceito de fração enquanto relação parte-todo ou medida e da relação entre numerador e denominador (Hansen et al., 2014) pode originar erros na adição e subtração de frações, bem como a conceção de uma fração enquanto representação de dois números e não um (Lamon, 2006), fortemente influenciada pelos conhecimentos que os alunos possuem e pelas representações mentais que criam na abordagem dos números naturais (Prediger, 2008). A compreensão da relação entre numerador e denominador é fundamental para perceber a grandeza de um número (Behr et al., 1986) e, consequentemente, compreender a grandeza dos resultados das operações. Os alunos operam frequentemente de modo indiscriminado com numeradores e denominadores mostrando não compreender o papel do denominador nem a necessidade de encontrar um denominador comum às diversas frações que pretendem adicionar ou subtrair. A conceção de uma fração como dois números separados por uma linha é um aspeto crítico da aprendizagem dos números racionais nesta representação, e também pode originar erros concetuais, nomeadamente quando os alunos, na adição de frações, adicionam numeradores e denominadores (e.g., $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}=\frac{4+2}{8+4}$).

Nas quatro operações básicas com frações, os alunos recorrem a uma mistura de procedimentos fruto da generalização de regras memorizadas de umas operações para outras. Na adição invertem a segunda parcela e subtraem (e.g., $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}-\frac{4}{2}$ ) ou multiplicam (e.g., $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}=\frac{4}{8}\times\frac{4}{2}$) à semelhança do que realizam na divisão de duas frações (inverte e multiplica); na multiplicação e divisão, multiplicam ou dividem numeradores e mantêm denominadores (e.g., $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\times2}{3}$ ou $\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}=\frac{4\div2}{6}$), procedimento semelhante ao usado na adição e subtração de frações; ou ainda concebem a divisão de uma fração por 3 como equivalente ao produto de ambos os termos da fração por 3 ($\frac{1}{3}\div 3=\frac{1\times3}{3\times3}$), revelando alguma confusão entre dividir por 3 e por $\frac{1}{3}$ . Estes são erros que de forma sistemática têm sido identificados por autores como Goméz (1995) e Llinares e Garcia (2000). Segundo os autores, estes erros podem ser justificados pela introdução prematura de procedimentos algorítmicos, sem compreensão de conceitos e procedimentos referentes às diversas operações e pela manipulação simbólica excessiva em detrimento da reflexão acerca das quantidades envolvidas, das relações entre os números, bem como dos princípios que estão na base dos procedimentos referentes às diversas operações.

A fração como operador e o seu papel transformador (Llinares & Garcia, 2000) confere à representação fracionária um significado diferente dos anteriores e que nem sempre é entendido pelos alunos como mostra o cálculo de $\frac{3}{4}\ de\ 8{,}4$ onde, apesar de compreenderem a equivalência entre representações ($\frac{3}{4} = 0{,}75$) a fração como "parte de algo" é entendida como a diferença entre duas quantidades. Embora existam semelhanças entre conceitos referentes aos números naturais e aos números racionais, a complexidade associada à rede de relações que se podem estabelecer no conjunto dos números racionais e os seus diferentes significados exige, na perspetiva de Prediger (2008), uma reconceptualização de conceitos e a criação de novas representações mentais a partir de outras já existentes. Exemplo disto é o caso do cálculo de uma "parte de algo" associada a uma fração como operador e que não tendo correspondência com o conjunto dos números naturais, necessita de uma visão da multiplicação entre dois números mais do que a equivalência entre esta e a adição sucessiva de parcelas. A ausência de representações mentais que possam sustentar a criação de novas representações dificulta esta reconceptualização e consequentemente a aplicação de conhecimentos a novas situações, levando os alunos a aplicarem diretamente conhecimentos que possuem de outras experiências de aprendizagem sem reflexão prévia ou análise da sua adequação. Erros envolvendo a relação de equivalência entre representações dos números racionais, pouco frequentes enquanto erros concetuais e mais frequentes como erros percetuais, levaram os alunos a considerarem no cálculo, por exemplo, 0,2 como sendo equivalente a $\frac{1}{8}$.

Erros concetuais que assentam no uso incorreto de propriedades das operações foram mais visíveis na representação fracionária, possivelmente pela dificuldade em operar com frações (como evidenciam os erros de que referi anteriormente) aliada à inconsistência da aprendizagem de novas propriedades como é o caso do produto de um número pelo seu inverso. Neste tipo de erro, os alunos eliminam termos diferentes em vez de termos iguais, evidenciando incompreensão das propriedades subjacentes (e.g., $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{3}{3}$) como a comutatividade e a existência do elemento neutro na multiplicação, ou generalizam conhecimentos de forma incorreta ao conceberem que o produto de números iguais produz o mesmo resultado que o quociente de números iguais (e.g., no cálculo de $\frac{3}{4} \times ? = 1$ consideram ?= $\frac{3}{4}$ porque a divisão de duas frações iguais é igual a 1).

Imagens mentais de frações que representam a unidade podem ter influenciado a eliminação de termos diferentes com o intuito de manter uma fração com termos iguais, na multiplicação de frações, ao invés do contrário. Tentativas de generalização, baseadas em representações proposicionais assentes em proposições falsas, fruto de conceções erróneas dos alunos, aplicadas a novas situações de aprendizagem podem estar na origem deste erro, mas também de outros já que as representações proposicionais são o tipo de representações mentais que mais parecem associar-se aos erros dos alunos na representação fracionária.

O erro que deriva do cálculo do aditivo através da diferença entre o resto e o subtrativo revela desconhecimento da propriedade da subtração em causa, podendo imagens mentais referentes à grandeza dos números ter influenciado a construção de representações proposicionais baseadas em proposições falsas. O conhecimento que os alunos têm sobre comparação de números naturais é algo que tem sido referido por diversos autores (e.g., Lamon, 2006; Monteiro & Pinto, 2005, 2007), como potenciador de erros na comparação e ordenação de frações e, neste estudo, parece associar-se também às operações, não só com frações mas também com numerais decimais como irei referir adiante.

No caso da representação decimal, a incompreensão da estrutura dos numerais decimais (Cramer et al., 2009) fez com que os alunos confundissem 0,04 como sendo 0,40 ou que indicassem como resultado de uma operação 1,8 em vez de 0,18 ou 1,2 em vez de 1,02. A leitura incorreta dos numerais decimais e a coordenação entre a linguagem verbal e simbólica pode ter contribuído para este tipo de erro (e.g., verbaliza 3 décimas e considera no cálculo 0,03). O uso de 1,8 em vez de 0,18 ou de 1,2 em vez de 1,02 reflete igualmente dificuldades no significado do valor de posição, aliado ao sentido de operação (Slavit, 1999) e sentido crítico para avaliar a razoabilidade de um resultado.

Na multiplicação e divisão, à semelhança do que aconteceu com a representação fracionária, surge a multiplicação apenas por uma das partes (Cramer et al., 2009), não concebendo o aluno o numeral decimal como um todo representado por uma parte inteira e outra decimal (e.g., $4{,}2 \times 0{,}2 = 4{,}4$). A incompreensão do valor posicional (Hansen et al., 2014), apesar de surgir também associada à representação percentagem (e.g., 100% de 30=0,3 porque 30÷100=0,3) pela equivalência que os alunos estabelecem entre numerais decimais e percentagens, refletiu-se essencialmente nas operações multiplicação e divisão associadas ao sentido de operação. A conceção dos alunos de que a multiplicação de dois números produz uma grandeza maior e a divisão uma menor, no conjunto dos números racionais e em situações onde se operam números menores que 1, necessita de uma reflexão e análise que leve à ampliação do sentido de operação para o conjunto dos números racionais. Este é outro aspeto da aprendizagem dos números racionais que Prediger (2008) refere como requerendo uma reconceptualização.

Ainda na representação decimal, a dificuldade em perceber a relação entre operações, nomeadamente entre dividir por 0,5 ou $\frac{1}{2}$ e multiplicar por 2, originou o erro que indico no Quadro 105. Esta operação envolve o significado de divisão como medida (Sinicrope et al., 2002) que, não estando compreendido de forma consistente no conjunto dos números naturais, provoca novas dificuldades nos alunos no trabalho no conjunto dos números racionais. Mais uma vez, a excessiva manipulação simbólica em detrimento da reflexão acerca das quantidades envolvidas, pode levar os alunos a aplicarem procedimentos de forma incorreta, como neste caso.

Os erros dos alunos no cálculo mental com numerais decimais têm origem, essencialmente, em imagens mentais de factos numéricos ou de regras e procedimentos, fruto da sua experiência matemática no conjunto dos números naturais e que estes, aplicam no trabalho com numerais decimais pela semelhança que possuem com os números naturais. Evidência disto é o facto de os alunos operarem frequentemente com decimais com sendo números naturais referentes a $\frac{10}{100}$.

Na representação percentagem, a incompreensão do sinal "%" e do seu significado enquanto operador, relação parte-parte ou parte-todo (Parker & Leinhardt, 1995) fez emergir erros onde os alunos subtraem, adicionam ou dividem uma percentagem por um determinado valor; concebem uma percentagem enquanto produto entre duas grandezas (e.g., para 10% de ?=5 considera ?=2 porque $2\times 5 = 10$) ignorando a relação possível entre parte-parte; ou mostram não compreender que cada percentagem específica corresponde a uma parte do todo considerado (como no caso de 5% de ?=3). A dificuldade em compreender o significado de operador originou erros no trabalho na representação fracionária e agora reflete-se na representação percentagem, reforçando a ideia de que este significado deve ser abordado de forma a permitir a construção de representações mentais com sentido para os alunos e promotoras de compreensão. As representações mentais subjacentes aos erros dos alunos com percentagens, parecem centrar-se em imagens mentais de factos e regras conhecidas destes à semelhança do que acontece com a representação decimal.

Comum às representações faccionária e decimal, estão erros relacionados com a relação entre dividendo, divisor e quociente numa divisão e entre operações inversas que de certa forma se relacionam. O primeiro pode ser uma consequência da generalização do segundo. Ou seja, como para calcular qualquer um dos fatores de uma multiplicação se recorre à divisão, os alunos generalizam e assumem que o inverso também é verdadeiro. Tanto na divisão de frações como de numerais decimais, os alunos recorrem de forma incorreta à multiplicação (e.g., para $\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$ consideram ?=$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$) para calcular o divisor ou, mais uma vez, dividem o número de maior grandeza pelo de menor (e.g., para $2{,}1 \div ? = 8{,}4$ consideram ?=$8{,}4 \div 2{,}1$). Na impossibilidade de se recorrer sempre à operação inversa para calcular um dos valores em falta numa divisão, os alunos necessitam de compreender a relação entre dividendo, divisor e quociente (D=d$\times q$ ou d=$\frac{D}{q}$). Existem casos onde os alunos dividem sem qualquer ordem fatores e produto de uma multiplicação para obter um fator em falta, mostrando não compreender que, para calcular um fator de uma multiplicação, recorre-se ao quociente (divisão enquanto operação inversa) entre o produto e o outro fator (e.g., para ?$\times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ deve considerar ?=$\frac{1}{6} \div \frac{5}{6}$ e não $\frac{5}{6} \div \frac{1}{6}$). Na multiplicação de numerais decimais, existem casos onde os alunos identificam a relação entre os números (relação de 5 entre 25,5 e 5,1), mas a incompreensão da relação entre operações inversas a par de possíveis imagens mentais onde o quociente divide uma grandeza maior por uma menor (aprendizagem dos números naturais), influencia as opções dos alunos.

A concluir, os erros concetuais dos alunos sugerem que no estudo dos números racionais se deve apostar numa aprendizagem compreensiva dos significados associados a estes números, com especial ênfase para a medida (na representação fracionária), relação parte-todo (com especial atenção à relação entre numerador e denominador nas frações), operador (na representação fracionária e percentagem), e relação parte-parte (na percentagem). Na representação decimal, a estrutura do sistema de numeração e o valor posicional dos algarismos é essencial para a compreensão destes numerais e sua utilização em contextos diversos, destacando-se os contextos envolvendo dinheiro e cuja utilização também deve ser entendida como limitada (Galen et al., 2008), não só porque contemplam apenas números até às centésimas, mas também porque o uso de contextos de dinheiro para modelar o produto de dois numerais decimais não faz sentido, embora tivesse sido usado pelos alunos (ciclo II) neste estudo. Uma aposta na leitura correta de numerais decimais é um aspeto facilitador da compreensão da estrutura destes numerais.

Nas operações básicas, os erros dos alunos evidenciam lacunas na aplicação de propriedades das operações e da apropriação do conceito de número inverso e operação inversa. A relação entre operações, inversas ou não, e entre os diversos elementos de uma operação (em especial na multiplicação e divisão) foi outro aspeto que se mostrou crítico. A criação de uma rede de relações (Brocardo, 2011) entre números e entre operações pode contribuir para melhorar a compreensão dos alunos neste sentido e desenvolver um reportório de equivalências que possam apoiar o desenvolvimento do pensamento relacional (Empson et al., 2010) e a capacidade de generalizar de forma adequada, sem cometerem erros como os apresentados.

## 10.3 Evolução das estratégias de cálculo mental dos alunos

A terceira e última questão do estudo pretende perceber como evoluem as estratégias de cálculo mental dos alunos ao longo da experiência de ensino. A resposta a esta questão foi sendo pontualmente abordada ao longo da análise das estratégias dos alunos no Capítulo 7 e no Capítulo 9, nomeadamente, a propósito dos casos de José (ciclo I) e Rui (ciclo II). Recordo que na entrevista final estes alunos evidenciaram ter ultrapassado algumas das dificuldades manifestadas durante a realização da experiência de ensino, apresentando estratégias para determinadas operações quando antes não o tinham feito. Neste capítulo, procuro sistematizar e complementar algumas das inferências que realizei nos capítulos referidos. Realço o facto de que a análise da evolução das estratégias dos alunos não é realizada de forma focada em casos específicos de alunos, uma vez não se tratar de um *design* de investigação de estudos de caso, mas sim na evolução do tipo de estratégias que surgiu nas turmas onde se realizaram os dois ciclos de experimentação. Dada a diversidade de alunos e de conhecimentos prévios que possuem, não é possível afirmar que a evolução das estratégias aconteceu da mesma forma para todos os alunos, até porque o estudo não pretendia estudar essa questão, mas sim perceber como evoluem as estratégias verbalizadas nas discussões coletivas.

O Quadro 106 apresenta para cada uma das tarefas, a operação e a representação do número racional usada e, em cada uma destas, a categoria de estratégias identificadas e as representações mentais supostamente associadas. As zonas sombreadas da tabela indicam que entre as tarefas 1 e extra e 7 e 8 não foram propostas aos alunos situações contextualizadas; na linha apenas referente à tarefa 10 não foram propostas aos alunos expressões (caso particular do ciclo I); e que, nas tarefas 3, 5 e extra não foram analisados exemplos de expressões com ou sem valor em falta, tendo estas sido contempladas em exemplos analisados nas tarefas 5 ou 6. O facto de apresentar a designação, por exemplo, tarefa “5 ou 6” significa que as questões analisadas foram realizadas na tarefa 5 ou 6 dependendo do ciclo de experimentação. Este quadro pretende dar uma visão global da categoria de estratégias mais usadas pelos alunos ao longo da experiência de ensino e das possíveis representações mentais subjacentes a essas estratégias.

Em termos globais as estratégias dos alunos evoluíram de estratégias baseadas mais em factos e regras memorizadas, na representação fracionária (tarefas 1 e 2), para estratégias envolvendo relações numéricas, quando várias representações dos números racionais estavam envolvidas nas questões de cálculo mental (tarefas 9 e 10).

No início da experiência de ensino, na representação fracionária (em ambos os ciclos de experimentação) e nas quatro operações básicas em expressões sem valor em falta, os alunos privilegiaram o uso de factos numéricos (resultados de operações previamente conhecidas) e regras memorizadas (procedimentos algorítmicos), embora surgissem também estratégias de relações numéricas, especialmente na adição e subtração. Neste tipo de expressão, associada à multiplicação e divisão surgem essencialmente estratégias de regras memorizadas (procedimentos algorítmicos). Em expressões com valor em falta e situações contextualizadas, os alunos recorrem a estratégias de relações numéricas (relação parte-todo, entre operações inversas,

Quadro 106. Categorias de estratégias dos alunos ao longo da experiência de ensino.

<table>
<tr><th>Tarefas</th><th>Operação/Representação do número racional</th><th>Exp. s/ valor em falta</th><th>Exp. c/ valor em falta</th><th>Situações contextualizadas</th><th>Representação mental</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Adição/subtração de frações</td><td>Factos; regras<br>Relações numéricas</td><td rowspan="2">Relações numéricas</td><td rowspan="6"></td><td rowspan="2">Modelo mental<br>Imagem mental<br>Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Multiplicação/divisão de frações</td><td>Regras memorizadas</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Quatro operações com frações e decimais</td><td>Relações numéricas</td><td></td><td>Modelo mental<br>Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Adição/subtração de decimais</td><td>Relações numéricas<br>Regras memorizada</td><td>Relações numéricas</td><td>Modelo mental<br>Imagem mental<br>Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Multiplicação/divisão de decimais</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>Extra</td><td>Quatro operações com frações e decimais</td><td rowspan="2">Relações numéricas</td><td></td><td>Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>5 ou 6</td><td>Quatro operações com frações e decimais</td><td>Relações numéricas</td><td rowspan="2">Relações numéricas</td><td>Modelo mental<br>Imagem mental<br>representação proposicional</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Quatro operações com frações e decimais</td><td colspan="2"></td><td>Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Percentagens</td><td>Factos numéricos<br>Relações numéricas</td><td rowspan="2">Relações numéricas</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Modelos mentais<br>Imagem mental<br>Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Multiplicação com as três representações</td><td>Relações numéricas</td></tr>
<tr><td>9 ou 10</td><td>Quatro operações e as três representações</td><td colspan="3">Relações numéricas</td><td>Modelo mental<br>Representação proposicional</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Quatro operações e as três representações</td><td colspan="2"></td><td>Relações numéricas</td><td>Representação proposicional</td></tr>
</table>

mudança de representação, decomposição, propriedades das operações, etc.). Assim, à medida que se vão juntando outras representações à fracionária nas questões de cálculo mental, os alunos parecem abandonar estratégias de uso de factos e regras, optando apenas por estratégias de relações numéricas tanto em expressões com e sem valor em falta como em situações contextualizadas

Isto evidencia a importância do uso de diversas representações dos números racionais na abordagem a estes números, bem como o uso de expressões de valor em falta e de situações contextualizadas enquanto potenciadoras de estabelecimento de relações numéricas, como tenho vindo a referir neste trabalho.

Na adição e subtração de numerais decimais, voltam a surgir (especialmente no ciclo II) estratégias de regras memorizadas (procedimentos algorítmicos) embora os alunos, de um modo geral e nas quatro operações básicas, privilegiem estratégias de relações numéricas (mudança de representação, decomposição, relação entre multiplicar e dividir por 0,5 e dividir e multiplicar por 2, etc.). Estratégias de relações numéricas surgem com alguma ênfase na representação percentagem e quando duas representações dos números racionais surgem em conjunto numa mesma questão, não se verificando quase por completo estratégias baseadas apenas em factos e regras. Contudo, pontualmente associadas ao cálculo de percentagens e em valores múltiplos de 10 (caso de 90% de 30), aos alunos recorrem a estratégias de uso de factos numéricos (tabuada).

Em questões onde apenas surgem as representações fracionária, decimal e percentagem isoladamente, as estratégias dos alunos indiciam o recurso não só a modelos mentais (contextos de dinheiro, relógio e compras), mas também a imagens mentais (de números; factos numéricos; procedimentos; representações pictóricas; objetos; de algoritmos) e a representações proposicionais que representam relações entre números e entre operações. Em questões envolvendo as quatro operações e as três representações dos números racionais, os alunos parecem basear-se mais em representações proposicionais, embora pontualmente as suas estratégias sugiram o recurso a modelos e imagens mentais. A tendência crescente dos alunos para recorrerem a estratégias de relações numéricas que sugerem essencialmente o recurso a representações proposicionais são reveladoras de que a capacidade dos alunos em relacionar números e operações está a evoluir, uma vez que este tipo de representação mental apoia o estabelecimento de relações (Johnson-Laird, 1990). Esta análise mais global da evolução das estratégias dos alunos pode ser complementada por uma análise mais específica e que se relaciona com o que apresento no Quadro 107.

Quadro 107: Evolução das estratégias dos alunos ao longo da experiência de ensino.

| **Tarefas** | **Exemplo de questões** | **Estratégias de factos numéricos** | **Estratégias de regras memorizadas** | **Estratégias de relações numéricas** | **Representação mental** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ | Duas metades formam a unidade | Procedimento do algoritmo da adição de frações | Relação parte-todo | Imagem mental |
| **2** | $\mathbf{5\times\frac{1}{5}}$ | | Procedimentos do algoritmo de multiplicação de frações | | Imagem mental |
| | $\mathbf{\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}}$ | | Procedimentos do algoritmo de divisão de frações | | Imagem mental |
| **3** | $\frac{3}{4}+0,5$ | | | Mudança de representação<br>Decomposição | Modelo mental<br>Representação proposicional |
| **4** | $0,5+0,25$ | | Procedimentos do algoritmo de adição de numerais decimais | Mudança de representação | Representação proposicional |
| **Extra** | $\mathbf{\frac{7}{14}+\frac{1}{2}}$ | | | Relação entre numerador e denominador de uma fração | Representação proposicional |
| **6** | O sólido A tem 8,4 l de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. **Calcula a capacidade do sólido B.** | | | Decomposição | Representação proposicional |
| **9 ou 10** | $\frac{2}{3}\times ?=1$ | | | Propriedade da operação multiplicação | Representação proposicional |
| | $75\%\ de\ 20$ | | | Relação parte-todo<br>Relação parte-parte<br>Decomposição | Representação proposicional<br>Modelo mental |
| **10** | A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}$ litro de capacidade. **Com 0,75 litros de refresco quantos copos consegue encher a Ana?** | | | Mudança de representação | Representação proposicional |

Este Quadro apresenta alguns exemplos de questões de cálculo mental, cujo objetivo de aprendizagem era o mesmo, mas que foram propostas em momentos diferentes da experiência de ensino. A análise das estratégias dos alunos nestes diferentes momentos onde se pretende abordar o mesmo conceito ou procedimento permite fazer inferências acerca da possível evolução das estratégias dos alunos ao longo da experiência de ensino.

O cálculo de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ foi proposto na primeira questão de cálculo mental da experiência de ensino (tarefa 1). Em ambos os ciclos de experimentação, as estratégias da maioria dos alunos centraram-se na aplicação do algoritmo da adição de frações com denominadores iguais, embora tivessem surgido outras estratégias baseadas em factos e em relações numéricas. O recurso a procedimentos algorítmicos neste tipo de questão revela que a maioria dos alunos não reconhece frações que representam "metade". Neste sentido e tendo por base os níveis de desenvolvimento de cálculo mental referidos por Callingham e Watson (2004) (seis níveis de cálculo mental, sendo o nível A o mais básico e o F o mais elevado – Anexo C) estes alunos podem ainda não ter atingido o nível A (reconhecer o significado de $\frac{1}{2}$ na forma de fração). No entanto, as estratégias baseadas em factos mostram que existem alunos que compreendem o significado de $\frac{1}{2}$ e as de relações numéricas que concebem uma fração como uma relação parte-todo. Neste sentido, alunos que apresentam este tipo de estratégias podem ser posicionados nos níveis A e B (compreende a relação parte-todo e utiliza-a com frações) respetivamente. Na perspetiva de McCloskey e Norton (2009) alunos com estratégias de relação parte-todo no trabalho com frações mostram mobilizar as operações mentais de *unitizing* (considera o objeto como a unidade – uma maçã) e *partitioning* (parte a unidade contínua em parte iguais – parte a maçã em metades), operações básicas no trabalho com frações e que se coordenam com os níveis A e B de Callingham e Watson (2004).

Na tarefa extra foi proposto aos alunos o cálculo de $\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$ que envolve igualmente a adição de duas frações que representam "metade" como a apresentada na tarefa 1. Para a resolução desta questão uma grande parte dos alunos recorreu a estratégias de relações numéricas, em ambos os ciclos de experimentação, da qual destaco a relação entre o numerador e o denominador de $\frac{7}{14}$ com vista à generalização de frações que representam "metade". Esta foi uma generalização que surgiu em ambos os ciclos de experimentação, embora em momentos diferentes, e que poderá ser interpretada como partindo de uma relação parte-todo. Neste sentido, parece-me possível inferir que houve alguma evolução nas estratégias dos alunos, sendo a maioria capaz de realizar as operações mentais descritas por McCloskey e Norton (2009) e posicionar-se nos níveis A e B de Callingham e Watson (2004) ou mesmo no nível D onde as autoras integram alunos que reconhecem frações equivalentes a $\frac{1}{2}$. Esta generalização dos alunos permite identificar qualquer fração equivalente a "metade".

O cálculo de $5 \times \frac{1}{5}$ envolve uma propriedade da operação multiplicação que na tarefa 2 não foi reconhecida pelos alunos, por desconhecimento ou incompreensão de que 5 e $\frac{1}{5}$ são números inversos, tendo os alunos recorrido a estratégias de regras memorizadas (algoritmo de multiplicação de frações; simplificação de cálculos). Nas tarefas 9 e 10, surge uma expressão de valor em falta ($\frac{2}{3} \times ? = 1$) com o mesmo objetivo (discutir esta propriedade da multiplicação). Neste caso, alunos em ambos os ciclos de experimentação, verbalizam a propriedade da operação envolvida reconhecendo que o valor em falta é inverso de $\frac{2}{3}$. Callingham e Watson (2004) não se referem especificamente ao uso de propriedades das operações nos níveis de cálculo mental que apresentam.

Contudo, tendo em conta que a questão apresentada na tarefa 9 ou 10 contempla a operação entre frações não unitárias, a sua resolução por parte dos alunos com recurso a propriedades das operações poderá ser integrada no nível superior de cálculo mental (nível F) indicado pelas autoras.

Ainda na tarefa 2, para o cálculo de $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$, os alunos recorrem a estratégias de uso de regras memorizadas (dois processos algorítmicos para a divisão de frações). Esta expressão pretendia confrontar os alunos com a divisão de duas frações com denominadores iguais onde o conceito de fração como medida estava implícito. Esta situação parece não ser reconhecida pelos alunos. Na tarefa 10, é proposta a situação contextualizada que apresento no Quadro 107. Neste caso, possivelmente apoiados pelo contexto da situação (contexto de medida) e pela destreza no uso da mudança de representação que foi sendo cada vez mais visível nas estratégias dos alunos, ou impulsionados pelo uso de duas representações dos números racionais na mesma questão, surge no ciclo II de experimentação estratégias de relações numéricas baseadas exatamente na mudança de representação. 0,75 é convertido em $\frac{6}{8}$ (não em $\frac{3}{4}$ como por norma os alunos fazem) porque o divisor é $\frac{1}{8}$ e, de forma muito intuitiva sem necessidade aplicação de regras, o resultado 6 é indicado. Mais uma vez, o facto de alguns alunos reconhecerem equivalências entre representações dos números racionais e de as usarem para facilitar o cálculo mental é evidência de evolução na forma como percecionam a grandeza dos números (nível F de Callingham & Watson, 2004).

Na tarefa 3, para o cálculo de $\frac{3}{4} + 0{,}5$, envolvendo a representação facionária e decimal, existem alunos que recorrem à mudança de representação e decomposição de números, ou seja, a estratégias de relações numéricas. Curiosamente na tarefa 4 a propósito do cálculo de $0{,}5 + 0{,}25$, quando era espectável que os alunos recorressem a estratégias de regras memorizadas (como aconteceu no ciclo II) surge no ciclo I estratégias de relações numéricas onde a ênfase está na mudança da representação decimal para fracionária. Sendo a adição de numerais decimais algo abordado no 1.º ciclo e a de frações apenas no 2.º ciclo (dado o programa em vigor à altura deste estudo) é interessante perceber que existem alunos que se vão apropriando de algumas equivalências e que as usam no cálculo mental. Esta estratégia de relações numéricas poderá ter sido influenciada pelas dinâmicas desenvolvidas na experiência de ensino, onde o trabalho com as três representações dos números racionais e a equivalência entre elas foi bastante valorizado. Este é um aspeto que considero evidência de evolução nas estratégias dos alunos e que os posiciona no nível D de Callingham e Watson (2004) na representação decimal (compreende e usa a equivalência entre todas as representações dos números racionais).

Na tarefa 6 é proposta aos alunos a situação contextualizada que apresento no Quadro 107 envolvendo a fração como operador. Para a resolução desta questão os alunos recorrem a estratégias de relações numéricas, nomeadamente à decomposição de $\frac{3}{4}$ em $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ou $3 \times \frac{1}{4}$ uma vez que depois de calcular $\frac{1}{4}$ multiplicam o resultado por 3. O significado de operador é reconhecido, mas a diversidade de estratégias resume-se à decomposição da fração. Na tarefa 9 ou 10, surge a expressão $75\%\ de\ 20$ que embora diferente da situação da tarefa 6, envolve o conceito de operador e a possibilidade dos alunos estabelecerem correspondência entre as questões, dado o hábito que tem vindo a ser incutido nos alunos, de converter umas representações noutras. O facto de no cálculo de 75% surgir uma maior diversidade de estratégias é evidência, do meu ponto de vista, que os alunos aumentaram o seu reportório de estratégias de cálculo mental e que não se limitam a aplicar sempre um determinado tipo de estratégia. De notar que o cálculo de percentagens superiores a 50% revelou ser difícil para os alunos nos dois ciclos de experimentação, mas no final da experiência, neste tipo de percentagem, a diversidade de estratégias aumentou. Na resolução desta questão da tarefa 9 ou 10, alunos em ambas as turmas apresentam estratégias de decomposição de percentagens (como o fizeram com a frações na tarefa 6), de relação parte-todo onde percentagens de referência desempenham um papel fundamental (5% como referência) e de relação parte-parte onde comparam a percentagem pedida e a parte que falta para completar o todo, estabelecendo implicitamente relação com a representação $\frac{3}{4}$ . Os conhecimentos dos alunos associados a estas estratégias parecem incluir-se no nível de cálculo mental D pela forma como mostram compreender a grandeza dos números apresentados e pelas equivalências que estabelecem.

O nível de cálculo mental supostamente atingido por alguns alunos na representação fracionária (nível F) é superior ao que os dados parecem evidenciar para as representações decimal e percentagem (nível D) talvez por a representação fracionária ter sido a mais presente na experiência de ensino, facto este que poderá também ter influenciado a preferência dos alunos na conversão de decimais e percentagens em frações em estratégias de mudança de representação como referi na secção sobre as estratégias dos alunos.

Apesar de não ser possível afirmar que todos os alunos evoluíram nas suas estratégias de cálculo mental pelas razões que apresentei no início desta secção é possível, tendo em conta os exemplos que apresentei, concluir que houve evolução nas estratégias de cálculo mental que foram sendo apresentadas e discutidas nas discussões coletivas em sala de aula. Tendencialmente os alunos foram-se apropriando de determinadas relações numéricas, entre elas a mudança de representação, para assim apresentarem estratégias cada vez mais diversificadas.

# 11. Considerações finais

O desenvolvimento deste estudo representou, para mim, um processo de desenvolvimento pessoal e profissional, não apenas como professora mas sobretudo como investigadora. O contacto com diversas realidades nacionais e internacionais, no campo da Educação Matemática, contribuiu para este desenvolvimento e fez-me perceber a singularidade do estudo que desenvolvi.

Este estudo apresenta um contributo importante para o ensino da Matemática no campo dos números racionais não negativos uma vez que, estudos com estas características são escassos ou inexistentes em Portugal e no estrangeiro. O estudo introduziu na sala de aula (ambiente natural de aprendizagem dos alunos), dinâmicas de cálculo mental semanais integradas na prática letiva dos professores participantes, onde várias representações dos números racionais foram abordadas em simultâneo no cálculo mental, fazendo emergir a importância da equivalência entre representações na construção de estratégias de cálculo mental dos alunos.

A realização de dois ciclos de experimentação permitiu aferir um conjunto de tarefas de cálculo mental que poderão ser um ponto de partida para os professores que pretendam, a partir deste trabalho, desenvolver o cálculo mental com números racionais dos seus alunos. A análise das estratégias e erros dos alunos e das representações mentais associadas às suas estratégias, representa um campo de conhecimento importante, para a reflexão de professores e investigadores em torno do que os alunos sabem sobre números racionais e suas operações, que aspetos da aprendizagem destes números merecem maior atenção, tendo em conta os erros analisados, e que contextos matemáticos e não matemáticos se revelam mais importantes para os alunos, tendo em conta as representações mentais associadas às suas estratégias. A interpretação dos erros dos alunos a par das estratégias, pretende chamar a atenção para o erro enquanto oportunidade de aprendizagem e a discussão de estratégias de cálculo mental na sala de aula, como um meio privilegiado para aferir aprendizagens e desenvolver novas aprendizagens quer específicas quer transversais.

Desenvolver o cálculo mental dos alunos sem perceber os seus raciocínios através de discussões coletivas, pouco ou nada acrescenta ao conhecimento do professor sobre os seus alunos, nem tão pouco favorece a aprendizagem dos próprios alunos. Este estudo reforça a ideia que o cálculo mental não deve ser encarado como um conteúdo matemático que se aborda num dado momento da aprendizagem dos alunos, mas sim como um aspeto transversal à aprendizagem dos números e das operações devendo estar presente na planificação do professor ao longo do ano letivo. A evolução das estratégias de cálculo mental dos alunos descrita neste estudo mostra que este é um possível caminho para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos de forma sistemática e integrada.

Outro aspeto importante deste estudo, é o facto de ter permitido uma parceria contante entre professoras e investigadora dentro e fora da sala de aula baseada na preparação, reflexão e intervenção, onde a teoria e a prática se integraram de forma natural, como é desejável mas nem sempre possível em investigação, e útil tanto para o desenvolvimento profissional das professoras intervenientes como para a aprendizagem dos alunos.

Para além dos aspetos positivos referentes à produção de conhecimento útil aos professores e investigadores, que referi anteriormente, este estudo originou alguns constrangimentos e fez emergir algumas fragilidades, nomeadamente no que respeita à metodologia de investigação. A metodologia de investigação que usei neste estudo foi potencialmente rica pela quantidade e diversidade de dados a que deu origem e pela necessidade que me incutiu em manter uma revisão de literatura atualizada. Se, por um lado, a quantidade de dados permitiu ter uma visão mais abrangente e precisa da ecologia de aprendizagem, por outro, originou alguns constrangimentos nomeadamente nas opções que tive de tomar quanto à seleção de dados que pudessem ser representativos das estratégias e erros dos alunos.

As fragilidades emergem igualmente da metodologia de investigação e relacionam-se com as representações mentais dos alunos. A opção por interpretar estas representações mentais emergiu do desenvolvimento do estudo. Se, por um lado, as discussões coletivas representaram um ambiente favorável à recolha de dados referentes às estratégias dos alunos, a partir das quais fiz inferências acerca das representações mentais subjacentes, por outro, esta recolha poderá não ter sido suficiente para uma análise devidamente aprofundada sobre esta questão. Na sala de aula não era possível questionar de forma mais direta, sistemática e prolongada alguns dos alunos, pelo risco que isso poderia representar na desmotivação do coletivo. Questiono-me se este questionamento aos alunos, com vista ao aprofundamento na interpretação das suas representações mentais, deveria de ter sido realizado extra sala de aula em entrevistas individuais, mas as que realizei e a triangulação que efetuei pouco ou nada acrescentaram ao que observei na sala de aula sendo notória a perda da riqueza referente à interação que se estabeleceu nas discussões coletivas. O *design research* é uma metodologia de investigação potente e, do meu ponto de vista, adequada ao estudo de fenómenos em contexto de sala de aula, mas difícil de gerir quando se pretende aprofundar determinados aspetos na investigação, como neste caso as representações mentais dos alunos. Esta questão carece de aprofundamento no futuro, embora tenha que ser sempre baseada em inferências do investigador pois o que os alunos por vezes verbalizam nem sempre traduz de forma direta o modo como pensaram. O processo de verbalização de estratégias, por vezes, é acompanhado de uma reflexão aquando desta verbalização, o que faz com que o que se diz nem sempre corresponda diretamente ao que se pensou, dai esta análise se revestir sempre de alguma subjetividade.

Deste estudo emergiram novas questões para investigação futura. Uma delas relaciona-se com a experimentação na sala de aula, outra com a evolução das estratégias dos alunos e outra, ainda, com o cálculo mental enquanto meio para o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores. Embora tivesse desenvolvido dois ciclos de experimentação, a realização de um terceiro (que em termos temporais e com as características dos ciclos I e II se torna impraticável numa tese de doutoramento), teria sido útil para refinar algumas as alterações que foram introduzidas na experiência de ensino nas tarefas no ciclo II, nomeadamente a importância de agregar sempre numa mesma tarefa contextos matemáticos e não matemáticos. Do ponto de vista da evolução das estratégias dos alunos, fica a necessidade de se perceber se uma experiência de ensino que se inicie com questões de cálculo mental com outra representação que não a fracionária, iria de forma gradual incutir nos alunos o uso de estratégias de relações numéricas onde a representação fracionária assume um papel importante na conversão entre representações de um número racional (de decimal e percentagem para fração). Por fim, a experiência com cálculo mental com números racionais que tenho tido em workshops com professores e futuros professores em Portugal, faz-me acreditar que o cálculo mental constitui um meio favorável para o desenvolvimento profissional destes professores e futuros professores. Neste sentido, parece-me pertinente perceber que semelhanças e diferenças existem entre as estratégias de cálculo mental com números racionais dos alunos, professores ou futuros professores, tendo em conta que o conhecimento concetual e procedimental destes é supostamente diferente do conhecimento dos alunos, e que aspetos da dinâmica inerente ao desenvolvimento do cálculo mental se mostram particularmente importantes e potenciadores de mudança de práticas.

Todas estas considerações e observações que fui redigindo ao longo desta tese, fruto da minha reflexão enquanto pessoa, professora e investigadora são indicadoras de que, agora que terminei este trabalho desafiante que me propus realizar, nada está terminado – pelo contrário, está tudo em aberto para continuar a investigar no futuro. Agora sim, sinto-me preparada para fazer um doutoramento!

# Referências Bibliográficas

AERA (2011). Code of ethics. *Educational Researcher*, *40*(3), 145-156.

Albergaria, I., S., & Ponte, J. P. (2008). Cálculo mental e calculadora. *Actas do XVII Encontro de investigação em educação matemática*. Lisboa: SPCE.

Baddley, A. (1993). *Human memory: Theory and Practice*. London: Lawrence Erlbaum.

Baddley, A. (2000). The episodic buffer: a new component of working memory?. *Trends in cognitive science*, *4(*11*)*.

Bardin, L. (2004). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bell, A. (1993). Principles for the design of teaching, *Educational Studies in Mathematics*, *24*(1), 5-34.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1986). Estimation and children's concept of rational number size. In H. L. Schoen (Ed.), *Estimation and mental computation*, (pp. 103-111), Reston, VA: NCTM.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bourdenet, G. (2007). Le calcul mental. *Activités mathématiques et scientifiques*, *61*, 5-32. Strasbourg: IREM.

Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de Matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina e I. Rocha (Eds.), *Sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.

Brocardo, J. (2011). Uma linha de desenvolvimento do cálculo mental: Começando no 1.º ano e continuando até ao 12.º ano. *Atas do Profmat2011*. Lisboa: APM.

Brown, G., & Quinn, R. J. (2006). Algebra students' difficulty with fractions: An error analysis. *Australian Mathematics Teacher*, *62*(4), 28-40.

Buys, K. (2001). Mental arithemetic. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed*)*, *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Utrecht: Freudenthal Institute (FI), Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO).

Callingham, R., & Watson, J. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 69-86.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. *AARE 2003 Conference papers, International Education Research*. (Retirado de http://www.aare.edu.au/03pap/can03399.pdf em 15/05/2010).

Cardoso, M. T. P. (2010). *O conhecimento matemático e didático, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?* (Tese de Doutoramento, Universidade do Minho).

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi. L. (2003). *Think Mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Caviola, S., Mammarella, I., Cornoldi, C., & Lucangeli, D. (2012). The involvement of working memory in children's exact and approximate mental addition. *Journal of Experimental Child Psychology*, *112*, 141–160.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehere, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *The Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15–42.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2009). *Fractions operations and initial decimal ideas.* Companion module to Rational Number Project: Fraction Lessons for the Middle Grades. (Retirado de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/rnp2.html em 8/08/2011).

Cruz, S. M., & Spinillo, A. G. (2004). Resolvendo adição de frações através do simbolismo matemático e através de âncoras. *Quadrante*, *12(*2), 3-29.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York, NY: Oxford University Press.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2005). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: SAGE.

Dias, M. (2008). *A utilização da imagem e das tecnologias interactivas nos programas de treino da percepção visual: um estudo com alunos do 1.º ciclo do ensino básico com dificuldades de aprendizagem* (Tese de doutoramento, Universidade do Minho).

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for Learning (Plenary address). In F. Hitt and M. Santos (Eds), Proceedings of the 21st *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 3–26.Mexico: PME.

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. (2010). The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Heidelberg: Springer.

Fosnot, C., T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, E., Flores, X., Luci, G., Montoya, S., & Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *RELIME-Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(1), 9-40.

Garcia, C. (2008). *A multiplicação de números racionais: Um estudo com alunos do 6.º ano* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Gómez, B. (1995). Tipologia de los errores de cálculo mental en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 13*. 3, 313-325.

Goetz, J., & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research.*San Diego, CA: Academic Press.

Guedes, C. (2008). *Cálculo mental em alunos do 1.º ciclo do ensino básico* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Guimarães, S., D., & Freitas, J. L. M. (2010). Contribuições de uma prática regular de cálculo mental para a aprendizagem de conceitos matemáticos nos anos iniciais. *Educação Matemática Pesquisa*. *2*, 292-309.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Ed).*Educational design research* (pp.17-51).London: Routledge.

Hansen, A., Drews, D., Dudgeon, J., Lawton, F. & Surtees, L. (2014). *Children's errors in mathematics*. London: SAGE.

Heirdsfield, A. (2005). One teacher's role in promoting understanding in mental computation. In Chick, H.L. & Vicent, J.L. (Eds). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. *3*, 113-120. Melbourne: PME.

Heirdsfield, A. (2011). Teaching mental computation strategies in early mathematics. *Young Children*. *66* (2), 96-102.

Henningsen, M., & Stein, M. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 524-549.

Johnson-Laird, P. N. (1980). Mental models in cognitive Science. *Cognitive Science, 4*, 71-115.

Johnson-Laird, P. N. (1990). *Mental models*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. (Trabalho originalmente publicado em 1983).

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content and instructional strategies for teaching* (2nd edition). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F.K.Lester (Org.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 629-666). Charlotte, NC: Information Age.

Llinares-Ciscar, S., & Sánchez-García, M. V. (2000). *Fracciones*. Madrid: Sintesis.

Logie, R., Gilhooly, K. & Wynn, V. (1994). Counting on working memory in arithmetic problem solving. *Memory & Cognition*, *22(*4*)*,395-410.

Lüdke , M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Machado, R., Golbert, C. (2009). Resolução de problemas matemáticos: a memória de trabalho como recurso para a aprendizagem da aritmética. *IX Congresso Nacional de Educação – EDUCARE e III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia*. PUCPR.

Matos, J., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos – Tarefas para 5.º ano* (Materiais de apoio ao professor).

McCloskey, A., & Norton, A. (2008). Teaching experiments and professional development. *Journal of Mathematics Teacher Educators*, *11*, 285-305.

McCloskey, A., & Norton, A. (2009). Using Steffe's fraction: Recognizing schemes, which are different from strategies, can help teachers understand their student's thinking about fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15(*1), 44-50.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8 & 44.

McIntosh, A. (2004). Developing computation. *Australian Primary Mathematics Classroom*. *9*(4), 47-49.

McIntosh, A. (2006). Mental computation of school-aged students: Assessment, performance levels, and common errors. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), *Developing and researching quality in mathematics teaching and learning* (Proceedings of MADIF 5) (pp. 112-122). Linköping, Sweden: Swedish Society for Research in Mathematics Education.

Medeiros, C. F. (2001). Modelos mentais e metáforas na resolução de problemas matemáticos verbais. *Ciência & Educação*, *7*(2), 209-234.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*: *Revised and expanded from case study research in education*. S. Francisco: Jossey-Bass.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa. (Retirado de http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf em 29/02/2008).

Ministério da Educação e Ciência – DGE. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa. (Retirado de http://dge.mec.pt/metascurriculares/index.php?s=directorio&pid=17 em 04/09/2013).

Monteiro, M. C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, *14*(1), 89-108.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2008). O sentido do número no currículo de Matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina e I. Rocha (Eds.), *Sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.

Morais, C. M. S. (2011). *O cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no 1.º ano de escolaridade* (Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa).

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122–147.

Murphy, C. (2004). How do children come to use a taught mental calculation strategies?. *Educational Studies in mathematics*, *56*, 3-18.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

Nieveen, N., McKenney, S., & Van den Akker, J.(2006). Educational design research: the value of variety. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Ed). (pp.151-158).London: Routledge.

Nieveen, N. (2007). Formative evaluation in educational design research. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.). An introduction to educational design research. *Proceedings of the seminar conducted at the East China Normal University* (pp.89-101). Shanghai. Enschede: SLO.

Noteboom, A., Boklove, J. & Nelissen, J. (2001). Glossary Par I. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* (pp. 89-91). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO).

Oliveira, N., M., F. (2013). *Desenvolver o cálculo mental no contexto da resolução de problemas de adição e subtração: um estudo com alunos do 2.º ano de escolaridade* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Otero, R. M. (2001). *Psicología cognitiva, representaciones mentales e investigaciones en enseñanza de las ciências.* (Retirado de http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol4/n2/v4_n2_a2.htm em 6/02/2012).

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research, 65*(4), 421-481.

Pérez, J. (1997). *Numeros decimales: porquê? Para quê?*. Madrid: Sintesis.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Plasencia, I. C. (2002). Imágenes mentales en la actividad matemática: Reflexiones de una investigacion. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *49*, 3-34.

Plomp, T. (2007). Educational design research: an introduction. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.). An introduction to educational design research. *Proceedings of the seminar conducted at the East China Normal University* (pp.9-35). Shanghai. Enschede: SLO.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P., Branco, N., Quaresma, M., Velez, I., & Mata-Pereira, J. (2012). Perspetivas teóricas no estudo das práticas profissionais dos professores de matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Práticas de ensino da Matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 267-279). Lisboa: SPIEM.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções, 22*, 196-216.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M., (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22(*2), 55-81.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and instruction 18(1),* 3-17.

Presmeg, N. (1986).Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *6*(3), 42-46.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 595-610.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Ralston, A. (1999). Let's abolish pencil-and-paper arithmetic. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *18*(2), 173-194.

Rathouz, M. (2011). Making sense of decimal multiplication. *Mathematics Teaching in the Middle School*. *16*(7), 430-437.

Rational Number Project. http://education.umn.edu/rationalnumberptoject/

Reys, R., E., Reys, B., J., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(4), 304-326.

Ruthven**,** K. (2009). Towards a calculator-aware mathematics curriculum. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8*(1), 111-124.

Schifter, D. (1997). Developing operation sense as a foundation for algebra. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Chicago.

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003).Constructions and inference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, *13*, 141-156. Elsevier Science Ltd: Pergamon.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., & Rasch, R. (2010). Creative thinking and problem solving with depictive and descriptive representations. In L. Verschaffel, E. de Corte, T. Jong, & J. Elen (Eds.), *Use of representation in reasoning and problem solving*. New York, NY: Routledge.

Siebert, D. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: the case of division of fractions. In B. Litwiller, & G. Bright (Org.), Making *sense of fractions, ratios, and proportions*: 2002 *Yearbook* (pp. 247-256). Reston: NCTM.

Sinicrope, R., Mick, H., & Kolb, J. (2002). Fraction division interpretations. In B. Litwiller, & G. Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions*: 2002 *Yearbook* (pp. 153-161).Reston: NCTM.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transition from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics*, *37*(3), 251-172.

Sowder, J. T. (1990). Mental computation and number sense. *Arithmetic Teacher*, *37*, 18-20.

Steffe, L., P., Olive, J. (2010).*Children's fractional knowledge*. Heidelberg: Springer.

Swan, M. (2008). Designing a multiple representation learning experience in secondary algebra, *Educational Designer*, *1*, 1-17.

Taton, R. (1969). *O cálculo mental* (Tradução M. A. Videira). Lisboa: Arcádia.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction Part 1. *Mathematics in school*, *28*(5).

Thompson, I. (2009). Mental calculation. *Mathematics Teaching*, *213*, 40-42.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 29–47.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, *41*, 541–555.

Wolman, S. (Ed.) (2006). *Apuntes para la enseñanza matemática: Calculo mental con números racionales*. Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (Retirado de http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/primaria/calculo_racional_web.pdf em 22/03/2011).

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 458-477.

Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso: Planejamento e métodos* (Tradução de A. Thorell, 4.ª ed.). Porto Alegre: Bookman.

# Anexos

## Anexo A

Estratégias de cálculo mental com números naturais (Thompson, 1999 e Gálvez et al., 2011).

| Estratégias com números naturais | Descrição | Exemplo |
|---|---|---|
| **Contagem** | Contagem a partir do primeiro número | 3+4 começa a contagem no 3 ... $4, 5, 6, 7$. |
| | Contagem a partir do número maior | $4 + 6$ efetua a operação iniciando no 6. |
| | Contagem para trás | $8 - 5$ é calculado iniciando no 8 ... $7, 6, 5, 4, 3$ . |
| | Contagem até ao subtrativo | $8 - 5$ inicia a contagem no 8 ... $7, 6, 5$ e termina no número que está no subtrativo. |
| | Contagem a partir de | $10 - 4$, parte do 4 e conta até 10. |
| **Utilização de factos conhecidos** | | Por exemplo: reconhece números que adicionados/subtraídos formam 10.<br>Multiplicação e divisão por $10, 100, 1000$. |
| **Uso de dobros e quase dobros** | | $6 + 7$ é 13 porque $6 + 6$ é 12 e basta adicionar mais 1. |
| | | $8 - 5$ é 3 porque $10 - 5$ é 5 e $8 - 5$ é 3. |
| **Mudança de operação** | Para a operação inversa | $10 - 6$ é 4 pois $6 + 4 = 10$ |
| | Multiplicação para adições sucessivas | $3 \times 6 = 6 + 6 + 6$ |
| | Divisão para subtrações sucessivas | $20 \div 4 = 20 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4$ |
| **Números de referência** | | Por exemplo: usar o 5 como referência – $8 + 6$ é 14 pois de 8 tira-se 5, de 6 tira-se 5 e sobram 4 e $5 + 5 + 4$ é 14;<br>Usar o 10 como referência – 13-5 é 8 porque ao 13 retira-se 3 para ficar 10, mas como $5 = 3 + 2$ falta tirar 2 ao 10 |
| **Compensação** | | 9+5=10+5-1 |
| **Decomposição** | Opera ordem a ordem | 235+642=200+400+30+60+5+2 |
| | Decompõe um dos fatores na multiplicação | $4 \times 15 = 2 \times 15 \times 2$ |
| | Decompõe o dividendo | Factorização do divisor - $150 \div 4 = 150 \div 2 \div 2$ |
| **Propriedades das operações** | Comutativa | 4+6=6+4 |
| | Distributiva da multiplicação em relação à adição ou à subtração | $5 \times 9 = (8 \times 5 + 1 \times 5)$<br>$5 \times 9 = (10 \times 5 - 1 \times 5)$ |
| **Utilização de formas mentais dos algoritmos escritos** | | |

## Anexo B

Estratégias de cálculo mental com números racionais (segundo Caney & Watson, 2003).

| Estratégias com números racionais | Descrição | Exemplo |
|---|---|---|
| **Mudança de operação** | Divisão para multiplicação | Para 3:0,5 muda para multiplicação. |
| | Subtração para adição | Para 4,4 – 3 muda para adição. |
| **Mudança de representação** | Frações para decimais | Para ¼ -1/2 muda para problema com decimais 0,74 – 0,5 . |
| | Decimal para frações | Para 0,5+0,75 muda para problema com frações ½+1/4. |
| | Percentagem para frações | Para 25% de 80, muda para 25% para ¼. |
| | Números naturais referentes a 10/100 | Para 0,19+0,1, 0,19 para a ser 19 e 0,1 passa a ser 10. |
| **Utilização de equivalências** | Correspondência entre equivalências | Para ¾ - ½, ½ é reconhecido como 2/4 |
| **Utilização de factos conhecidos** | Correspondência entre factos conhecidos | Para 10% de 45, usa o conhecimento de 10% para trabalhar fora do 10% de 40 e 10% de 50. |
| **Repetição da operação adição/multiplicação** | Sucessivas Adições /multiplicações | Para 4×3/4, multiplica ¾ duas vezes e novamente duas vezes. |
| | Uso de dobros/metades | Em 25% de 80, divide 80 ao meio e ao meio de novo. |
| **Estabelece ligações** | Relação entre a parte/todo | Para 6,2+1,9, 1,9 para a 2 |
| **Trabalho com partes de um segundo número** | Divisão pelo valor posicional | Para 10% de 45, divide 40 por 10 e divide 5 por 10 |
| | Divisão por partes | Para 0,5+0,75, 0,75 passa a ser 0,5 e 0,25. |
| **Trabalho da esquerda para a direita** | Dividir ambos os números separados por um decimal | Para 4,5 – 3,3, trabalha da esquerda para a direita com números naturais primeiro, ou da direita para a esquerda com decimais primeiro. |
| | Dividir por valor posicional, após apenas a vírgula | Para 0,19+0,1, trabalha com as décimas primeiro. |
| **Utilização de imagens mentais** | | Para ¾ - ½, divide mentalmente um retângulo em 4 partes. |
| **Utilização de formas mentais dos algoritmos escritos** | | Para 0,5+0,75, |
| **Utilização de regras memorizadas** | | Para 1,2×10, amplia a regra"movimenta a vírgula para a direita". |

## Anexo C

Níveis de cálculo (segundo Callingham & Watson, 2004).

| Nível | Frações | Decimais | Percentagens | Demandas cognitivas |
|---|---|---|---|---|
| **F** | Operações envolvendo $^1/_3$ ou outras fracções não unitárias incluindo adições de frações unitárias com diferentes denominadores | Multiplicação de dois decimais; divisão de decimais quando múltiplos dos dígitos estão envolvidos | Percentagens envolvendo frações equivalentes menos familiares | Usa estruturas de base para calcular com números menos familiares ou frações com denominadores diferentes. |
| **E** | Adição e subtração com denominadores diferentes; números naturais multiplicados por frações não unitárias quando o cancelamento é possível | Multiplicação por potências de 10; divisões de pequenos números naturais por 0,1; somatório de números decimais com diferentes casas decimais. | 10% e 90% de números naturais de 2 dígitos | Desenha estruturas de base, tais como equivalência, valor posicional para cálculos mais complexos. |
| **D** | Uso de frações equivalentes de ½, frações unitárias de múltiplos de nº naturais ou ½ de números impares decimais; divisão por ½ ou ¼. | Divisão pelos mesmos decimais (resposta=1); a soma de uma parte com um reagrupamento; números naturais de um ou dois dígitos multiplicados por 0,5 ; decimais conhecidos multiplicados por 10 ou 100. | Percentagens equivalentes a ¼, ¾ de números naturais múltiplos de 4; 150% de números pares com dois dígitos menores que 30. | Compreende e usa a equivalência entre todas as representações e começa a desenhar um conceito de valor posicional nos decimais |
| **C** | Adição ou subtração de frações com o mesmo denominador ou múltiplo (2, 4); ½ ou ½ de múltiplos de 10 relacionados. | Adição com o mesmo número de casas decimais; subtração de pequenos números naturais, a números decimais | Apenas exemplos de 25% com múltiplos de 10 não superiores a 100; 10% de um pequeno múltiplo de 10. | Compreende a noção de uma porção inteira e as partes que a constituem e começa a desenvolver a noção de equivalência |
| **B** | Principalmente frações unitárias com denominador 2, 3 ou 4; operações com frações unitárias de pequenos números naturais ou ½ de números pares de um dígito | Usam números decimais equivalentes a representações básicas, como ½ e ¼. | Apenas exemplo de 50% e 100%; equivalência com a metade; noção do todo. | Compreende a relação parte-todo e utiliza-a com frações para fracionar números naturais simples |
| **A** | Conceito de ½ ou metade de um número inteiro par Não reagrupa | | | Reconhece o significado de ½ na forma de fração |

## Anexo D

Planificação das tarefas do estudo preliminar.

| | Tarefas | | Objetivos |
|---|---|---|---|
| | 1.º momento da aula (M1) | 2.º momento da aula (M2) | |
| **Sessão 1**<br>Adição e subtração de frações | $a)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ;<br>$b)\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$;<br>$c)\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ;<br>$d)\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$;<br>e)$\frac{1}{2}+\frac{3}{6}$ | $f)\ \frac{1}{2}+\frac{4}{8}$;<br>$g)\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$;<br>h)$\frac{1}{5}+\frac{2}{10}$;<br>i)$\frac{7}{10}-\frac{1}{2}$;<br>$j)\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ | • Reconhece o significado de ½ e usa frações equivalentes a metade;<br>• Adiciona/subtrai frações com o mesmo denominador ou múltiplo um do outro;<br>• Adiciona/subtrai frações com denominadores diferentes ou múltiplos um do outro;<br>• Usa diferentes representações de um número racional (frações e decimais); |
| **Sessão 2**<br>Adição e subtração de frações e decimais | $a)\frac{1}{2}+?=1$;<br>b) $\frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$;<br>c) $?+\frac{2}{10}1$;<br>d) $?-\frac{1}{2}0{,}2$;<br>e)$\frac{6}{12}+?=1$ | $f)\ ?+\frac{4}{8}=1$;<br>g)$\frac{1}{4}+?=\frac{1}{2}$;<br>h) $\frac{1}{5}+?=0{,}4$ ;<br>i)$0{,}7-?=\frac{3}{6}$ ;<br>j)$\frac{3}{4}-?=\frac{1}{2}$ | • Reconhece o significado de ½ e usa frações equivalentes a metade;<br>• Adiciona/subtrai frações com o mesmo denominador ou múltiplo um do outro;<br>• Adiciona/subtrai frações com denominadores diferentes ou múltiplos um do outro;<br>• Usa diferentes representações de um número racional (frações e decimais);<br>• Estabelece relações entre a parte/todo. |
| **Sessão 3**<br>Adição e subtração de numerais decimais | $a)\ 0{,}75\ +\ 0{,}5$;<br>$b)0{,}25+0{,}5$;<br>$c)\ 4{,}5-\ 3{,}3$;<br>$d)\ 3{,}2\ +\ 1{,}9$;<br>$e)7{,}2-\ 0{,}9$ | $f)0,18\ +\ 0{,}2$;<br>$g)0{,}4+\ 0{,}6$;<br>$h)\ 0{,}65-\ 0{,}5$;<br>$i)\ 0,03+\ 0{,}7$;<br>$j)\ 1{,}4-\ 0{,}9$ | • Usa diferentes representações de um número racional (frações e decimais);<br>• Decompõe números decimais;<br>• Opera primeiro com a parte inteira e depois com a parte decimal ou vice-versa. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Sessão 4**<br><br>Adição e subtração de numerais decimais | $a)\ 0,18 + ? = 0,38$<br><br>$b)\ ? + 0,6 = 1$<br><br>$c)\ 0,65 - ? = 0,15$<br><br>$d)\ 0,03 + ? = 0,73$<br><br>$e)\ 1,4 - ? = 0,5$ | $f)\ 0,25 + ? = 1$<br><br>$g)\ 0,04 + ? = 1$<br><br>$h)\ 1,25 - ? = 0,5$<br><br>$i)\ 0,8 - ? = 0,74$<br><br>$j)\ 1,7 - ? = 0,8$ | • Usa diferentes representações de um número racional (frações e decimais);<br>• Decompõe números decimais;<br>• Opera primeiro com a parte inteira e depois com a parte decimal ou vice-versa.<br>• Estabelece relações entre a parte/todo. |
| **Sessão 5**<br><br>Percentagens | $a)\ 50\%\ de\ 30$<br><br>$b)\ 25\%\ de\ 12$<br><br>$c)\ 10\%\ de\ 35$<br><br>$d)\ 75\%\ de\ 40$<br><br>$e)\ 90\%\ de\ 80$ | $f)\ 20\%\ de\ 25$<br><br>$g)\ 30\%\ de\ 10$<br><br>$h)\ 150\%\ de\ 20$<br><br>$i)\ 80\%\ de\ 50$<br><br>$j)\ 5\%\ de\ 40$ | • Usa diferentes representações de um número racional (frações e decimais);<br>• Usa o conceito de metade e de metade de metade para calcular uma percentagem;<br>• Usa o 10% como valor de referência;<br>• Trabalha com partes de um número;<br>• Estabelece relações entre a parte/todo |
| **Sessão 6**<br><br>Resolução de problemas com as três representações | a)O António comeu $\frac{3}{6}$ de um pão e o Francisco comeu $\frac{4}{8}$ .<br><br>**Que porção de pão comeram ambos?**<br><br>b)Lançou-se uma moeda ao ar 30 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. **Completa**<br><br>Face da moeda — Frequência relativa<br>Euro — 0,64<br>Nacional — ?<br><br>**a tabela.** | e) A Rita tem $\frac{3}{4}$ de uma cartolina e vai dar à Joana $\frac{1}{2}$.<br><br>**Qual a porção de cartolina com que a Rita vai ficar?**<br><br>f) Um computador custa 400€. Nos super saldos está com 75% de desconto.<br><br>**Qual o preço do computador em saldo?** | • Reconhece o significado de ½ e usa frações equivalentes a metade;<br>• Estabelece relações entre a parte/todo;<br>• Usa diferentes representações de um número racional (frações e decimais);<br>• Usa o 10% como valor de referência;<br>• Trabalha com partes de um número;<br>• Decompõe números decimais;<br>• Opera primeiro com a parte inteira e depois com a parte decimal ou vice-versa. |

c) Uma t-shirt custa 30€ e está com um desconto de 20%.

**Qual o valor do desconto em euros?**

d) Num campeonato de futebol entre turmas do 2.º ciclo, $\frac{3}{8}$ dos golos foram marcados pelos alunos do 5º ano.

**Que fração corresponde aos golos marcados pelos alunos de 6º ano?**

g) A varanda da casa do João é retangular tem de perímetro 8,4 m e um comprimento de 3 m.

**Qual a largura da varanda do João?**

h) O preço de um Mp4 é de **100€.** É mais vantajoso o vendedor fazer um desconto de **10%** e depois decidir fazer outro de **20%** ou fazer logo um desconto de **30%**?

## Anexo E

## Guião de reflexão pós-aula acerca da aula de cálculo mental

- Opinião acerca da forma como decorreu a aula.

- O tempo foi adequado, demasiado ou insuficiente.

- Estratégias dos alunos.

- Erros dos alunos

- Dificuldades dos alunos

- Contributo desta aula de cálculo mental para o tópico que está a ser trabalhado.

- Pontos a melhorar na gestão da discussão na sala de aula.

- Pontos fortes e fracos da aula.

## Anexo F

Guião de entrevista semiestruturada

(Professora)

### Como foram trabalhados os racionais e o cálculo mental

1. Quando iniciou a abordagem aos números racionais com estes alunos?
2. Que tipo de abordagem privilegiou no 5.º ano? E no 6.º ano? (recurso a diversos contextos, trabalho com as três representações dos números racionais em simultâneo incluindo a pictórica)
3. Trabalhou anteriormente o cálculo mental com estes alunos? De que modo?

### Opinião acerca da experiência de ensino e sua realização

4. Que reflexão faz acerca do modo como este ano trabalhou o cálculo mental com os seus alunos, ao longo da experiência de ensino que realizou em colaboração com a investigadora? (relativamente ao tipo de tarefas, a integração no percurso de aprendizagem dos alunos, tempo destinado ao cálculo mental, a discussão na sala de aula)
5. Como encara a discussão com os alunos das suas estratégias erros após calcularem mentalmente? Vê alguma vantagem nisso? Acha que é tempo bem empregue? Porquê?

### Articulação entre o que é realizado na experiência de ensino e as restantes aulas de matemática

6. De que forma articulou o trabalho realizado ao longo da experiência de ensino com o trabalho que desenvolveu nas restantes aulas de Matemática?
7. Que contributo lhe parece que este trabalho com cálculo mental trouxe para a aprendizagem matemática dos alunos?

### Perceção da professora relativamente ao que os alunos aprenderam e o que aprenderam

8. Que evolução na aprendizagem dos alunos percecionou ao longo da experiência de ensino?

**Anexo G**

Entrevista semiestruturada

(alunos)

- $\frac{8}{12} + \frac{1}{3}$
- $? - \frac{4}{8} = \frac{1}{4}$
- $\frac{9}{8} \div \frac{3}{4}$
- $\frac{1}{4}\, de\, \frac{1}{4}$
- $? \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- $0{,}7 \times 0{,}40$
- De uma peça de tecido com 24,6 m$^2$ a D. Vera usou $\frac{1}{4}$. Que porção de tecido usou?
- $3{,}1 \div ? = 6{,}2$
- $\frac{4}{8} \times 0{,}25$
- A Rita tem $4{,}5l$ de sumo de laranja e quer encher copos com $\frac{1}{3}\, l$ . Quantos copos vai conseguir encher?
- $5\%\ de\ ? = 10$
- $30\%\ de\ 80$

**Questão principal a colocar aos alunos:**

Como pensaste?

## Anexo H

Categorias e subcategorias de análise para estratégias de cálculo mental com números racionais.

| | Categorias | | | Representações mentais | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Estratégias de factos numéricos** | **Estratégias de regras memorizadas** | **Estratégias de relações numéricas** | | | |
| Subcategorias | • Resultados de operações previamente conhecidos | • Simplificação de cálculos<br>• Procedimento algorítmico<br>• Divisão por 10 e/ou 100 | • Relação parte-todo<br>• Relação parte-parte<br>• Relação entre numerador e denominador<br>• Relação entre operações inversas<br>• Relação entre operações<br>• Propriedades das operações<br>• Relação entre expressões<br>• Mudança de representação<br>• Relação parte-todo<br>• Relação parte-parte<br>• Relação entre numerador e denominador<br>• Relação entre operações inversas<br>• Relação entre operações<br>• Propriedades das operações<br>• Relação entre expressões | **Modelos mentais**: relógio; dinheiro; compras | **Imagens mentais:** números; factos numéricos; procedimentos; representações pictóricas; objetos; de algoritmos | **Representações proposicionais**: de relações entre números; entre operações |

## Anexo I

Categorias e subcategorias de análise para erros no cálculo com números racionais.

| | **Categorias** | | | **Representações mentais** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Erros percetuais** | **Erros procedimentais** | **Erros concetuais** | | | |
| Subcategorias | • Usa 0,2, 0,5 e 0,8 como equivalente a $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$ respeitavelmente<br>• Visualiza 5 em vez de 0,5<br>• Considera 0,2 como 2 ou $\frac{1}{2}$ e calcula metade de um valor<br>• Calcula a percentagem da parte e não o todo<br>• Subtrai quando se pede uma adicionar, por influência da operação anterior. | • Calcula frações equivalentes operando apenas com o numerador<br>• Usa factos de adição na multiplicação<br>• Comete erros de cálculo | • Conceito de fração<br>• Adição/subtração de frações<br>• Multiplicação/Divisão de frações<br>• Relação entre dividendo, divisor e quociente<br>• Relação entre operações inversas<br>• Propriedades das operações<br>• Equivalência entre representações dos números racionais<br>• Estrutura dos numerais decimais<br>• Relação entre operações<br>• Valor posicional nos numerais decimais<br>• Conceito de percentagem<br>• Relação parte-parte<br>• Relação parte-todo | **Modelos mentais**: dinheiro | **Imagens mentais:** números; factos numéricos; procedimentos | **Representações proposicionais**: generalização de procedimentos, relações entre números e entre operações baseadas em proposições verdadeiras e/ou falsas |

**Anexo J**

Pedido de autorização à direção dos agrupamentos de escolas

… de …de 201..

Exmo(a). Sr(a). Diretor(a) do Agrupamento de Escolas…

Sou professora de Matemática, licenciada em ensino básico na variante de Matemática/Ciências da Natureza, pela Escola Superior de Educação de Portalegre e Mestre em Educação, na especialidade de Didática da Matemática, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Neste momento encontro-me a realizar o Doutoramento, em Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

No âmbito da minha tese de doutoramento, estou a realizar uma investigação que pretende: (i) perceber que estratégias privilegiam e que dificuldades evidenciam os alunos quando calculam mentalmente; (ii) compreender como estes desenvolvem estratégias de cálculo mental com números racionais; e (iii) perceber quais os contributos de uma experiência de ensino para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais.

Entre fevereiro e maio de 201... irei proceder à recolha de dados e gostaria de o fazer numa das escola do agrupamento de V. Exa., nomeadamente a escola ……. Pretendo que esta recolha de dados seja realizada na turma F do 6º ano da professora maria Irene Segurado, que se mostrou disponível para colaborar neste estudo.

Para a recolha de dados é necessário proceder à gravação, em áudio e em vídeo, de alguns episódios da aula de Matemática e à gravação em áudio das sessões de trabalho com a professora.

Assim, venho por este meio solicitar a autorização de V. Exa. para realizar a minha investigação na Escola ……, garantindo o anonimato da escola, da professora e dos alunos envolvidos, na tese ou em qualquer momento de divulgação do estudo.

Subscrevo-me com consideração, aguardando uma resposta favorável da parte de V. Exa.

A Investigadora

**Anexo K**

Pedido de autorização aos encarregados de educação

… de …de 201..

Exmo(a). Sr(a). Encarregado(a) de Educação

Sou professora de Matemática e neste momento encontro-me a realizar o Doutoramento, em Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. No âmbito da minha tese de doutoramento, estou a realizar uma investigação em que pretendo perceber que estratégias privilegiam e que dificuldades evidenciam os alunos quando calculam mentalmente com números racionais.

A recolha de dados decorre entre fevereiro de 201.. e maio de 201.. na escola ……., tendo sido autorizada pela respetiva Diretora do Agrupamento de Escolas ….. Para a recolha de dados é necessário proceder à gravação, em áudio e em vídeo, de alguns episódios da aula de Matemática.

Assim, venho por este meio solicitar a sua autorização para áudio e vídeo-gravar o seu educando em contexto de sala de aula. Saliento ainda que os dados recolhidos são usados exclusivamente como materiais de trabalho, estando garantida a privacidade e anonimato dos participantes. Manifesto, ainda, a minha disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Subscrevo-me com consideração, aguardando uma resposta favorável da parte de V. Exa.

A investigadora

✂------------------------------------------------------------------------------------------------

**Autorização**

Eu ________________________________________ Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) ________________________, N.º___ da turma ___ do 6º ano, autorizo que a professora Renata Carvalho Carrapiço grave em áudio e em vídeo o meu educando na sala de aula de Matemática no âmbito da investigação que está a desenvolver e de acordo com as condições que apresentou.

Data __/__/201…

Assinatura: ______________________________________________________________

## Anexo L

Entrevista semiestruturada do estudo preliminar

(alunos)

### Parte I

- $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$
- $\frac{6}{12}+0{,}5$
- $0{,}06+\_\_\_=1$
- $\frac{4}{6}+\_\_=1$
- $0{,}8-0{,}09$
- $25\%\ de\ 80$
- $\frac{3}{10}+4{,}5$
- $90\%\ de\ 30$
- $0{,}65-0{,}5$

### Parte II

- A toalha de praia da Luisa é constituída por círculos e triângulos. Os triângulos ocupam $\frac{3}{8}$ da toalha e os círculos ocupam 50%. A toalha tem mis porção de círculos ou de triângulos?
- A medida do perímetro de um triângulo isósceles é 6 cm. Os lados iguais medem 2,3 cm cada um. Indica a medida do outro lado.
- O Pedro, o João e o Samuel foram ao cinema e gastaram 20€. O João contribuiu com 0,25 do valor gasto e o Pedro com 30%. Que valor deu o Samuel em dinheiro para o cinema.

**Questão principal a colocar aos alunos:**

Como pensaste?

**Anexo M**

Planificação de Matemática, 6.º ano (ano letivo de 2011/2012)

| | CONTEÚDOS | Blocos |
|---|---|---|
| **1.º Período**<br>16/09 a 16/12 | Perímetros e Áreas | 12 |
| | Isometrias | 14 |
| | Números naturais. Números racionais não negativos | 8 |
| **2.º Período**<br>03/01 a 23/03<br>*(Interrupção Carnaval*<br>*20/02 a 22/02)* | Números racionais não negativos | 8 |
| | Relações e regularidades | 11 |
| | Volumes | 10 |
| **3.º Período**<br>10/04 a 15/06 | Representação e interpretação de dados | 11 |
| | Números inteiros | 10 |

## Anexo N

### DISCIPLINA:MATEMÁTICA – 6 º ANO

### PLANIFICAÇÃO A LONGO PRAZO 2012/2013

| 1º Período | Nº de Tempos Letivos (45') | 2º Período | Nº de Tempos letivos (45') | 3º Período | Nº de Tempos letivos (45') |
|---|---|---|---|---|---|
| De ___/09/2012 a ___/12/2012 | | De ___/01/2013 a ___/04/2013 | | De ___/04/2013 a ___/06/2013 | |
| **2ª Unidade**: Números naturais<br>• Multiplicação e divisão de potências.<br>• Propriedades das operações e regras operatórias | 22 | **4ª Unidade**: Relações e regularidades<br>• Expressões numéricas e propriedades das operações.<br>• Sequências e regularidades.<br>• Proporcionalidade direta. | 26 | **7ª Unidade**: Números inteiros<br>• Noção de número inteiro e representação na reta numérica.<br>• Comparação e ordenação.<br>• Adição e subtracção com representação na reta numérica. | 26 |
| **3ª Unidade**: Números racionais não negativos<br>• Operações (multiplicação e divisão). Valores aproximados | 12 | **5ª Unidade**: Volumes<br>• Volumes do cubo, do paralelepípedo e do cilindro. | 16 | **1ª Unidade**:Reflexão, rotação e translação<br>• Noção e propriedades dareflexão, rotação e translação.<br>• Simetrias axial e rotacional. | 12 |
| Apresentação / Avaliação / Auto-avaliação | 14 | **6ª Unidade**:Representação e interpretação de dados<br>• Formulação de questões.<br>• Natureza dos dados. Extremos e amplitude.<br>• Gráficos circulares. | 12 | | |
| | | Avaliação / Auto-avaliação | 10 | Avaliação / Auto-avaliação | 10 |

# Anexo O

Planificação das tarefas (proposta inicial)

| **Tema:** Álgebra<br>**Tópico:** Relações e regularidades | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Calendarização** | **Representação do número racional** | **Operações** | **Tarefa 1**<br>**Momento 1** | **Momento 2** | **Capacidades de cálculo** (níveis de cálculo mental Callingham & Watson, 2004) | **Possíveis estratégias dos alunos** | **Previsão dos erros dos alunos** |
| **Sessão 1** | Frações | Adição<br>Subtração | $a)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$<br>$b)\ \frac{3}{4}-\frac{1}{4}$<br>$c)\ \frac{1}{2}+\frac{2}{4}$<br>$d)\ \frac{3}{4}-\frac{1}{2}$<br>$e)\ \frac{4}{8}+\frac{2}{4}$ | $f)\ \frac{1}{2}+?=1$<br>$g)?-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$<br>$h)\ \frac{3}{6}+?=1$<br>$i)\ \frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$<br>$j)\ \frac{1}{2}+?=\frac{3}{4}$ | Reconhece metades na forma ½;<br>Usa frações equivalentes a metade;<br>Adiciona/subtrai frações com o mesmo denominador ou múltiplo um do outro;<br>Adiciona/subtrai frações com denominadores diferentes ou múltiplos um do outro;<br>Estabelece relações entre a parte/todo. | Imagens mentais;<br>Factos conhecidos;<br>Estabelecimento de relações;<br>Equivalências;<br>Propriedades das operações. | Adiciona/subtrai numeradores e denominadores;<br>Relaciona erradamente o todo com as partes que o constituem. |

<table>
<tr><td colspan="8">Tema: Álgebra<br>Tópico: Relações e regularidades</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Calendarização</th><th rowspan="2">Representação do número racional</th><th rowspan="2">Operações</th><th colspan="2">Tarefa 2</th><th rowspan="2">Capacidades de cálculo<br>(níveis de cálculo mental Callingham & Watson, 2004)</th><th rowspan="2">Possíveis estratégias dos alunos</th><th rowspan="2">Previsão dos erros dos alunos</th></tr>
<tr><th>Momento 1</th><th>Momento 2</th></tr>
<tr><td>Sessão 2</td><td>Frações</td><td>Multiplicação<br>Divisão</td><td>$a)\ 5\times\frac{1}{5}$<br>$b)\ \frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$<br>$c)\ \frac{2}{3}\times\frac{3}{2}$<br>$d)\ \frac{4}{6}\div\frac{2}{6}$<br>$e)\ \frac{4}{8}\div\frac{1}{2}$</td><td>$f)\ \frac{3}{4}\times ?=1$<br>$g)\ \frac{1}{4}\div ?=\frac{1}{2}$<br>$h) ?\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$<br>$i)\ \frac{3}{4}\div ?=\frac{1}{4}$<br>$j)\ \frac{15}{20}\times\frac{20}{3}$</td><td>Divide frações por metade;<br><br>Divide frações com denominadores iguais, ou múltiplo um do outro;<br><br>Multiplica/divide frações com denominadores diferentes;<br><br>Multiplica por frações não unitárias quando o cancelamento é possível.</td><td>Imagens mentais;<br><br>Regras memorizadas;<br><br>Factos conhecidos;<br><br>Estabelecimento de relações;<br><br>Equivalências;<br><br>Mudança de operação;<br><br>Propriedades das operações.</td><td>Não foram previstos erros, uma vez que as regras da multiplicação de naturais continuam a verificar-se quando multiplicamos frações (Lamon, 2006)</td></tr>
</table>

| **Tema:** Geometria<br>**Tópico:** Volumes | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Calendarização** | **Representação do número racional** | **Operações** | **Tarefa3**<br>**Momento 1** | **Momento 2** | **Capacidades de cálculo** (níveis de cálculo mental Callingham & Watson, 2004) | **Possíveis estratégias dos alunos** | **Previsão dos erros dos alunos** |
| **Sessão 3** | Frações<br>Decimais<br>(Resolução de Problemas) | Adição<br>Subtração<br>Multiplicação<br>Divisão | $a)\ \frac{3}{4}+\ 0{,}50$<br>$b)\ \frac{8}{10}-\ 0{,}2$<br>$c)\ 2{,}4\ \div\frac{1}{2}$<br>$d)\ \frac{1}{5}\times 0{,}25$<br>$e)\ 0{,}75\ \div\frac{1}{4}$ | $a)$ Uma embalagem de 250g de cereais custa 0,80€. Qual o preço de 750g dos mesmos cereais?<br><br>$b)$ Quatro livros de banda desenhada custam 12,8€. Qual o preço de cada livro?<br><br>$c)$ O João desenhou, numa folha de papel, a distância de casa à escola através de um segmento de 1,5 $cm$. Sabendo que a escala que usou foi de 1:200, qual a distância real de casa à escola?<br><br>$d)$ Para fazer refresco de laranja é necessários $\frac{1}{10}l$ de concentrado por cada $\frac{1}{2}l$ de água. Que quantidade de concentrado se deve usar para fazer $1,5l$ de refresco. | Reconhece metades;<br><br>Adiciona/subtrai frações com o mesmo denominador, denominadores diferentes ou múltiplo um do outro;<br><br>Multiplica/divide frações;<br><br>Opera com numerais decimais com o mesmo número de casas decimais;<br><br>Usa a equivalência entre diferentes representações de um número racional (frações e decimais);<br><br>Estabelece relações entre a parte/todo. | Imagens mentais;<br><br>Regras memorizadas;<br><br>Factos conhecidos;<br><br>Estabelecimento de relações;<br><br>Mudança de representação;<br><br>Equivalências;<br><br>Decomposição de números;<br><br>Propriedades das operações. | Converte erradamente decimais em frações ou percentagens;<br><br>Comete um erro de cálculo. |

**Tema:** Geometria

**Tópico:** Volumes

| Calendarização | Representação do número racional | Operações | Tarefa 4 | | Capacidades de cálculo (níveis de cálculo mental Callingham & Watson, 2004) | Possíveis estratégias dos alunos | Previsão dos erros dos alunos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Momento 1 | Momento 2 | | | |
| **Sessão 4** | Decimais | Adição<br>Subtração | $a)$ $0{,}5 + 0{,}25$<br>$b)$ $0{,}18 - 0{,}03$<br>$c)$ $0{,}75 + 0{,}5$<br>$d)$ $1{,}9 - 0{,}50$<br>$e)$ $0{,}6 + 0{,}04$ | $f)$ $0{,}7 + ? = 1$<br>$g)$ $? - 4{,}3 = 0{,}5$<br>$h)$ $0{,}04 + ? = 1$<br>$i)$ $1{,}25 - ? = 0{,}75$<br>$j)$ $0{,}07 + ? = 0{,}84$ | Usa expressões equivalentes a metade;<br><br>Adiciona/subtrai números na representação decimal, com diferentes casas decimais;<br><br>Usa a equivalência entre diferentes representações de um número racional (frações e decimais);<br><br>Estabelece relações entre a parte/todo. | Imagens mentais;<br><br>Regras memorizadas;<br><br>Factos conhecidos;<br><br>Estabelecimento de relações;<br><br>Mudança de representação;<br><br>Equivalências;<br><br>Decomposição de números;<br><br>Compensação;<br><br>Propriedades das operações. | Leitura incorreta dos números;<br><br>Não respeita o valor posicional;<br><br>Converte erradamente decimais em frações ou percentagens;<br><br>Compara erradamente números;<br><br>Comete um erro de cálculo;<br><br>Usa uma propriedade das operações que não se aplica. |

| **Tema:** Geometria<br>**Tópico:** Volumes | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Calendarização** | **Representação do número racional** | **Operações** | **Tarefa 5**<br>**Momento 1** | **Momento 2** | **Capacidades de cálculo**<br>(níveis de cálculo mental Callingham & Watson, 2004) | **Possíveis estratégias dos alunos** | **Previsão dos erros dos alunos** |
| **Sessão 5** | Decimais | Multiplicação<br>Divisão | $a)\ 0{,}25 \times 4$<br>$b)\ 12{,}2\ \div 0{,}5$<br>$c)\ 0{,}6\ \times 0{,}30$<br>$d)\ 0{,}14\ \div\ 0{,}2$<br>$e)\ 4{,}2\ \times 0{,}2$ | $f)\ ? \times 0{,}5 =\ 30$<br>$g)\ 2{,}1\ \div ? = 8{,}4$<br>$h)\ ? \times 0{,}4 = 0{,}16$<br>$i)\ 0{,}82\ \div ? = 1{,}64$<br>$J)\ 25{,}5\ \times ? = 5{,}1$ | Usa expressões equivalentes a metade;<br><br>Multiplica/divide números na representação decimal, com diferentes casas decimais;<br><br>Divide decimais quando múltiplos dos dígitos estão envolvidos;<br><br>Usa a equivalência entre diferentes representações de um número racional (frações e decimais); | Imagens mentais;<br><br>Regras memorizadas;<br><br>Factos conhecidos;<br><br>Estabelecimento de relações;<br><br>Mudança de representação;<br><br>Equivalências;<br><br>Decomposição de números;<br><br>Compensação;<br><br>Propriedades das operações. | Leitura incorreta dos números;<br><br>Não respeita o valor posicional;<br><br>Converte erradamente decimais em frações ou percentagens;<br><br>Compara erradamente números;<br><br>Comete um erro de cálculo;<br><br>Usa uma propriedade das operações que não se aplica. |

| **Tema:** Geometria<br>**Tópico:** Volumes | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Calendarização** | **Representação do número racional** | **Operações** | **Tarefas 6**<br>**Momento 1** | **Momento 2** | **Capacidades de cálculo**<br>(níveis de cálculo mental Callingham & Watson, 2004) | **Possíveis estratégias dos alunos** | **Previsão dos erros dos alunos** |
| **Sessão 6** | Decimais<br>Frações<br>(Resolução de problemas) | Adição<br>Subtração<br>Multiplicação<br>Divisão | ***a***) O Luís encheu $\frac{3}{6}$ de um depósito de água e a Joana 0,5 desse mesmo depósito. Quem colocou mais água no depósito?<br>***b***) O perímetro da face de um tanque cúbico é 8,8 $m$. Qual a medida do lado?<br>***c***) O avô do João já gastou $\frac{5}{10}$ da capacidade de um depósito de água na rega do jardim. Quanto lhe falta para esvaziar o depósito?<br>***d***) A Rita construiu um cubo em que a área da base era $0{,}36\ m^2$. Qual a medida do lado? | ***e***) O sólido A tem $8{,}4\ l$ de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. Calcula a capacidade do sólido B<br>$f$) Uma tina tem de capacidade $22{,}5\ l$ . Quantos baldes de $\frac{1}{2}\ l$ são necessários encher para despejar por completo a tina?<br>***g***)A área da base de um paralelepípedo retângulo é de $12{,}4\ cm^2$ . Sabendo que a altura é $0{,}25\ cm$, qual o volume do paralelepípedo?<br>***h***) A área da base de um cilindro é $4{,}2\ m^2$ e o seu volume $6{,}3\ m^3$. Calcula a altura. | Usa metades ou expressões equivalentes a metade;<br><br>Adiciona/subtrai frações com o mesmo denominador, denominadores diferentes ou múltiplo um do outro;<br><br>Multiplica/divide frações;<br><br>Opera com numerais decimais com o mesmo número de casas decimais;<br><br>Usa a equivalência entre diferentes representações de um número racional (frações e decimais);<br><br>Estabelece relações entre a parte/todo. | Imagens mentais;<br><br>Regras memorizadas;<br><br>Factos conhecidos;<br><br>Estabelecimento de relações;<br><br>Mudança de representação;<br><br>Equivalências;<br><br>Decomposição de números;<br><br>Compensação;<br><br>Propriedades das operações. | Leitura incorreta dos números;<br><br>Não respeita o valor posicional;<br><br>Converte erradamente decimais em frações ou percentagens;<br><br>Compara erradamente números;<br><br>Comete um erro de cálculo;<br><br>Usa uma propriedade das operações que não se aplica. |

<table>
<tr><td colspan="9">Tema: Organização e tratamento de dados<br>Tópico: Representação e interpretação de dados</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Calendarização</td><td rowspan="2">Representação do número racional</td><td rowspan="2">Operações</td><td colspan="2">Tarefa 7</td><td rowspan="2">Capacidades de cálculo<br>(níveis de cálculo mental Callingham & Watson, 2004)</td><td rowspan="2">Possíveis estratégias dos alunos</td><td rowspan="2">Previsão dos erros dos alunos</td></tr>
<tr><td>Momento 1</td><td>Momento 2</td></tr>
<tr><td>Sessão 7</td><td>Percentagens</td><td>Multiplicação</td><td>$a)$ 50% $de$ 40<br>$b)$ 25% $de$ 20<br>$c)$ 75% $de$ 80<br>$d)$ 10% $de$ 350<br>$e)$ 90% $de$ 30</td><td>$f)$ 10% $de$ ? = 5<br>$g)$ 50% $de$ ? = 60<br>$h)$ 5 % $de$ ? = 3<br>$i)$ 25% $de$ ? = 20<br>$j)$ 30% $de$ ? = 15</td><td>Usa metades e quartos;<br><br>Usa representações equivalentes de um número racional (frações e decimais);<br><br>Opera com percentagens inferiores a 100%.<br><br>Calcula 10% de um múltiplo de 10;<br><br>Estabelece relações entre a parte/todo.</td><td>Imagens mentais;<br><br>Regras memorizadas;<br><br>Factos conhecidos;<br><br>Estabelecimento de relações;<br><br>Mudança de representação;<br><br>Equivalências;<br><br>Decomposição de números;<br><br>Propriedades das operações.</td><td>Opera com percentagens como se fossem números naturais, ignorado o sinal %;<br><br>Converte erradamente percentagens em números decimais ou frações;<br><br>Comete um erro de cálculo;<br><br>Relaciona erradamente o todo com as partes que o constituem.</td></tr>
</table>

| **Tema:** Organização e tratamento de dados<br>**Tópico:** Representação e interpretação de dados | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Calendarização** | **Representação do número racional** | **Operações** | **Tarefa 8** | | **Capacidades de cálculo** (níveis de cálculo mental Callingham & Watson, 2004) | **Possíveis estratégias dos alunos** | **Previsão dos erros dos alunos** |
| | | | **Momento 1** | **Momento 2** | | | |
| **Sessão 8** | Percentagens<br>Frações<br>Decimais | Multiplicação | $a)\ \frac{3}{4}\ de\ 60$<br>$b)\ 0{,}2\ de\ 10$<br>$c)\ \frac{1}{3}\ de\ 120$<br>$d)\ 20\%\ de\ 50$<br>$e)\ \frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$ | $f)\ \frac{1}{2}\ de\ 0{,}18$<br>$g)\ 0{,}25\ de\ 40$<br>$h)\ 90\%\ de\ 60$<br>$i)\ 1\%\ de\ 20$<br>$j)\ \frac{1}{5}\ de\ 40$ | Usa metades e quartos;<br><br>Usa representações equivalentes de um número racional (frações e decimais);<br><br>Opera com percentagens inferiores a 100%.<br><br>Calcula 10% de um múltiplo de 10;<br><br>Multiplica números racionais;<br><br>Estabelece relações entre a parte/todo | Imagens mentais;<br><br>Regras memorizadas;<br><br>Factos conhecidos;<br><br>Estabelecimento de relações;<br><br>Mudança de representação;<br><br>Equivalências;<br><br>Decomposição de números;<br><br>Propriedades das operações. | Comete um erro de cálculo;<br><br>Converte erradamente percentagens em números decimais ou frações. |

| **Tema:** Organização e tratamento de dados<br>**Tópico:** Representação e interpretação de dados | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Calendarização** | **Representação do número racional** | **Operações** | **Tarefa 9**<br>**Momento 1** | **Momento 2** | **Capacidades de cálculo**<br>(níveis de cálculo mental Callingham & Watson, 2004) | **Possíveis estratégias dos alunos** | **Previsão dos erros dos alunos** |
| **Sessão 9** | Percentagens<br>Frações<br>Decimais | Adição<br>Subtração<br>Multiplicação<br>Divisão | $a)\ \frac{5}{10}+\frac{1}{4}$<br>$b)\ 0{,}68-0{,}02$<br>$c)\ \frac{4}{6}\times\frac{6}{7}$<br>$d)\ \frac{9}{10}\div\frac{3}{10}$<br>$e)\ 75\%\ de\ 20$ | $f)\ \frac{6}{12}+?=1$<br>$g)\ ?\ -2{,}2=\frac{1}{5}$<br>$h)\ \frac{2}{3}\times?=1$<br>$i)\ 0{,}75\ \div?=3$<br>$j)\ 20\%\ de\ ?=\ 8$ | Reconhece metades e quartos;<br><br>Usa representações equivalentes de um número racional (frações, decimais, percentagens);<br><br>Multiplica/divide números na representação decimal, com diferentes casas decimais;<br><br>Divide decimais quando múltiplos dos dígitos estão envolvidos;<br><br>Opera com percentagens inferiores e superiores a 100%;<br><br>Multiplica/divide números racionais;<br><br>Estabelece relações entre a parte/todo; | Imagens mentais;<br><br>Regras memorizadas;<br><br>Factos conhecidos;<br><br>Estabelecimento de relações;<br><br>Mudança de representação;<br><br>Equivalências;<br><br>Decomposição de números;<br><br>Propriedades das operações. | Adiciona/subtrai numeradores e denominadores;<br>Relaciona erradamente o todo com as partes que o constituem.<br>Leitura incorreta dos números ;<br>Não respeita o valor posicional;<br>Converte erradamente decimais em frações ou percentagens;<br>Compara erradamente números;<br>Comete um erro de cálculo;<br>Usa uma propriedade das operações que não se aplica;<br>Opera com percentagens como se fossem números naturais, ignorado o sinal %. |

| **Tema:** Organização e tratamento de dados<br>**Tópico:** Representação e interpretação de dados | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Calendarização** | **Representação do número racional** | **Operações** | **Tarefa 10**<br>**Momento 1** | **Momento 2** | **Capacidades de cálculo**<br>(níveis de cálculo mental Callingham & Watson, 2004) | **Possíveis estratégias dos alunos** | **Previsão dos erros dos alunos** |
| **Sessão 10** | Percentagens<br>Frações<br>Decimais<br>(Resolução de problemas) | Adição<br>Subtração<br>Multiplicação<br>Divisão | $a$) Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, qual a frequência relativa da face nacional?<br><br>$b$) Na turma da Rita $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e 25% pratica natação. Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade? | $g$) A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$ .Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?<br><br>$h$) A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com $8{,}16\ m$ retirou $\frac{1}{8}$ . Que porção de tecido usou? | Reconhece metades e quartos;<br><br>Adiciona/subtrai frações com o mesmo denominador, denominadores diferentes ou múltiplo um do outro;<br><br>Multiplica/divide frações;<br><br>Opera com numerais decimais com o mesmo número de casas decimais;<br><br>Usa representações equivalentes de um número racional (frações, decimais, percentagens);<br><br>Opera com percentagens inferiores e superiores a 100%;<br><br>Multiplica/divide números racionais;<br><br>Estabelece relações entre a parte/todo; | Imagens mentais;<br><br>Regras memorizadas;<br><br>Factos conhecidos;<br><br>Estabelecimento de relações;<br><br>Mudança de representação;<br><br>Equivalências;<br><br>Decomposição de números;<br><br>Compensação;<br><br>Propriedades das operações. | Adiciona/subtrai numeradores e denominadores;<br>Relaciona erradamente o todo com as partes que o constituem;<br>Leitura incorreta dos números ;<br>Não respeita o valor posicional;<br>Converte erradamente decimais em frações ou percentagens;<br>Compara erradamente números;<br>Comete um erro de cálculo;<br>Usa uma propriedade das operações que não se aplica;<br>Opera com percentagens como se fossem números naturais, ignorado o sinal %. |

**Tema:** Organização e tratamento de dados

**Tópico:** Representação e interpretação de dados

| Calendarização | Representação do número racional | Operações | Tarefa 10 (continuação) Momento 1 | Momento 2 | Capacidades de cálculo (níveis de cálculo mental Callingham & Watson, 2004) | Possíveis estratégias dos alunos | Previsão dos erros dos alunos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sessão 10** | Percentagens<br>Frações<br>Decimais<br>(Resolução de problemas) | Adição<br>Subtração<br>Multiplicação<br>Divisão | $c$) Diariamente, 400 alunos almoçam no refeitório da escola do João. Destes alunos, $\frac{3}{4}$ comem sempre sopa. Quantos alunos comem sopa?<br><br>$d$) Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de 30,2° e a temperatura mínima de 15,9°. Qual a amplitude térmica? | $g$) Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. Calcula o valor do desconto.<br><br>$h$) A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $\frac{3}{4}l$ de refresco? | Reconhece metades e quartos;<br><br>Adiciona/subtrai frações com o mesmo denominador, denominadores diferentes ou múltiplo um do outro;<br><br>Multiplica/divide frações;<br><br>Opera com numerais decimais com o mesmo número de casas decimais;<br><br>Usa representações equivalentes de um número racional (frações, decimais, percentagens);<br><br>Opera com percentagens inferiores e superiores a 100%;<br><br>Multiplica/divide números racionais;<br><br>Estabelece relações entre a parte/todo; | Imagens mentais;<br><br>Regras memorizadas;<br><br>Factos conhecidos;<br><br>Estabelecimento de relações;<br><br>Mudança de representação;<br><br>Equivalências;<br><br>Decomposição de números;<br><br>Compensação;<br><br>Propriedades das operações. | Adiciona/subtrai numeradores e denominadores;<br>Relaciona erradamente o todo com as partes que o constituem.<br>Leitura incorreta dos números ;<br>Não respeita o valor posicional;<br>Converte erradamente decimais em frações ou percentagens;<br>Compara erradamente números;<br>Comete um erro de cálculo;<br>Usa uma propriedade das operações que não se aplica;<br>Opera com percentagens como se fossem números naturais, ignorado o sinal %. |

# Anexo P

# Tarefas do ciclo de experimentação I

Pensa Rápido!

Qual o valor exacto?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

A

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$$

B

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$$

C

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$$

D

$$\frac{4}{8}+\frac{2}{4}$$

E

**STOP**

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\boxed{1} \quad \frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\boxed{1}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{4}} \quad \frac{4}{8}+\frac{2}{4}=\boxed{1}$$

$$\frac{1}{2}+?=1$$

F

$$?-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$$

G

$$\frac{3}{6}+?=1$$

H

$$\frac{1}{2} - ? = \frac{1}{4}$$

I

$$\frac{1}{2} + ? = \frac{3}{4}$$

J

STOP

$$\frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{2}} = 1 \qquad \boxed{\frac{8}{10}} - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{3}{6} + \boxed{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\frac{1}{2} - \boxed{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$$

Pensa Rápido!

Qual o valor exacto?

$$\frac{3}{4}+0{,}50$$

A

$$\frac{8}{10}-0{,}2$$

B

$$2{,}4\div\frac{1}{2}$$

C

$$\frac{1}{5}\times 0{,}25$$

D

$$0{,}75 \div \frac{1}{4}$$

E

**STOP**

$$\frac{3}{4} + 0{,}50 = \boxed{1{,}25} \qquad \frac{8}{10} - 0{,}2 = \boxed{0{,}6}$$

$$2{,}4 \div \frac{1}{2} = \boxed{4{,}8}$$

$$\frac{1}{5} \times 0{,}25 = \boxed{\frac{1}{20}} \qquad 0{,}75 \div \frac{1}{4} = \boxed{3}$$

Uma embalagem de 250g de cereais custa 0,80€.

**Qual o preço de 750g dos mesmos cereais?**

F

Uma embalagem de 250g de cereais custa 0,80€.

**Qual o preço de 750g dos mesmos cereais?**

F

Quatro livros de banda desenhada custam 12,8€.

**Qual o preço de cada livro?**

G

Quatro livros de banda desenhada custam 12,8€.

**Qual o preço de cada livro?**

G

Para fazer refresco de laranja é necessário $\frac{1}{10}l$ de concentrado por cada $\frac{1}{2}l$ de água.

**Que quantidade de concentrado se deve usar para $1{,}5l$ de água?**

H

Para fazer refresco de laranja é necessário $\frac{1}{10}l$ de concentrado por cada $\frac{1}{2}l$ de água.

**Que quantidade de concentrado se deve usar para $1{,}5l$ de água?**

H

O João desenhou, numa folha de papel, a distância de sua casa à escola através de um segmento de 1,5 cm.

**Sabendo que a escala que usou foi de 1:2000, qual a distância real de casa à escola?**

I

O João desenhou, numa folha de papel, a distância de sua casa à escola através de um segmento de 1,5 cm.

**Sabendo que a escala que usou foi de 1:2000, qual a distância real de casa à escola?**

I

**STOP**

$$0{,}80 \times 3 = \boxed{2{,}40€}$$

$$12{,}8 \div 4 = \boxed{3{,}2€}$$

$$3 \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

$$1{,}5 \times 2000 = \boxed{3000cm}$$

Pensa Rápido!

Qual o valor exacto?

$0,25 \times 4$

A

$12,2 \div 0,5$

B

$0,6 \times 0,30$

C

$0,14 \div 0,2$

D

$$4{,}2\times 0{,}2$$

E

**STOP**

$0{,}25\times 4=\boxed{1}$ $12{,}2\div 0{,}5=\boxed{24{,}4}$

$0{,}6\times 0{,}30=\boxed{0{,}18}$

$0{,}14\div 0{,}2=\boxed{0{,}7}$ $4{,}2\times 0{,}2=\boxed{0{,}84}$

$$?\times 0{,}5=30$$

F

$$2{,}1\div ?=8{,}4$$

G

$$?\times 0{,}4=0{,}16$$

H

$$0{,}82 \div ? = 1{,}64$$

I

$$25{,}5 \times ? = 5{,}1$$

J

**STOP**

$\boxed{60} \times 0{,}5 = 30$ $\quad 2{,}1 \div \boxed{0{,}25} = 8{,}4$

$\boxed{0{,}4} \times 0{,}4 = 0{,}16$

$0{,}82 \div \boxed{0{,}5} = 1{,}64$

$25{,}5 \times \boxed{0{,}2} = 5{,}1$

Pensa Rápido!

Qual o valor exacto?

50% de 40

A

10% de ? = 5

B

25% de 20

C

30% de ? = 15

D

$75\%$ de $80$

E

**STOP**

$50\%$ de $40$ é $\boxed{20}$ $10\%$ de $\boxed{50} = 5$

$25\%$ de $20$ é $\boxed{5}$

$30\%$ de $\boxed{50} = 15$

$75\%$ de $80$ é $\boxed{60}$

$50\%$ de $? = 60$

F

$10\%$ de $350$

G

$5\%$ de $? = 3$

H

90% de 30

I

25% de ? = 20

J

STOP

50% de $\boxed{120}$ = 60

10% de 350 é $\boxed{35}$

5% de $\boxed{60}$ = 3

90% de 30 é $\boxed{27}$

25% de $\boxed{80}$ = 20

Pensa Rápido!

Qual o valor exacto?

$$\frac{5}{10}+\frac{1}{4}$$

A

$$\frac{6}{12}+?=1$$

B

$$0{,}68-0{,}2$$

C

$$2{,}2-?=\frac{1}{5}$$

D

$$\frac{4}{6}\times\frac{6}{7}$$

E

**STOP**

$$\frac{5}{10}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{3}{4}} \qquad \frac{6}{12}+\boxed{\frac{1}{2}}=1$$

$$0{,}68-0{,}2=\boxed{0{,}48}$$

$$2{,}2-\boxed{2}=\frac{1}{5} \qquad \frac{4}{6}\times\frac{6}{7}=\boxed{\frac{4}{7}}$$

$$\frac{2}{3}\times ?=1$$

F

$$\frac{9}{10}\div\frac{3}{10}$$

G

$$0{,}75\div ?=3$$

H

$75\%$ de $20$

I

$20\%$ de $? = 8$

J

**STOP**

$\frac{2}{3} \times \boxed{\frac{3}{2}} = 1$

$\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \boxed{3}$

$0,75 \div \boxed{\frac{1}{4}} = 3$

$75\%$ de $20 = \boxed{15}$

$20\%$ de $\boxed{40} = 8$

Pensa Rápido!

Qual o valor exacto?

Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas.

Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, **qual a frequência relativa da outra face**?

A

Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas.

Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, **qual a frequência relativa da outra face**?

A

A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com 8,16 m retirou $\frac{1}{8}$ para a saia.

**Que porção de tecido usou?**

B

A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com 8,16 m retirou $\frac{1}{8}$ para a saia.

**Que porção de tecido usou?**

B

A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$.

**Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?**

C

A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$.

**Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?**

C

Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto.

**Calcula o valor do desconto.**

D

Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto.

**Calcula o valor do desconto.**

D

**STOP**

a) A frequência relativa da outra face é 0,6 (0,4 + ? = 1).

b) $\frac{1}{8} \times 8{,}16 = 1{,}02$ m

c) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$ comeram menos de metade.

d) O desconto é de 5€ (20% de 25€)

Diariamente, 400 alunos almoçam no refeitório da escola do João.
Destes alunos, $\frac{3}{4}$ comem sempre sopa.

**Quantos alunos comem sopa?**

E

Diariamente, 400 alunos almoçam no refeitório da escola do João.
Destes alunos, $\frac{3}{4}$ comem sempre sopa.

**Quantos alunos comem sopa?**

E

A Ana quer encher copos com refresco.
Cada copo tem $\frac{1}{8}$ litro de capacidade.

**Com 0,75 litros de refresco quantos copos consegue encher a Ana?**

F

A Ana quer encher copos com refresco.
Cada copo tem $\frac{1}{8}$ litro de capacidade.

**Com 0,75 litros de refresco quantos copos consegue encher a Ana?**

F

Na turma da Rita, $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e 25% pratica natação.

**Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade?**

G

Na turma da Rita, $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e 25% pratica natação.

**Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade?**

G

Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de $30{,}2°C$ e a temperatura mínima de $15{,}9°C$.

**Qual a amplitude térmica?**

H

Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de $30{,}2°C$ e a temperatura mínima de $15{,}9°C$.

**Qual a amplitude térmica?**

H

**STOP**

e) 300 alunos comem sopa ($\frac{3}{4} \times 400$).

f) 6 copos ($0{,}75 \div \frac{1}{8}$)

g) 25% não pratica qualquer modalidade.

h) A amplitude é de 14,3°C (30,2 - 15,9)

# Anexo Q

# Tarefas do ciclo de experimentação II

Pensa Rápido!

Qual o valor exacto?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

A

$$?-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$$

B

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$$

C

$$\frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$$

D

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$$

E

**STOP**

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\boxed{1} \qquad \boxed{0{,}8}-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}-\boxed{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\boxed{1}$$

$$\frac{1}{2}+?=1$$

F

$$\frac{4}{8}+\frac{2}{4}$$

G

$$\frac{3}{6}+?=1$$

H

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$$

I

$$\frac{1}{2}+?=\frac{3}{4}$$

J

**STOP**

$$\frac{1}{2}+\boxed{\frac{1}{2}}=1 \qquad \frac{4}{8}+\frac{2}{4}=\boxed{1}$$

$$\frac{3}{6}+\boxed{\frac{1}{2}}=1$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{4}} \qquad \frac{1}{2}+\boxed{\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}$$

Pensa Rápido!

Qual o valor exacto?

$$\frac{3}{4}+0,50$$

A

$$\frac{8}{10}-0,2$$

B

$$2,4\div\frac{1}{2}$$

C

$$\frac{1}{5}\times 0,25$$

D

$$0{,}75 \div \frac{1}{4}$$

E

**STOP**

$$\frac{3}{4} + 0{,}50 = \boxed{1{,}25} \qquad \frac{8}{10} - 0{,}2 = \boxed{0{,}6}$$

$$2{,}4 \div \frac{1}{2} = \boxed{4{,}8}$$

$$\frac{1}{5} \times 0{,}25 = \boxed{\frac{1}{20}} \qquad 0{,}75 \div \frac{1}{4} = \boxed{3}$$

Uma embalagem de 250g de cereais custa 0,80€.

**Qual o preço de 750g dos mesmos cereais?**

F

Uma embalagem de 250g de cereais custa 0,80€.

**Qual o preço de 750g dos mesmos cereais?**

F

Quatro livros de banda desenhada custam 12,8€.

**Qual o preço de cada livro?**

G

Quatro livros de banda desenhada custam 12,8€.

**Qual o preço de cada livro?**

G

Para fazer refresco de laranja é necessário $\frac{1}{10}l$ de concentrado por cada $\frac{1}{2}l$ de água.

**Que quantidade de concentrado se deve usar para $1{,}5l$ de água?**

H

Para fazer refresco de laranja é necessário $\frac{1}{10}l$ de concentrado por cada $\frac{1}{2}l$ de água.

**Que quantidade de concentrado se deve usar para $1{,}5l$ de água?**

H

O João desenhou, numa folha de papel, a distância de sua casa à escola através de um segmento de 1,5 cm.

**Sabendo que a escala que usou foi de 1:2000, qual a distância real de casa à escola?**

I

O João desenhou, numa folha de papel, a distância de sua casa à escola através de um segmento de 1,5 cm.

**Sabendo que a escala que usou foi de 1:2000, qual a distância real de casa à escola?**

I

**STOP**

$0{,}80 \times 3 = \boxed{2{,}40€}$

$12{,}8 \div 4 = \boxed{3{,}2€}$

$3 \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{3}{10}}$

$1{,}5 \times 2000 = \boxed{3000cm}$

Pensa Rápido!

Qual o valor exacto?

O avô do João já gastou $\frac{5}{10}$ da capacidade de um depósito de água na rega do jardim.

**Quanto lhe falta para esvaziar o depósito?**

A

O avô do João já gastou $\frac{5}{10}$ da capacidade de um depósito de água na rega do jardim.

**Quanto lhe falta para esvaziar o depósito?**

A

O perímetro da face de um depósito cúbico é 8,8m.

**Qual a medida do lado?**

B

O perímetro da face de um depósito cúbico é 8,8m.

**Qual a medida do lado?**

B

A Rita construiu um cubo em que a área da base era 0,36m$^2$ .

**Qual a medida do lado?**

C

A Rita construiu um cubo em que a área da base era 0,36m$^2$ .

**Qual a medida do lado?**

C

Uma tina tem de capacidade $22{,}5l$ .

**Quantos baldes de $\frac{1}{2}l$ são necessários encher, para despejar por completo a tina?**

D

Uma tina tem de capacidade $22{,}5l$ .

**Quantos baldes de $\frac{1}{2}l$ são necessários encher, para despejar por completo a tina?**

D

**STOP**

a) falta - lhe esvaziar $\frac{1}{2}$ do depósito

b) $8{,}8 \div 4 = 2{,}2$ m

c) $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$ a medida do lado é 0,6 m

d) $22{,}5 \div \frac{1}{2} = 45$ baldes

$$0,25 \times 4$$

F

$$? \times 0,4 = 0,16$$

G

$$12,2 \div 0,5$$

H

$$25,5 \times ? = 5,1$$

I

$$4,2 \times 0,2$$

J

**STOP**

$0{,}25 \times 4 = \boxed{1}$ $\boxed{0{,}4} \times 0{,}4 = 0{,}16$

$12{,}2 \div 0{,}5 = \boxed{24{,}4}$

$25{,}5 \times \boxed{0{,}2} = 5{,}1$ $4{,}2 \times 0{,}2 = \boxed{0{,}84}$

Pensa Rápido!

Qual o valor exacto?

50% de 40

A

25% de ? = 20

B

10% de 350

C

30% de ? = 15

D

$90\%$ de $30$

E

**STOP**

$50\%$ de $40$ é $\boxed{20}$ $25\%$ de $\boxed{80} = 20$

$10\%$ de $350$ é $\boxed{35}$

$30\%$ de $\boxed{50} = 15$

$90\%$ de $30$ é $\boxed{27}$

$50\%$ de $? = 60$

F

$25\%$ de $20$

G

$10\%$ de $? = 5$

H

75% de 80

I

5% de ? = 3

J

STOP

50% *de* $\boxed{120}$= 60

25% de 20 é $\boxed{5}$

10% de $\boxed{50}$ = 5

75% de 80 é $\boxed{60}$

5% de $\boxed{60}$ = 3

# Pensa Rápido!

# Qual o valor exacto?

A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$.

**Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?**

A

A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$.

**Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?**

A

A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com 8,16 m usou $\frac{1}{8}$ para a saia.

**Que porção de tecido utilizou?**

B

A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com 8,16 m usou $\frac{1}{8}$ para a saia.

**Que porção de tecido utilizou?**

B

Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto.

**Calcula o valor do desconto.**

C

Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto.

**Calcula o valor do desconto.**

C

Diariamente, 400 alunos almoçam no refeitório da escola do João. Destes alunos, $\frac{3}{4}$ comem sempre sopa.

**Quantos alunos comem sopa?**

D

Diariamente, 400 alunos almoçam no refeitório da escola do João. Destes alunos, $\frac{3}{4}$ comem sempre sopa.

**Quantos alunos comem sopa?**

D

# STOP

a) $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$ comeram menos de metade.

b) $\frac{1}{8}\times 8{,}16 = 1{,}02$ m

d) O desconto é de 5€ (20% de 25€)

e) 300 alunos comem sopa ($\frac{3}{4}\times 400$).

$$\frac{5}{10}+\frac{1}{4}$$

F

$$2{,}2-?=\frac{1}{5}$$

G

$$\frac{9}{10}\div\frac{3}{10}$$

H

$$\frac{2}{3}\times ?=1$$

I

$$20\%\ de\ ?=8$$

J

**STOP**

$$\frac{5}{10}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{3}{4}} \qquad 2{,}2-\boxed{2}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{9}{10}\div\frac{3}{10}=\boxed{3}$$

$$\frac{2}{3}\times\boxed{\frac{3}{2}}=1 \qquad 20\%\ de\ \boxed{40}=8$$

# Pensa Rápido!

# Qual o valor exacto?

Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas.

Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, **qual a frequência relativa da outra face**?

A

Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas.

Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, **qual a frequência relativa da outra face**?

A

Na turma da Rita, $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e 25% pratica natação.

**Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade?**

B

Na turma da Rita, $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e 25% pratica natação.

**Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade?**

B

A Ana quer encher copos com refresco.
Cada copo tem $\frac{1}{8}$ litro de capacidade.

**Com 0,75 litros de refresco quantos copos consegue encher a Ana?**

C

A Ana quer encher copos com refresco.
Cada copo tem $\frac{1}{8}$ litro de capacidade.

**Com 0,75 litros de refresco quantos copos consegue encher a Ana?**

C

Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de $30{,}2°C$ e a temperatura mínima de $15{,}9°C$.

**Qual a amplitude térmica?**

D

Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de $30{,}2°C$ e a temperatura mínima de $15{,}9°C$.

**Qual a amplitude térmica?**

D

**STOP**

a) A frequência relativa da outra face é 0,6 $(0{,}4 + ? = 1)$.

b) 25% não pratica qualquer modalidade.

c) 6 copos $(0{,}75 \div \frac{1}{8})$

d) A amplitude é de 14,3°C $(30{,}2 - 15{,}9)$

$$\frac{6}{12} + ? = 1$$

F

$$0{,}68 - 0{,}2$$

G

$$0{,}75 \div ? = 3$$

H

$$\frac{4}{6} \times \frac{6}{7}$$

I

75% de 20

J

**STOP**

$$\frac{6}{12} + \boxed{\frac{1}{2}} = 1 \qquad 0{,}68 - 0{,}2 = \boxed{0{,}48}$$

$$0{,}75 \div \boxed{\frac{1}{4}} = 3$$

$$\frac{4}{6} \times \frac{6}{7} = \boxed{\frac{4}{7}} \qquad 75\% \text{ de } 20 = \boxed{15}$$

## Anexo R

Respostas dos alunos a todas as questões da experiência de ensino – Ciclo I

**Tarefa 1** **8 fevereiro 2012**

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **Discussão** | **E** | **F** | **G** | **H** | **I** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}$ | | $\frac{1}{2}+?=1$ | $?-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{6}+?=1$ | $\frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}+?=\frac{3}{4}$ |
| **Solução** | 1 | 1/2 | 1 | 1/4 | 1 | | 1/2 | 8/10 | 1/2 | 1/4 | 1/4 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Rita** | 2/2 | 2/4 | | 1/4 | 8/8 | | 1/2 | **2/10** | 3/6 | | |
| **Eva** | 2/2=1 | 2/2=1 | **1/4** | | 8/8=1 | | 1/2 | 8/10 | 3/6 | **2/4** | **2/4** |
| **Dina** | 1 | 2/4 | **3/4** | **2/4** | **6/8** | | 1/2 | 8/10 | 3/6 | 1/4 | 1/4 |
| **Luís** | 1 | 2/4=1/2 | 4/4 | **2/2=1** | 16/16…=1 | | 1/2 | 8/10 | 1/2 | 1/4 | **3/2** |
| **João** | 2/2=1 | 2/4=1/2 | 4/4=1 | 1/4 | 8/8=1 | | 1/2 | 8/10 | 3/6 | **1/1** | 1/4 |
| **Duarte** | 2/2=1 | 2/4=1/2 | **4/8=1/2** | 1/4 | 8/8=1 | | 1/2 | **2/10** | 3/6 | 1/4 | 1/4 |
| **Jorge** | | 2/4 | 4/4 | **2/2** | 8/8 | | 1/2 | 8/10 | 3/6 | | **2/2** |
| **Bruno** | 1 | | | **1** | **2/1** | | 1/2 | **2/10** | 4/8 | **1/3** | **2/4** |
| **Ana** | 2/2=1 | 2/4=1/2 | 4/4=1 | 1/4 | **6/8** | | 1/2 | 8/10 | 3/6 | 1/4 | 1/4 |
| **Elsa** | 2/2=1 | 2/4 | **3/4** | **2/4** | **6/8** | | 1/2 | **2/10** | 3/6 | **2/4** | **2/4** |
| **Pedro** | Faltou | | | | | | Faltou | | | | |
| **José** | 1 | 2/4 | **3/6** | **2/2** | **6/12** | | 1/2 | 8/10 | 3/6 | **1/2** | **2/2** |
| **Maria** | ¼ | 2/4 | **1/4** | | | | 1/2 | 8/10 | **6/3** | | |
| **Marta** | 1 | 2/4 | 1 | | **6/4** | | 1/2 | **2/10** | 4/8 | 1/4 | |
| **Lídia** | 2/2 | 2/4 | | 1/4 | 1 | | 1/2 | **12/10** | 3/6 | | 1/4 |
| **Rui** | 2/2=1 | 2/4 | 2/2=1 | | 1 | | 1/2 | 8/10 | 3/6 | 1/4 | 1/4 |
| **Ivo** | 2/2=1 | 2/4 | 4/4=1 | 1/4 | 8/8=1 | | 1/2 | 8/10 | | **2/4** | 1/4 |
| **André** | 1 | 2/4=1/2=0,5 | 1 | **2/2=1** | 1 | | 1/2 | **2/10** | 3/6 | **1/2** | 1/4 |
| **Rogério** | 1 | 2/4 | 1 | 1/4 | 8/8=1 | | 1/2 | 8/10 | 3/6 | 1/4 | |
| **Rúben** | Faltou | | | | | | Faltou | | | | |

**Tarefa 2** **15 fevereiro 2012**

| | A | B | C | D | E | Discussão | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $5 \times \frac{1}{5}$ | $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$ | $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$ | $\frac{4}{8} \div \frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{4} \times ? = 1$ | $\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$ | $? \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ | $\frac{3}{4} \div ? = \frac{1}{4}$ | $\frac{15}{20} \times ? = \frac{15}{20}$ |
| **Solução** | 1 | 1/2 | 1 | 2 | 1 | | 4/3 | 1/2 | 1/5 | 3 | 20/2 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Rita** | 1 | 6/12 | 1 | 2 | 1 | | 4/3 | | | | |
| **Eva** | 1 | 2/4 | 1 | **2/6** | **1/16** | | 4/3 | 1/2 | | **3/2** | |
| **Dina** | **25** | **6/16** | **6/5** | **2/6** | 1 | | **1/4** | 1/2 | **1/6** | | |
| **Luís** | 5/5=1 | 6/12 | 6/6=1 | 24/12 | 8/8=1 | | **3/4** | 1/2 | **1/1=1** | 3 | 10 |
| **João** | 1 | 6/12…1/2 | | 4/2 | 1 | | **3/4** | **2** | **3/6** | **3/8** | **1/10** |
| **Duarte** | 1 | 6/12=1/2 | 1 | 2/1=1 | **2/4** | | **1/4** | **1/8** | **5/12** | **3/8** | **1/10** |
| **Jorge** | 1 | 6/12 | 1 | | 1 | | **3/4** | **1/4** | **1/6** | **9/4** | **1/2** |
| **Bruno** | 1 | 2/4 | 1 | 2 | 1 | | 4/3 | 1/2 | **1/3** | **1/4** | 20/2 |
| **Ana** | 1 | **3/6=1/3** | 1 | 2 | 1 | | 4/3 | 1/2 | 1/5 | 3 | 20/2 |
| **Elsa** | 1 | 6/12=3/6 | 1 | 24/12…6/3 | 1 | | 4/3 | **2/4** | **1/6** | **3/4** | **1/10** |
| **Pedro** | 1 | 1/2 | 1 | **3/6** | 1 | | **3/4** | 1/2 | **5/7** | **1/3** | **15/10** |
| **José** | 1 | 6/12 | 6/6=1 | **2/6** | 4/4=1 | | 4/3 | 1/2 | **1/1** | **3/4** | 20/2 |
| **Maria** | 1 | 6/12=1/2 | 1 | **24/12=1/2** | 1 | | 4/3 | **2/4** | **1/6** | | **1/10** |
| **Marta** | Faltou | | | | | | Faltou | | | | |
| **Lídia** | 1 | 6/12 | 1 | **2/6** | 1 | | 4/3 | 1/2 | | 3 | **1** |
| **Rui** | 1 | 6/12 | 6/6=1 | **2/6** | 8/8=1 | | 4/3 | 1/2 | | **1/4** | **1/1** |
| **Ivo** | 1 | 6/12 | 1 | 2/1 | **1/2** | | 4/3 | 1/2 | **3/5** | **3/2** | **10/2** |
| **André** | 5/5=1 | 2/4=1/2 | 1 | **24/12…1/2** | 8/8=1 | | 4/3 | 1/2 | 1/5 | **1/3** | |
| **Rogério** | **25** | 2/4 | 1 | 2 | 1 | | 4/3 | **1/2** | | **1/2** | **1/10** |
| **Rúben** | 5/5=1 | **8/3** | **9/2** | **8/6** | **4/8** | | **3/4** | 1/2 | **5/6** | **3/4** | **1/10** |

**Tarefa 3** **29 fevereiro 2012**

| | A | B | C | D | E | Discussão | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $\frac{3}{4}+0,50$ | $\frac{8}{10}-0,2$ | $2,4\div\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}\times 0,25$ | $0,75\div\frac{1}{4}$ | | P1[1] | P2[2] | P3[3] | P4[4] |
| **Solução** | 1,25 | 0,6 | 4,8 | 1/20 | 3 | | 2,4 | 3,2 | 3/10 | 3000 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | |
| **Rita** | **6/4** | 6/10 | | 1/20 | **3/4** | | **3,4** | 3,2 | | |
| **Eva** | **4/4=1** | 6/10 | | 1/20 | 3/1=3 | | 2,40 | 3,20 | **0,2=2/10** | **3cm** |
| **Dina** | 1.25 | 6/10 | 4,8 | **0,65** | **3/4** | | 2,4 | 3,2 | | |
| **Luís** | 1.25 | | **1,2** | **0,45** | | | 2,4 | **4,2** | | 3000 |
| **João** | 5/4 | 6/10 | 4,8 | **6/10** | | | 2,4 | 3,2 | 3/10 | 3000 |
| **Duarte** | 5/4 | 6/10 | **4.8** | 1/20 | **3/16** | | 2,40 | 3,2 | **15/10** | 3000 |
| **Jorge** | 1,25 | | | | 5 | | 2,4 | 3,2 | **3/30** | |
| **Bruno** | 1,25 | | **1,2** | **0,45** | | | 2,4 | **4,2** | | 3000 |
| **Ana** | 1,25 | 3/5 | 4,8 | 1/20 | | | 2,40 | 3,2 | **4,5** | **1500** |
| **Elsa** | **3/8** | 6/10 | **20/10** | **2/4** | | | 2,4 | **4,2** | **1/5** | 3000 |
| **Pedro** | 3/8 | | | 1/20 | **3/36** | | 2,4 | 3,2 | 3/10 | 3000 |
| **José** | **4** | 6/10 | **1/2** | 25/500 | **2/1** | | 2,4 | 3,2 | **0,25** | **2,500** |
| **Maria** | 1,25 | | 1/20 | 12/4 | | | 2,4 | 3,2 | 3/10 | 3000 |
| **Marta** | 5/4 | | **1,2** | **2/20** | 12/4 | | | 3,2 | | |
| **Lídia** | 1,25 | | 4,8 | **5,25** | **4** | | | | | |
| **Rui** | 1,25 | 0.6 | **1,2** | **0,425** | **0,15** | | 2,40 | 3,20 | **3/30** | 3000 |
| **Ivo** | | **10/10=1** | | | | | | **51,6** | 0.100 | 3000 |
| **André** | 1 1/4 | 0,6 | **4,2** | **0,4** | | | 2,40 | 3,20 | | 3000 |
| **Rogério** | **1/4** | 6/10 | **1,2** | **0,50** | **1/2** | | | 3,2 | 3/10 | **3m** |
| **Rúben** | **3,50** | **2,2** | **2** | **25** | **75/4** | | **2,14** | 3,2 | **1/2** | **5cm** |

[1] Uma embalagem de 250g de cereais custa 0,80€. **Qual o preço de 750g dos mesmos cereais?**
[2] Quatro livros de banda desenhada custam 12,8€. **Qual o preço de cada livro?**
[3] Para fazer refresco de laranja é necessário $\frac{1}{10}l$ de concentrado por cada $\frac{1}{2}l$ de água. **Que quantidade de concentrado se deve usar para $1,5\ l$ de água?**
[4] O João desenhou, numa folha de papel, a distância de sua casa à escola através de um segmento de 1,5 cm. **Sabendo que a escala que usou foi de 1:2000, qual a distância real de casa à escola?**

**Tarefa 4** **7 março 2012**

| | A | B | C | D | E | Discussão | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $0{,}5 + 0{,}25$ | $0{,}18 - 0{,}03$ | $0{,}75 + 0{,}5$ | $1{,}9 + 0{,}50$ | $0{,}6 + 0{,}04$ | | $0{,}7 + ? = 1$ | $? - 4{,}3 = 0{,}5$ | $0{,}04 + ? = 1$ | $1{,}25 - ? = 0{,}75$ | $0{,}07 + ? = 0{,}84$ |
| **Solução** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,4 | 0,64 | | 0,3 | 4,8 | 0,96 | 0,5 | 0,77 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Rita** | 0,75 | 0,15 | **0,125** | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | **6,2** | | 0,5 | |
| **Eva** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | **0,56** | | 0,3 | 4,8 | 0,96 | | 0,77 |
| **Dina** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | **0,56** | | 0,3 | **10,7** | 0,96 | 0,50 | **7,7** |
| **Luís** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | **3,8** | 0,96 | ½ ou 0,50 | 0,77 |
| **João** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | **9,3** | 0,96 | 0,5 | 0,77 |
| **Duarte** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | **9,8** | 0,96 | 0,50 | 0,77 |
| **Jorge** | 0,75 | **0,12** | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | | 0,96 | 0,50 | 0,77 |
| **Bruno** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | **3,2** | 0,96 | 0,5 | 0,77 |
| **Ana** | 0,75 | **0,177** | 1,25 | 1,40 | **0,56** | | 0,3 | 4,8 | **0,06** | 0,5 | **7** |
| **Elsa** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | **4,2** | **0,06** | 0,5 | |
| **Pedro** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | | 0,96 | 0,50 | 0,77 |
| **José** | 0,75 | 0,15 | **2.10** | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | **3,5** | 0,96 | 0,50 | 0,77 |
| **Maria** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | | 0,96 | 0,5 | |
| **Marta** | 0,75 | 0,15 | | | 0,64 | | 0,3 | | | 0,50 | |
| **Lídia** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | 4,8 | 0,96 | 0,50 | |
| **Rui** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | 4,8 | 0,96 | 0,50 | 0,77 |
| **Ivo** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | **3,2** | **0,16** | 0,50 | **0,78** |
| **André** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | 4,8 | 0,96 | 0,50 | 0,77 |
| **Rogério** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | 0,64 | | 0,3 | 4,8 | 0,96 | 0,50 | |
| **Rúben** | 0,75 | 0,15 | 1,25 | 1,40 | **0,2** | | **0,99** | **4,2** | **0,6** | **55** | **7,3** |

**Tarefa 5** **22 março 2012**

| | A | B | C | D | E | Discussão | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | 0,25 × 4 | 12,2 ÷ 0,5 | 0,6 × 0,30 | 0,14 ÷ 0,2 | 4,2 × 0,2 | | ?× 0,5 = 30 | 2,1 ÷? = 8,4 | ?× 0,4 = 0,16 | 0,82 ÷? = 1,64 | 25,5 ×? = 5,1 |
| **Solução** | 1 | 24,4 | 0,18 | 0,7 | 0,84 | | 60 | 0,25 | 0,4 | 0,5 | 0,2 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Rita** | 1 | | **180** | | **8,4** | | **0,6** | | **0,04** | | 0,2 |
| **Eva** | 1 | 24,4 | | | 0,84 | | **0,6** | | 0,4 | **0,2** | **0,5** |
| **Dina** | 1 | | **1,80** | 0,7 | **4,4** | | 60 | | 0,4 | | |
| **Luís** | 1 | **6,1** | **1,8** | 0,7 | **21** | | 60 | **4** | 0,4 | 0,5 | 0,2 |
| **João** | 1 | 24,4 | 0,18 | **0,07** | **8,4** | | 60 | **4** | 0,4 | 0,5 | |
| **Duarte** | 1 | 24,4 | **1,8** | **2,70** | **21,0** | | 60 | **0,4** | 0,4 | **0,2** | **0,5** |
| **Jorge** | 1 | **6,1** | | | | | **15** | **4** | **0,04** | **2** | **0,25** |
| **Bruno** | 1 | **4,2** | **1,8** | 0,7 | **4,4** | | | | 0,4 | | 0.2 |
| **Ana** | 1 | **6,1** | **1,8** | | **6,2** | | **0,6** | **4** | 0,4 | ½=0,5 | **1/5** |
| **Elsa** | 1 | **127/10** | **4,80** | **8,4** | | | **6** | 0,25 | 0,4 | **0,82** | **5** |
| **Pedro** | 1 | | | **0,06** | **4,4** | | 60 | **4** | | 0,5 | 0,2 |
| **José** | 1 | **6,1** | **1,80** | | **8,4** | | | **4** | **0,5** | **0,2** | **0,5** |
| **Maria** | 1 | 24,4 | **1,80** | | | | **15** | 0,25 | 0,4 | 0,5 | **5** |
| **Marta** | 1 | 24,4 | **0,24** | | **8,4** | | **15** | | 0,4 | | 0,2 |
| **Lídia** | **10** | 24,4 | **1,80** | **0,26** | **2** | | **0,8** | **4** | 0,4 | 0,5 | **5** |
| **Rui** | 1 | 24,4 | **1,80** | **0,28** | **8,4** | | **15** | **2,2** | 0,4 | 0,5 | **0,8** |
| **Ivo** | 1 | **6,2** | **1,80** | 0,7 | **6,4** | | **0.6** | **2,2** | 0,4 | 0,5 | 5,2 |
| **André** | 1 | **6,1** | **1,80** | **60,7** | **8,4** | | **15** | **4** | 0,4 | 0,5 | **2** |
| **Rogério** | 1 | | **1,8** | **0,7** | | | 60 | | 0,4 | 0,5 | |
| **Rúben** | Faltou | | | | | | Faltou | | | | |

**Tarefa extra** **11abril 2012**

| | A | B | C | D | E | | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ | $1-?=\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{5}\times 0,5$ | $\frac{4}{5}\div ?=\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}+0,3$ | | $\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$ | $2,8-?\ 0,9$ | $\frac{6}{8}\div\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}\times ?=\frac{1}{8}$ | $1,5\div\frac{1}{3}$ |
| **Solução** | 1/2 | 3/4 | 1/5 | 4 | 0,5 | | 1 | 1,9 | 1 | 1/4 | 4,5 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Rita** | **2/6** | | 2/10 | | **0,8** | | 1 | | **24/21** | **8/2** | |
| **Eva** | **2/6** | 0,75=3/4 | **1** | **4/5** | | | 14/14=1 | | 1 | **2/4** | |
| **Dina** | | 3/4 | 2/10=1/5 | **4/5** | 0,5=1/2 | | 1 | 1,9 | **18/32** | 1/4 | **0,5=1/2** |
| **Luís** | 3/6=1/2 | 3/4 | 2/10=1/5 | 4 | 1/2 | | 1 | 1,9 | 24/24=1 | 1/4 | **5** |
| **João** | 3/6 | 3/4 | **½.5=2/5** | 4 | **0,4** | | 1 | 1,90 | 1 | 1/4 | 4.5 |
| **Duarte** | 3/6 | 3/4 | **0,60** | **0,9** | 0,50 | | 1 | **2,1** | **1/16** | | |
| **Jorge** | 3/6 | **1/5** | **2** | **5/4** | 0,50 | **Discussão** | 1 | **1,1** | **0,50** | 1/4 | |
| **Bruno** | **2/9** | 0,75 | | | **0,45** | | **1/2** | **3,11** | | | |
| **Ana** | 3/6=**1/3** | | 2/10 | 4/1 | 5/10 | | 14/14=1 | 1,9 | 2/2=1 | **4** | **0,5** |
| **Elsa** | **2/6** | | 10/50 | **5/25** | **6/10** | | 14/14=1 | **2,7** | **28/24** | 1/4 | |
| **Pedro** | | 0,75 | **4/5** | **1/4** | | | 1 | 1,90 | | 1/4 | |
| **José** | **4/6** | 3/4 | | 4/1 | 5/10 | | 14/14=1 | **2,1** | 2/2=1 | 1/4 | |
| **Maria** | **2/6** | 3/4 | 2/10 | 4/1 | 0,50 | | 14/14=1 | 1,9 | 1 | 1/4 | **5/2** |
| **Marta** | 2/3 | **2/4** | | | 0,5 | | 1 | | 1 | 1/4 | |
| **Lídia** | 2/4 | 3/4 | **0,8** | **4/2** | | | 1 | | **10/8** | **2/16** | |
| **Rui** | 3/6 | 3/4 | | | **0,23** | | 1 | 1,9 | 16/16=1 | 1/4 | **5** |
| **Ivo** | 3/6=1/2 | | 2/10 | | **1** | | 1 | 1,9 | **24/16** | 1/4 | |
| **André** | **3/4** | 3/4 | **0,100** | 4 | 0,50 | | 1 | **2,1** | 24/24=1 | **4** | |
| **Rogério** | **2/6** | 3/4 | **4/10** | | 1/2 | | 1 | 1,9 | 1 | 1/4 | **1,2** |
| **Rúben** | **2/6** | | **5** | **2/2** | | | 8/14 | **2,1** | 3 | 1/4 | |

**Tarefa 6** **18 abril 2012**

| | A | B | C | D | Discussão | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | P1[5] | P2[6] | P3[7] | P4[8] | | P5[9] | P6[10] | P7[11] | P8[12] |
| **Solução** | Igual | 2,2 | 1/2 | 0,6 | | 6,3 | 45 | 3,1 | 3 |
| **Aluno** | | | | | | | | | |
| **Rita** | **Joana** | 2,2 | 5/10 | | | | **44,5** | | **8,4** |
| **Eva** | mesmo | 2,2 | | **0,18** | | | 45 | | **3,3** |
| **Dina** | mesmo | 2,2 | 5/10=1/2=0,5 | **6** | | **6,1** | 45 | | 3 |
| **Luís** | **Joana** | **4,4** | **3/5** | **0,18** | | **2,4** | 45 | **620** | **8,4** |
| **João** | igual | 2,2 | 5/10=1/2 | **0,06** | | **5,3** | 45 | 3,1 | 3 |
| **Duarte** | Os dois | **8,8** | 0,5 ou 1/2 | | | 6.3 | 45 | **30** | **3,2** |
| **Jorge** | **Joana** | 2,2 | 5/10 | **0,36** | | **41** | 45 | **4,1** | **3,3** |
| **Bruno** | mesmo | 2,2 | **1/5** | | | **7,65** | 45 | **24** | **3,2** |
| **Ana** | mesmo | 2,2 | 1/2 | **0,16** | | | **11,5** | 3,1 | 3 |
| **Elsa** | **Joana** | 2,2 | | | | | **1/2** | | **3/4** |
| **Pedro** | igual | 8,8 | 1/2 | | | 6,3 | 45 | **0,481** | 3 |
| **José** | **Joana** | 2,2 | 5/10 | **0,06** | | **8,15** | **11,25** | | **3,4** |
| **Maria** | mesmo | 2,2 | 1/2 | **6** | | | 45 | | 3 |
| **Marta** | mesmo | **1,1** | 1/2 | | | | | **13** | **3,3** |
| **Lídia** | **0,5** | | | | | | 45 | **3** | 3 |
| **Rui** | **Joana** | 2,2 | 5/10 | **18** | | | 45 | **24,8** | **3,3** |
| **Ivo** | **Joana** | | 5/10 | | | **5,4** | **44,25** | **13** | **3,3** |
| **André** | igual | **16,16** | 5/10 | **0,36** | | | 45 | **13** | 3 |
| **Rogério** | mesmo | 2,2 | 0,5 | **009** | | **6,1** | 45 | | **3,3** |
| **Rúben** | **Joana** | **2,5** | **1/5** | **236** | | **24/4** | **11** | **3.3** | **3,3** |

[5] O Luís encheu $\frac{3}{6}$ de um depósito de água e a Joana 0,5 desse mesmo depósito. **Quem colocou mais água no depósito?**

[6] O perímetro da face de um tanque cúbico é 8,8 m. **Qual a medida do lado?**

[7] O avô do João já gastou $\frac{5}{10}$ da capacidade de um depósito de água na rega do jardim. **Quanto lhe falta para esvaziar o depósito?**

[8] A Rita construiu um cubo em que a área da base era 0,36 $m^2$.**Qual a medida do lado?**

[9] O sólido A tem 8,4 l de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. **Calcula a capacidade do sólido B.**

[10] Uma tina tem de capacidade 22,5 l de água. **Quantos baldes de $\frac{1}{2}\,l$ são necessários para encher por completo a tina?**

[11] A área da base de um paralelepípedo retângulo é 12,4 $m^2$. **Sabendo que a altura é 0,25 m , qual o volume do paralelepípedo?**

[12] A área da base de um cilindro é 4,2 $m^2$ e o seu volume 12,6 $m^3$. **Calcula a altura deste cilindro.**

**Tarefa 7** **3 maio 2012**

| | A | B | C | D | E | | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | 50% *de* 40 | 10% *de* ? = 5 | 25% *de* 20 | 30% *de* ? = 15 | 75% *de* 80 | | 50% *de* ? = 60 | 10% *de* 350 | 5% *de* ? = 3 | 90% *de* 30 | 25% *de* ? = 20 |
| **Solução** | 20 | 50 | 5 | 50 | 60 | | 120 | 35 | 60 | 27 | 80 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Rita** | 20 | | **0,5** | **2** | | | **30** | 35 | **15** | **3** | **5** |
| **Eva** | 20 | | **0,5** | | | | 120 | 35 | 60 | | **100** |
| **Dina** | 20 | | 5 | | 60 | | 120 | 35 | | | 80 |
| **Luís** | 20 | 50 | 5 | 50 | **5** | | **30** | 35 | 60 | **3** | 80 |
| **João** | 20 | 50 | 5 | 50 | 60 | | 120 | 35 | 60 | **9** | 80 |
| **Duarte** | 20 | 50 | 5 | **35** | 60 | | 120 | 35 | | **24** | 80 |
| **Jorge** | 20 | | 5 | | **20** | | **30** | 35 | **15** | **3** | 80 |
| **Bruno** | 20 | | **10** | **2** | | | **30** | 35 | **6** | **40** | 80 |
| **Ana** | 20 | **1/2** | 5 | | | **Discussão** | 120 | 35 | **0,15** | **20** | **5** |
| **Elsa** | **20%** | **2** | | **2** | | | 120 | 35 | | **270/100** | **4** |
| **Pedro** | 20 | 50 | 5 | **20** | 60 | | 120 | 35 | 60 | | 80 |
| **José** | 20 | 50 | 5 | | 60 | | 120 | 35 | **15** | **3** | **35** |
| **Maria** | 20 | | | | | | 120 | 35 | | **25** | 80 |
| **Marta** | 20 | 50 | 5 | | | | 120 | 35 | **15** | **20** | |
| **Lídia** | 20 | **5** | 5 | | | | | 35 | | | 80 |
| **Rui** | 20 | 50 | **0,35** | **90** | 60 | | 120 | 35 | **1** | **15** | **60** |
| **Ivo** | 20 | 50 | **15** | | **5** | | 120 | 35 | | **3** | |
| **André** | 20 | **2** | 5 | **2** | | | **30** | 35 | **1,5** | | **5** |
| **Rogério** | 20 | 50 | 5 | | **20** | | 120 | 35 | **15** | | 80 |
| **Rúben** | **20%** | 50 | 5 | **60** | **75%** | | 120 | 35 | **15** | **20** | **2,50** |

**Tarefa 8** **9 maio 2012**

| | A | B | C | D | E | Discussão | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $\frac{3}{4} de\ 60$ | $\frac{1}{2} de\ ? = 0{,}9$ | $0{,}2\ de\ 10$ | $0{,}25\ de\ ? = 10$ | $\frac{1}{3} de\ 120$ | | $20\%\ de\ 50$ | $\_\%de20 = 18$ | $\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5} de? = 8$ | $\_\%de30 = 0{,}3$ |
| **Solução** | 45 | 1,8 | 2 | 40 | 40 | | 10 | 90% | 1/9 | 40 | 1% |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Rita** | **20** | 1,8 | | **4** | 40 | | 100 | | **3/3=1** | | **10** |
| **Eva** | | 1,8 | **40** | **360** | | | 10 | | **1/6** | | **10%** |
| **Dina** | 45 | **0,45** | 2 | | 40 | | | | **0,75** | 40 | **10%** |
| **Luís** | **405** | **0,5** | 2 | **0,40** | **12** | | **100** | 90 | 1/9 | | **0,1** |
| **João** | **32** | 1,8 | 2 | 40 | 40 | | 10 | 90% | **1/6** | 8x5=40 | **20** |
| **Duarte** | | 1,8 | 2 | 40 | **10** | | 10 | 90 | 1/9 | 40 | **101** |
| **Jorge** | | **0,45** | 2 | 40 | **60** | | 10 | | 1/9 | 48 | **10** |
| **Bruno** | | | 2 | **4** | | | **25** | **56** | **1** | **1/3** | **0,1** |
| **Ana** | 180/4 | **0,18** | **4** | **2,5** | 40 | | 10 | | 1/9 | 40 | |
| **Elsa** | 180/4 | 1,8 | **20/1** | | **120/1** | | 10 | | 1/9 | 8 | **100** |
| **Pedro** | 45 | 1,8 | 2 | 40 | | | 10 | | 1/3 | 40 | 1 |
| **José** | | 1,8 | | 40 | | | 10 | | 1/9 | 8/5 | **10** |
| **Maria** | | 1,8 | **5** | 40 | | | 10 | 90 | 0,11(1) | 40 | **100** |
| **Marta** | 180/4 | | | 40 | 120/3 | | **0,5** | | **1/3** | | **10%** |
| **Lídia** | **20** | | | 40 | 40 | | 10 | | | 40 | |
| **Rui** | 45 | 1,8 | 2 | 40 | 40 | | **7,5** | | **1/3** | **1,75** | 1,0 |
| **Ivo** | **59,25** | **0,18** | | **12** | **1/360** | | **75** | | 1/9 | **8/5** | **10** |
| **André** | | **0,45** | **0,5** | 40 | | | **40** | **9** | **1/3** | **4** | **0,50** |
| **Rogério** | **40** | 1,8 | 2 | 40 | 40 | | 10 | **75%** | **1** | 40 | **10%** |
| **Rúben** | | **1/7** | **0,8** | | | | 10 | **60%** | **1** | **2** | **10%** |

**Tarefa 9** **16 maio 2012**

| | A | B | C | D | E | | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $\frac{5}{10}+\frac{1}{4}$ | $\frac{6}{12}+?=1$ | $0{,}68-0{,}2$ | $2{,}2-?=\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{6}\times\frac{6}{7}$ | | $\frac{2}{3}\times?=1$ | $\frac{9}{10}\div\frac{3}{10}$ | $0{,}75\div?=3$ | $75\%\ de\ 20$ | $20\% de\ ?=8$ |
| **Solução** | 3/4 | 1/2 | 0,48 | 2 | 4/7 | | 3/2 | 3 | 1/4 | 15 | 40 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Rita** | | 6/12 | 0,48 | 2,0 | 4/7 | | 3/2 | | | **5** | |
| **Eva** | | 6/12 | 0,48 | | 4/7 | | 3/2 | 3 | | | |
| **Dina** | 0,75 | 6/12 | 0,48 | **0,2** | 4/7 | | 3/2 | **27/20** | **4** | 15 | 40 |
| **Luís** | **2/5** | **4/5** | 0,48 | **1,2** | 24/42 | | **10/3** | 90/30 | **9** | | 40 |
| **João** | 15/20 | ½=6/12 | 0,48 | 2 | **24/31** | | **2/4** | 9/3 | **3/4** | **5** | 40 |
| **Duarte** | | 6/12 | 0,48 | **1,7** | 4/7 | | 3/2 | 3/1 | | 15 | 40 |
| **Jorge** | **24/40** | **12/6** | 0,48 | | 24/42 | **Discussão** | 3/2 | 90/30 | **4** | 15 | 40 |
| **Bruno** | **6/14** | 1/2 | 0,48 | 2 | 4/7 | | | | | **5** | |
| **Ana** | 15/20 | 6/12 | 0,48 | | 24/42 | | 3/2 | 3/1 | **4** | 15 | 40 |
| **Elsa** | **21/10** | **4/12** | | | 24/42 | | **1/2** | 90/30 | | | |
| **Pedro** | **7/10** | 6/12 | 0,48 | 2 | 4/7 | | 3/2 | 9/3 | | 15 | 40 |
| **José** | | 6/12 | 0,48 | | 24/42 | | 3/2 | 3/1 | | | 40 |
| **Maria** | 0,75 | 1/2 | 0,48 | | 24/42 | | 3/2 | 90/30 | **4** | 15 | 40 |
| **Marta** | | 6/12 | 0,48 | 2 | 24/42 | | 3/2 | 90/30 | | | |
| **Lídia** | | 6/12 | 0,48 | | | | 3/2 | 3 | | | |
| **Rui** | | 1/2 | 0,48 | **0,21** | 24/42 | | **1/3** | 90/30 | 0.25 | 15 | 40 |
| **Ivo** | 30/40 | **6** | 0,48 | | 4/7 | | | **3000/9000** | **9/3=3** | **5** | 40 |
| **André** | 0,75 | 1/2 | 0,48 | 2,0 | 24/42 | | | 90/30 | | | |
| **Rogério** | **5/40** | 6/12 | 0,48 | 2 | | | 3/2 | 9/3 | | 15 | |
| **Rúben** | 15/20 | **4/12** | 0,48 | | 24/42 | | 6/4 | 90/30 | | **4** | |

**Tarefa 10** **23 maio 2012**

| | A | B | C | D | | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | P1[13] | P2[14] | P3[15] | P4[16] | | P5[17] | P6[18] | P7[19] | P8[20] |
| **Solução** | 0,6 | 1,02 | menos | 5 | | 300 | 6 | 25% | 14,3℃ |
| **Aluno** | | | | | | | | | |
| **Rita** | | | menos | | | **25** | | | |
| **Eva** | | | **não** | **12,25** | | | **3** | 25% | 14,3 |
| **Dina** | | **1,2** | menos | 5 | | 300 | 6 | 25% | **15** |
| **Luís** | **2,40** | **8,8** | **mais** | 5 | | **400:16=300** | | 25 | **46,1** |
| **João** | 60%=0,6=6/10 | **7,14** | menos | 5 | | 300 | **5** | 25% | |
| **Duarte** | 0,60 | **1,2** | | 5 | | 300 | | 1/4 | **25º** |
| **Jorge** | | | menos | 5 | **Discussão** | 300 | **40** | 25% | 14,3 |
| **Bruno** | **2** | **1,2** | menos | **0,2** | | 300 | 6 | | **15,7** |
| **Ana** | **0,40** | **1,2** | menos | **31,25** | | 300 | | 25% | 14,3 |
| **Elsa** | | | **mais** | | | | | 25% | 14,3 |
| **Pedro** | 0,60 | | **não** | 5 | | 300 | **3** | 25% | 14,3 |
| **José** | | **1,2** | menos | 5 | | **35** | **60** | 25% | 14,3 |
| **Maria** | | | menos | 5 | | 1200/4 | | 25% | **20** |
| **Marta** | | | | | | | **4/24** | 25% | |
| **Lídia** | | | | 5 | | | | 2/8 | |
| **Rui** | 0,60 | **1,50** | menos | 5 | | 300 | **1** | 25% | **46,1** |
| **Ivo** | | **1,16** | menos | 5 | | **40071:3/4=16000/4** | **3/4x1/83/32=10/4** | 100 | **23** |
| **André** | | | menos | 5 | | **325** | | 25% | **15,7** |
| **Rogério** | **0,80** | | menos | 5 | | 300 | | 25% | 14,3 |
| **Rúben** | **2** | **4/16** | menos | 5 | | | **80/75** | | |

13 Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, **qual a frequência relativa da outra face**?

14 A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com 8,16 m retirou $\frac{1}{8}$ para a saia. **Que porção de tecido usou?**

15 A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$e o pai $\frac{1}{5}$. **Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?**

16 Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. **Calcula o valor do desconto.**

17 Diariamente, 400 alunos almoçam no refeitório da escola do João. Destes alunos, $\frac{3}{4}$ comem sempre sopa. **Quantos alunos comem sopa?**

18 A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}$ litro de capacidade. **Com 0,75 litros de refresco quantos copos consegue encher a Ana?**

19 Na turma da Rita, $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e 25% pratica natação. **Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade?**

20 Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de $30{,}2°C$e a temperatura mínima de 15,9℃ . **Qual a amplitude térmica?**

## Anexo S

Número de respostas corretas, incorretas e em branco a todas as questões da experiência de ensino – Ciclo I

| | **Número de respostas** | | |
|---|---|---|---|
| | Corretas | Incorretas | Não responde |
| **Questões com frações** | TM | TM | TM |
| $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ | 16 | 1 | 1 |
| $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ | 16 | 1 | 1 |
| $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ | 9 | 6 | 3 |
| $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ | 7 | 7 | 4 |
| $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}$ | 11 | 6 | 1 |
| $\frac{1}{2}+?=1$ | 18 | 0 | 0 |
| $?-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$ | 11 | 7 | 0 |
| $\frac{3}{6}+?=1$ | 16 | 1 | 1 |
| $\frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$ | 7 | 7 | 4 |
| $\frac{1}{2}+?=\frac{3}{4}$ | 8 | 6 | 4 |
| $5\times\frac{1}{5}$ | 17 | 2 | 0 |
| $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$ | 16 | 3 | 0 |
| $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}$ | 16 | 2 | 1 |
| $\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}$ | 10 | 8 | 1 |
| $\frac{4}{8}\div\frac{1}{2}$ | 15 | 4 | 0 |
| $\frac{3}{4}\times?=1$ | 12 | 6 | 1 |
| $\frac{1}{4}\div?=\frac{1}{2}$ | 12 | 6 | 1 |
| $?\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ | 2 | 12 | 5 |
| $\frac{3}{4}\div?=\frac{1}{4}$ | 3 | 13 | 3 |
| $\frac{15}{20}\times?=\frac{15}{2}$ | 4 | 11 | 4 |
| $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ | 8 | 10 | 2 |
| $\frac{4}{5}\div?=\frac{1}{5}$ | 6 | 8 | 6 |
| $\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$ | 19 | 1 | 0 |

| | Número de respostas | | |
|---|---|---|---|
| | Certas | Erradas | Não responde |
| **Questões com frações** | TM | TM | TM |
| $\frac{6}{8} \div \frac{3}{4}$ | 11 | 7 | 2 |
| $\frac{1}{2} \times ? = \frac{1}{8}$ | 13 | 5 | 2 |
| $\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$ | 8 | 11 | 1 |
| $\frac{5}{10} + \frac{1}{4}$ | 7 | 6 | 7 |
| $\frac{6}{12} + ? = 1$ | 15 | 5 | 0 |
| $\frac{4}{6} \times \frac{6}{7}$ | 17 | 1 | 2 |
| $\frac{2}{3} \times ? = 1$ | 13 | 4 | 3 |
| $\frac{9}{10} \div \frac{3}{10}$ | 16 | 2 | 2 |
| A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$ .**Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?** | 13 | 4 | 3 |

| | Número de respostas | | |
|---|---|---|---|
| | Corretas | Incorretas | Não responde |
| **Questões com numerais decimais** | TM | TM | TM |
| $0,5 + 0,25$ | 20 | 0 | 0 |
| $0,18 - 0,03$ | 18 | 2 | 0 |
| $0,75 + 0,5$ | 17 | 2 | 1 |
| $1,9 - 0,50$ | 19 | 0 | 1 |
| $0,6 + 0,04$ | 16 | 4 | 0 |
| $0,7 + ? = 1$ | 19 | 1 | 0 |
| $? - 4,3 = 0,5$ | 6 | 10 | 4 |
| $0,04 + ? = 1$ | 14 | 4 | 2 |
| $1,25 - ? = 0,75$ | 18 | 1 | 1 |
| $0,07 + ? = 0,84$ | 10 | 4 | 6 |
| $0,25 \times 4$ | 19 | 1 | 0 |
| $12,2 \div 0,5$ | 7 | 8 | 4 |
| $0,6 \times 0,30$ | 1 | 15 | 3 |
| $0,14 \div 0,2$ | 4 | 8 | 7 |
| $4,2 \times 0,2$ | 1 | 14 | 4 |
| $? \times 0,5 = 30$ | 6 | 11 | 2 |
| $2,1 \div ? = 8,4$ | 2 | 11 | 6 |
| $? \times 0,4 = 0,16$ | 15 | 3 | 1 |
| $0,82 \div ? = 1,64$ | 10 | 5 | 4 |
| $25,5 \times ? = 5,1$ | 6 | 10 | 3 |
| $2,8 - ? = 0,9$ | 9 | 7 | 4 |
| $0,68 - 0,2$ | 19 | 0 | 1 |
| $0,75 \div ? = 3$ | 1 | 7 | 12 |
| A Rita construiu um cubo em que a área da base era $0,36\ m^2$. **Qual a medida do lado?** | 0 | 12 | 8 |
| A área da base de um cilindro é $4,2\ m^2$ e o seu volume $12,6\ m^3$. **Calcula a altura.** | 7 | 13 | 0 |
| A área da base de um paralelepípedo retângulo é de $12,4\ cm^2$ . Sabendo que a altura é $0,25\ cm$. **Qual o volume do paralelepípedo?** | 2 | 11 | 7 |
| Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa. **Qual a frequência relativa da face nacional?** | 4 | 5 | 11 |
| Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de $30,2°$ e a temperatura mínima de $15,9°$. **Qual a amplitude térmica?** | 7 | 8 | 5 |

| | Número de respostas | | |
|---|---|---|---|
| | Corretas | Incorretas | Não responde |
| **Questões com percentagens** | TM | TM | TM |
| $50\%\ de\ 40$ | 18 | 2 | 0 |
| $10\%\ de\ ? = 5$ | 10 | 4 | 6 |
| $25\%\ de\ 20$ | 13 | 5 | 2 |
| $30\%\ de\ ? = 15$ | 2 | 8 | 10 |
| $75\%\ de\ 80$ | 6 | 5 | 9 |
| $50\%\ de\ ? = 60$ | 14 | 5 | 1 |
| $10\%\ de\ 350$ | 20 | 0 | 0 |
| $5\ \%\ de\ ? = 3$ | 4 | 10 | 6 |
| $90\%\ de\ 30$ | 0 | 14 | 6 |
| $25\%\ de\ ? = 20$ | 10 | 8 | 2 |
| $20\%\ de\ 50$ | 12 | 7 | 1 |
| $\_\%\ de 20 = 18$ | 4 | 4 | 12 |
| $\_\%\ de 30 = 0{,}3$ | 2 | 16 | 2 |
| $75\%\ de\ 20$ | 8 | 5 | 7 |
| $20\%\ de\ ? = 8$ | 11 | 0 | 9 |
| Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. **Calcula o valor do desconto.** | 14 | 3 | 3 |

| Questões com duas representações | Número de respostas | | |
|---|---|---|---|
| | Corretas | Incorretas | Não responde |
| | TM | TM | TM |
| $\frac{3}{4}+0,5$ | 11 | 8 | 1 |
| $\frac{8}{10}-0,2$ | 11 | 2 | 7 |
| $2,4\div\frac{1}{2}$ | 5 | 10 | 5 |
| $\frac{1}{5}\times 0,25$ | 6 | 12 | 2 |
| $0,75\div\frac{1}{4}$ | 2 | 10 | 8 |
| $1-?=\frac{1}{4}$ | 13 | 2 | 5 |
| $\frac{2}{5}\times 0,5$ | 7 | 9 | 4 |
| $\frac{1}{5}+0,3$ | 10 | 6 | 4 |
| $1,5\div\frac{1}{3}$ | 1 | 6 | 13 |
| $\frac{3}{4}\ de\ 60$ | 6 | 6 | 8 |
| $\frac{1}{2}\ de\ ?=0,9$ | 10 | 7 | 3 |
| $0,2\ de\ 10$ | 9 | 6 | 5 |
| $0,25\ de\ ?=10$ | 11 | 6 | 3 |
| $\frac{1}{3}\ de\ 120$ | 8 | 5 | 7 |
| $\frac{1}{5}\ de\ ?=8$ | 8 | 8 | 6 |
| $2,2-?=\frac{1}{5}$ | 7 | 4 | 9 |
| Uma embalagem de 250g de cereais custa 0,80€. **Qual o preço de 750g dos mesmos cereais?** | 14 | 2 | 4 |
| Quatro livros de banda desenhada custam 12,8€. **Qual o preço de cada livro?** | 15 | 4 | 1 |
| Para fazer refresco de laranja é necessários $\frac{1}{10}l$ de concentrado por cada $\frac{1}{2}l$ de água. **Que quantidade de concentrado se deve usar para fazer $1,5l$ de refresco?** | 4 | 9 | 7 |
| O João desenhou, numa folha de papel, a distância de casa à escola através de um segmento de 1,5 cm. Sabendo que a escala que usou foi de 1:200. **Qual a distância real de casa à escola?** | 10 | 5 | 5 |
| O perímetro da face de um depósito cúbico é 8,8 $m$. **Qual a medida do lado?** | 12 | 6 | 2 |

| Questões com duas representações | Número de respostas<br>Corretas<br>TM | <br>Incorretas<br>TM | <br>Não responde<br>TM |
|---|---|---|---|
| O Luís encheu $\frac{3}{6}$ de um depósito de água e a Joana 0,5 desse mesmo depósito. **Quem colocou mais água no depósito?** | 11 | 9 | 0 |
| Uma tina tem de capacidade $22{,}5\ l$ . **Quantos baldes de $\frac{1}{2}\ l$ são necessários encher para despejar por completo a tina?** | 13 | 6 | 1 |
| O sólido A tem $8{,}4\ l$ de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. **Calcula a capacidade do sólido B** | 2 | 9 | 9 |
| A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com $8{,}16\ m$ retirou $\frac{1}{8}$ . **Que porção de tecido usou?** | 0 | 10 | 10 |
| O avô do João já gastou $\frac{5}{10}$ da capacidade de um depósito de água na rega do jardim. **Quanto lhe falta para esvaziar o depósito?** | 14 | 3 | 3 |
| Na turma da Rita $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e 25% pratica natação. **Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade?** | 14 | 3 | 3 |

## Anexo T

Respostas dos alunos a todas as questões da experiência de ensino – Ciclo II

**Tarefa 1** **18 e 21 janeiro 2013**

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **Discussão** | **E** | **F** | **G** | **H** | **I** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ | $?-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ | | $\frac{1}{2}+?=1$ | $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{6}+?=1$ | $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}+?=\frac{3}{4}$ |
| **Solução** | 1 | 8/10 | 1/2 | 1/4 | 1 | | 1/2 | 1 | 1/2 | 1/4 | 1/4 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Aida** | 2/2 | **3/10** | 2/4 | 1/4 | **3/4** | | **1** | **6/8** | | | |
| **Cátia** | 1 | | | 1/4 | **4/6** | | ½ | | | **1** | **2/4** |
| **Diogo** | 2/2 | **2/10** | | | 1 | | ½ | 8/8 | 3/6 | 1/4 | ¼ |
| **Liliana** | | | | | | | 1 | 6/12 | 3/6 | | |
| **Luís** | **2/4** | **2/10** | 2/4 | **1/2** | | | Faltou | | | | |
| **Eugénia** | **2/4** | | | **3/6** | | | ½ | | | | **2/2** |
| **Cristina** | **2/4** | **5** | 2/4 | | **3/2** | | **1 ou 2** | **6/12** | **6** | **1/2** | **2/2** |
| **Inês** | 1 | 8/10 | 2/4 | | 1 | | ½ | 1 | | 1/4 | ¾ |
| **Tiago** | 2/2 | **2/10** | 2/4 | | | | ½ | 1 | 3/6 | **1/2** | **2/2** |
| **Bernardo** | 1 | 8/10 | 2/4 | | **3/8** | | ½ | **6/12** | | **2/2** | **2/2** |
| **Rui** | 2/2 | **2/10** | 2/4 | | 4/4 | | ½ | 1 | 3/6 | 1/4 | ¼ |
| **Luisa** | 2/2 | **3/10** | 2/4 | 1/4 | **3/6** | | **1** | **6/12** | **1** | **1** | ¾ |
| **Acácio** | 2/2 | | 2/4 | **1/2** | **2/4** | | ½ | 1 | 3/6 | **5/4** | ¼ |
| **Joana** | ½ | **3/10** | 2/4 | 1/4 | **3/6** | | **1** | **8/2** | **1** | **2/6** | ¾ |
| **Francisco** | **2/4** | **3/10** | 2/4 | 1/4 | | | ½ | **6** | 3/6 | 1/4 | **2/2** |
| **Gonçalo** | 1 | **2/16** | 2/4 | **2/4** | | | ½ | 8/8 | 3/6 | 1/4 | **2/4** |
| **Ricardo** | 1 | **2/10** | 2/4 | **3/4** | 1 | | ½ | 1 | 3/6 | 1/4 | ¼ |
| **Romero** | **2/4** | **2/10** | 2/4 | **1/2** | | | ½ | | 3/6 | **2/2** | **2/2** |
| **António** | 1 | | 2/4 | **1/2** | 1 | | ½ | 1 | **1/2** | 1/4 | ¼ |

**Tarefa 2** **25 e 28 janeiro 2013**

| | A | B | C | D | E | Discussão | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $5\times\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{4}\times ?=1$ | $\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}$ | $\frac{1}{4}\div ?=\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$ | | $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{4}\div ?=\frac{1}{4}$ | $?\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ | $\frac{4}{8}\div\frac{1}{2}$ | $\frac{15}{20}\times ?=\frac{15}{20}$ |
| **Solução** | 1 | 4/3 | 2 | 1/2 | 1/2 | | 1 | 3 | 1/5 | 1 | 20/2 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Aida** | **10** | **1** | **2/6** | 1/2 | | | 3/3 | **1/4** | **1/6** | **4/8** | |
| **Cátia** | 1 | 4/3 | **2/6** | 1/2 | 3/6 | | 1 | **4/3** | **5/6** | 1 | |
| **Diogo** | 1 | | **2/6** | 2/4 | | | 1 | **3/4** | | **1/2** | |
| **Liliana** | | **1/2** | **2/6** | | 2/4 | | 1 | | | | |
| **Luís** | | | **2/6** | 1/2 | 6/12 | | 1 | **2/4** | **4/6** | | |
| **Eugénia** | 1 | **2/4** | **1** | **1/4** | 1/2 | | Faltou | | | | |
| **Cristina** | 1 | **3** | **2/6** | 1/2 | **4/2** | | 6/6 | **3/4** | **5/6** | **1/4** | |
| **Inês** | **1/25** | | 6/3 | 1/2 | 3/6 | | 6/6 | | | **1/4** | |
| **Tiago** | **15/5** | **3/4** | **12/24** | **2** | **6/9** | | 1 | 12/4 | | | |
| **Bernardo** | 5/5 | **2/2** | **2/6** | 1/2 | **3/3** | | 3/3 | **4/3** | **6/5** | | **20/15** |
| **Rui** | **1/5** | **3/4** | **2/6** | 1/2 | **1/1** | | 1/1 | **3/4** | **4/6** | **1/4** | **15/10** |
| **Luisa** | 1 | **1** | **10** | 1/2 | **6/7** | | **4/9** | **1/4** | **1/6** | **16/4** | **15/2** |
| **Acácio** | 1 | **3/4** | **2/6** | **1/4** | 6/12 | | Faltou | | | | |
| **Joana** | 1 | **1** | **2/6** | 1/2 | **6/7** | | | **1/4** | **1/6** | | |
| **Francisco** | 1 | **1/3** | | 2/4 | 2/4 | | 1 | **1/1** | | 1 | |
| **Gonçalo** | 1 | **1/4** | **3/6** | 1/2 | 6/12 | | 1 | **3/4** | **1/6** | | **1/2** |
| **Ricardo** | 1 | **2** | **2/6** | **2/8** | | | 3/3 | **3/4** | | **1/8** | |
| **Romero** | 1 | **3/4** | **1/1** | | **1/1** | | Faltou | | | | |
| **António** | 1 | **1/3** | | | | | 6/6 | 3 | 1/5 | **1/4** | **15/2** |

**Tarefa 3** **1 fevereiro 2013**

| | A | B | C | D | E | | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $\frac{3}{4}+0,50$ | $\frac{8}{10}-0,2$ | $2,4\div\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}\times 0,25$ | $0,75\div\frac{1}{4}$ | | P1[21] | P2[22] | P3[23] | P4[24] |
| **Solução** | 1,25 | 0,6 | 4,8 | 1/20 | 3 | | 2,40€ | 3,2€ | 3/10 | 3000cm |
| **Aluno** | | | | | | | | | | |
| **Aida** | **4/6** | | | 1/20 | | | 2,40 | **32** | | |
| **Cátia** | | | | | | | | | | |
| **Diogo** | 5/4 | 6/10 | | 1/20 | **3/4** | | 2,40 | 3,2 | 3/10 | |
| **Liliana** | | | | | | | | | | |
| **Luís** | | | | | | | 2,40 | 3,20 | | |
| **Eugénia** | **1/2** | 6/10 | **1/2** | **25/5** | | **Discussão** | **95** | **2,7** | **1/2** | |
| **Cristina** | | | | | | | | | | |
| **Inês** | | 6/10 | **2,4** | | | | **3,20** | | | **120000** |
| **Tiago** | | | | | | | | | | |
| **Bernardo** | **4/6** | 6/10 | **2/2** | **1/9** | | | 2,40 | 3,2 | **1/4** | **1,5** |
| **Rui** | **9/4** | **3/10** | **1/1** | **100/25** | 3/1 | | 2,40 | 3,20 | **9/2** | **15/300** |
| **Luisa** | **53/14** | **8/10** | **1/1** | **18/10** | | | | | **1/20** | |
| **Acácio** | 1,25 | | | | | | 2,40 | 3,2 | 3/10 | |
| **Joana** | **16/4** | 6/10 | | **5** | | | **2,30** | **13,2** | | |
| **Francisco** | | | | | | | **2,2** | 3,2 | **19/100** | **4100** |
| **Gonçalo** | | | | | | | | | | |
| **Ricardo** | 5/4 | 6/10 | **1/5** | **1/4** | | | **2,60** | 3,2 | | **1/10000** |
| **Romero** | 5/4 | | **1/4** | | | | 2,4 | 3,20 | | |
| **António** | 5/4 | 6/10 | | | 3 | | | | | |

[21] Uma embalagem de 250g de cereais custa 0,80€. **Qual o preço de 750g dos mesmos cereais?**
[22] Quatro livros de banda desenhada custam 12,8€. **Qual o preço de cada livro?**
[23] Para fazer refresco de laranja é necessário $\frac{1}{10}l$ de concentrado por cada $\frac{1}{2}l$ de água. **Que quantidade de concentrado se deve usar para $1,5\ l$ de água?**
[24] O João desenhou, numa folha de papel, a distância de sua casa à escola através de um segmento de 1,5 cm. **Sabendo que a escala que usou foi de 1:2000, qual a distância real de casa à escola?**

**Tarefa 4** **22 fevereiro 2013**

| | A | B | C | D | E | | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $0,5+0,25$ | $0,04+?=1$ | $0,18-0,03$ | $?-4,3=0,5$ | $0,75+0,5$ | | $1,25-?=0,75$ | $0,6+0,04$ | $0,7+?=1$ | $1,9+0,50$ | $0,07+?=0,84$ |
| **Solução** | 0,75 | 0,96 | 0,15 | 4,8 | 1,25 | | 0,5 | 1 | 0,3 | 1,4 | 0,77 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Aida** | 0,75 | **1** | **0,83** | | 1,25 | | **0,75** | 1,0 | **1** | | **0,84** |
| **Cátia** | 0,75 | | | | 1,25 | | 0,50 | 1 | | | |
| **Diogo** | | | | | | | | | | | |
| **Liliana** | **0,30** | | | | | | 0,50 | | | | |
| **Luís** | **0.30** | | | | 1,25 | | 0,50 | **0,64** | | | |
| **Eugénia** | **3,5** | | **15** | | 8,5 | | | | | | |
| **Cristina** | **0,30** | **0,04** | **15** | **6,9** | **0,80** | | 0,50 | **0,10** | **0,5** | | |
| **Inês** | 0,75 | | 0,15 | | **0,80** | **Discussão** | **2,00** | **0,10** | 0,3 | | **0,91** |
| **Tiago** | 0,75 | **0,096** | 0,15 | | **0,115** | | | **0,10** | 0,3 | 1,40 | |
| **Bernardo** | 0,75 | 0,96 | 0,15 | 4,8 | 1,25 | | 0,50 | 1 | 0,30 | | |
| **Rui** | 0,75 | 0,96 | 0,15 | 4,8 | 1,25 | | 0,50 | 1,0 | 0,3 | 1,4 | 0,77 |
| **Luisa** | 0,75 | | **0,21** | **4,3** | **4,3** | | **1** | 1,0 | | 1,40 | |
| **Acácio** | **0,30** | **0,06** | 0,15 | | **0,80** | | 0,5 | **0,2** | 0,3 | | 0,77 |
| **Joana** | 0,75 | **1** | **0,14** | **0,5** | **0,25** | | **0,75** | 1,0 | **1** | 1,40 | **0,89** |
| **Francisco** | 0,75 | | **0,6** | | 1,25 | | **0,75** | **0,01** | 0,3 | | |
| **Gonçalo** | 0,75 | **1,06** | 0,15 | **4,7** | | | 0,5 | 1,0 | 0,3 | 1,4 | **0,09** |
| **Ricardo** | 0,75 | 0,96 | 0,15 | **3,7** | **0,80** | | 0,50 | 1 | 0,3 | 1,4 | |
| **Romero** | 0,75 | 0,96 | 0,15 | 4,8 | 1,25 | | 0,50 | **0,64** | | 1,40 | |
| **António** | 0,75 | 0,96 | 0,15 | **18** | **0,80** | | **0,15** | 1 | 0,3 | 1,4 | |

**Tarefa 5** **1 março 2013**

| | A | B | C | D | Discussão | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | P1[25] | P2[26] | P4[27] | P4[28] | | $0,25 \times 4$ | $? \times 0,4 = 0,16$ | $12,2 \div 0,5$ | $25,5 \times ? = 5,1$ | $4,2 \times 0,2$ |
| **Solução** | 1/2 | 2,2 | 0,6 | 45 | | 1 | 0,4 | 24,4 | 0,2 | 0,84 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | |
| **Aida** | | 2,2 | **0,9** | | | 1 | **0,16** | | | 0,84 |
| **Cátia** | | | | | | **0,40** | **0,12** | | | **8,2** |
| **Diogo** | 5/10 | **8,8** | | 45 | | 1 | 0,4 | | | |
| **Liliana** | | | | | | **0,40** | **0,12** | | | |
| **Luís** | | 2,2 | | 45,0 | | 1 | **0,36** | | **20,4** | **4,2** |
| **Eugénia** | **1** | **4,4** | | | | | | | | **4,4** |
| **Cristina** | 5/10 | **4,2** | 0,6 | **12** | | | 0,4 | **1/2** | **25,5** | **0,8** |
| **Inês** | | **8,8** | **0,36** | | | 1 | | 24,4 | | 0,84 |
| **Tiago** | 5/10 | 2,2 | 0,6 | **11,52** | | 1 | 0,4 | **6,1** | | **0,02** |
| **Bernardo** | 5/10 | 2,2 | **0,23** | 42 | | | | | | |
| **Rui** | 5/10 | **8,8** | **0,36** | **11,25** | | 1,00 | 0,4 | 24,4 | **5,00** | **4** |
| **Luisa** | 5/10 | **17,6** | **0,72** | 45,0 | | **0,45** | **10** | | **5,1** | **8,4** |
| **Acácio** | 5/10 | **8,8** | **0,72** | **92** | | **100** | 0,4 | **2,5** | **29,5** | **8,4** |
| **Joana** | **1/5** | **55,966** | **37,290** | 45,0 | | | **0,16** | | **5,1** | **8,4** |
| **Francisco** | **10/5** | **8,8** | **0,36** | **22,5/2** | | 1,00 | **0,13** | | | |
| **Gonçalo** | 5/10 | 2,2 | | **8** | | 1 | 0,4 | **0,5** | | |
| **Ricardo** | 5/10 | **4,4** | | **11** | | 1 | 0,4 | 24,4 | | **4,4** |
| **Romero** | | **8,8** | **0,36** | **11,25** | | **2,0** | 0,4 | | | **4,4** |
| **António** | 1/2 | 2,2 | 0,6 | 45 | | 1 | | | | |

[25] O avô do João já gastou $\frac{5}{10}$ da capacidade de um depósito de água na rega do jardim. **Quanto lhe falta para esvaziar o depósito?**

[26] O perímetro da face de um tanque cúbico é 8,8 m. **Qual a medida do lado?**

[27] A Rita construiu um cubo em que a área da base era 0,36 m$^2$.**Qual a medida do lado?**

[28] Uma tina tem de capacidade 22,5 l de água. **Quantos baldes de $\frac{1}{2}\,l$ são necessários para encher por completo a tina?**

**Tarefa 6** **7 março 2013**

| | A | B | C | D | Discussão | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | P1[29] | P2[30] | P3[31] | P7[32] | | $0{,}6 \times 0{,}30$ | $2{,}1 \div ? = 8{,}4$ | $0{,}14 \div 0{,}2$ | $? \times 0{,}5 = 30$ | $0{,}82 \div ? = 1{,}64$ |
| **Solução** | Ambos | 6,3 | 3m | 3,1m$^3$ | | 0,18 | 0,25 | 0,7 | 60 | 0,5 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | |
| **Aida** | | | | | | 0,180 | | 0.7 | | |
| **Cátia** | | | | | | 0,18 | **0,4** | **0,20** | **15** | **0,82** |
| **Diogo** | Ambos | **7,5** | | | | | | | 60 | |
| **Liliana** | | | | | | 0,18 | **0,4** | **0,20** | **0,15** | **0,82** |
| **Luís** | Ambos | | **2,12** | | | **0,90** | | **0,34** | **3,5** | |
| **Eugénia** | **Joana** | | | **10,65** | | | | | | |
| **Cristina** | **Joana** | **8,4** | | | | **36** | **3/6** | | **0,2** | **0,82** |
| **Inês** | | | | | | | | 0,7 | | |
| **Tiago** | Ambos | **3,4** | **3,3** | | | 0,180 | | 0,7 | **15** | 1/2 |
| **Bernardo** | Ambos | **2,2** | **16,8** | | | | | 0,70 | **0,6** | |
| **Rui** | Ambos | **25,2** | | 3,1 | | 0,18 | **4,4** | **0,30** | **0,15** | **0,82** |
| **Luisa** | | | **16,8** | **12,65** | | | | | | |
| **Acácio** | Ambos | **24,12** | **3,3** | | | **1,80** | **16,4** | 0,7 | **1,5** | |
| **Joana** | | **24/8** | **24,8448** | 3,1 | | **1,80** | **4** | **2,1** | | |
| **Francisco** | **Joana** | | | | | | **0,7** | | **0,6** | |
| **Gonçalo** | Ambos | **2,2** | **6,4** | | | **0,12** | | 0,7 | **0,6** | |
| **Ricardo** | Ambos | **25,2** | | | | **0,90** | 1/4 | | **0,6** | 1/2 |
| **Romero** | **Joana** | | | **0,05** | | **0,90** | | **1** | **1** | |
| **António** | Faltou | | | | | Faltou | | | | |

[29] O Luís encheu $\frac{3}{6}$ de um depósito de água e a Joana 0,5 desse mesmo depósito. **Quem colocou mais água no depósito?**

[30] O sólido A tem 8,4 l de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. **Calcula a capacidade do sólido B.**

[31] A área da base de um cilindro é 4,2 m$^2$ e o seu volume 12,6 m$^3$. **Calcula a altura deste cilindro.**

[32] A área da base de um paralelepípedo retângulo é 12,4 m$^2$. **Sabendo que a altura é 0,25 m , qual o volume do paralelepípedo?**

**Tarefa extra** **5 e 8 abril 2013**

| | A | B | C | D | E | Discussão | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ | $1-?=\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{5}\times 0,5$ | $\frac{4}{5}\div ?=\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}+0,3$ | | $\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$ | $2,8-?\,0,9$ | $\frac{6}{8}\div\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}\times ?=\frac{1}{8}$ | $1,5\div\frac{1}{3}$ |
| **Solução** | 1/2 | 3/4 | 1/5 | 4 | 0,5 | | 1 | 1,9 | 1 | 1/4 | 4,5 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Aida** | 3/6 | **1/6** | 1/5 | **3/5** | **2/3** | | **8/14** | | **3/4** | 1/4 | |
| **Cátia** | | | | | | | | | 1 | **1/6** | |
| **Diogo** | 3/6 | 0,75 | 2/10 | 4 | **0,23** | | 1 | 1,9 | 24/24 | ¼ | |
| **Liliana** | | | | | | | | | | ¼ | |
| **Luís** | 3/6 | **1/4** | | | | | | **2,1** | | ¼ | |
| **Eugénia** | **1/9** | **1/4** | | **1/5** | | | **8/16** | | | ¼ | |
| **Cristina** | | **1/3** | | | | | 1 | | 1 | ¼ | **1/2** |
| **Inês** | 3/6 | | **4/50** | | | | | | 1 | ¼ | |
| **Tiago** | **1/9** | | **4/10** | **4/2.5** | **1/7** | | 14/14 | 1,9 | 24/24 | ¼ | 45/10 |
| **Bernardo** | | **1/3** | **20/10** | **4/10** | **11/8** | | **8/16** | | | ¼ | |
| **Rui** | 3/6 | 3/4 | 10/50 | 4/1 | 5/10 | | 1/1 | **1,7** | 2/2 | ¼ | **10/5** |
| **Luisa** | **1/9** | **1/4** | | | **6/15** | | **7/16** | | **18/32** | ½ | **1** |
| **Acácio** | | | | | | | **14/28** | 1,9 | **1/2** | ¼ | |
| **Joana** | **1/9** | **1/2** | **10/15** | | **4/15** | | **7** | | **3/8** | ¼ | |
| **Francisco** | **1/6** | **1/4** | | **3/5** | **2/25** | | 14/14 | **2,7** | **8/21** | ¼ | |
| **Gonçalo** | 3/6 | 3/4 | | | | | 1 | 1,9 | | ¼ | |
| **Ricardo** | **1** | 3/4 | **4/5** | **4/5** | **4/5** | | 14/14 | 1,9 | 1 | 8 | **1/2** |
| **Romero** | **2/9** | **2/4** | | 4/1 | **1,3/5,3** | | **9/15** | **1/2** | | ¼ | |
| **António** | **1/9** | 3/4 | | | | | 1 | 1,9 | **1/4** | | |

**Tarefa 7** **12 e 15 abril 2013**

| | A | B | C | D | E | **Discussão** | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $50\%\ de\ 40$ | $25\%\ de\ ? = 20$ | $10\%\ de\ 350$ | $30\%\ de\ ? = 15$ | $90\%\ de\ 30$ | | $50\%\ de\ ? = 60$ | $25\%\ de\ 20$ | $10\%\ de\ ? = 5$ | $75\%\ de\ 80$ | $5\%\ de\ ? = 3$ |
| **Solução** | 20 | 80 | 35 | 50 | 27 | | 120 | 5 | 50 | 60 | 60 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Aida** | 20 | **20** | | | | | 120 | 5 | **25** | | |
| **Cátia** | 20 | | | | | | | | | | |
| **Diogo** | 20 | **5** | | | 27 | | 120 | 5 | **0,5** | 60 | |
| **Liliana** | Faltou | | | | | | Faltou | | | | |
| **Luís** | 20 | **15** | | | | | **30** | 5 | | | **15** |
| **Eugénia** | **20%** | | | | **120%** | | **10%** | **45%** | | | **2** |
| **Cristina** | | | | | | | | | **5** | | |
| **Inês** | **20%** | | | | | | 120 | | | **75%=3/4** | |
| **Tiago** | 20 | **5** | 35 | | | | 120 | 5 | | **35** | |
| **Bernardo** | **20%** | | | **30** | | | | **5%** | **2** | | |
| **Rui** | **80** | **4** | **3500** | **3** | **30** | | 120 | 5 | **10** | **20** | **15** |
| **Luisa** | **90%** | | **360%** | | | | **60** | | | | **5** |
| **Acácio** | Não apresentou qualquer resposta | | | | | | Não apresentou qualquer resposta | | | | |
| **Joana** | **240%** | **50%** | | | | | 120 | | | | **15** |
| **Francisco** | | | **3500** | | | | 120 | | **15** | | |
| **Gonçalo** | **20%** | **50%** | | | **180%** | | 120 | 5 | **0,5** | | **2** |
| **Ricardo** | 20 | **5** | | | | | **30** | 5 | **0,5** | **20** | |
| **Romero** | **80%** | | **340%** | **3%** | | | **10** | | **15** | **5** | |
| **António** | 20 | 80 | | | 27 | | 120 | 5 | **0,5** | **65** | |

**Tarefa 8** **19 abril 2013**

| | A | B | C | D | E | Discussão | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | $\frac{3}{4} de\ 60$ | $\frac{1}{2} de\ ? = 0{,}9$ | $0{,}2\ de\ 10$ | $0{,}25\ de\ ? = 10$ | $\frac{1}{3} de\ 120$ | | $20\%\ de\ 50$ | $\_\%de20 = 18$ | $\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5} de? = 8$ | $\_\%de30 = 0{,}3$ |
| **Solução** | 45 | 1,8 | 2 | 40 | 40 | | 10 | 90% | 1/9 | 40 | 1% |
| **Aluno** | | | | | | | | | | | |
| **Aida** | | **0,18** | **5** | | | | | | **1** | 40 | |
| **Cátia** | | | | | | | | | 1/9 | | |
| **Diogo** | 45 | 1,8 | 2 | | | | **20** | | **3/9** | | **10** |
| **Liliana** | | | | | | | | | | | |
| **Luís** | **15** | 1,8 | **5** | | **30** | | **30** | | **1/3** | | |
| **Eugénia** | | | **5** | | | | 10 | | 1/9 | | |
| **Cristina** | | | **3** | **20** | **6** | | 10 | **16** | **1/2** | **3** | |
| **Inês** | | | | | | | | | | | |
| **Tiago** | | **0,18** | 2 | **1/4** | 40 | | **5** | **2** | 1/9 | | **10** |
| **Bernardo** | **75** | 1,8 | **5** | | | | | | **1/6** | | |
| **Rui** | 45 | 1,8 | 2 | 40 | 40 | | 10 | **80** | 1/9 | **4** | **100** |
| **Luisa** | | | **2,2** | | | | 10 | | 1/9 | | |
| **Acácio** | | 1,8 | **5** | | | | 10 | | **1** | **3** | **10** |
| **Joana** | | | **20%** | | | | **15%** | | 1/9 | | |
| **Francisco** | **15** | **10,11** | | | | | **5** | **1/6** | | | |
| **Gonçalo** | **25** | | **2** | | | | | | 1/9 | | |
| **Ricardo** | 45 | 1,8 | **8** | **2,5** | 40 | | **12,5** | **2%** | **1/3** | **10** | **3%** |
| **Romero** | 45 | **50** | | | 40 | | | | 1/9 | | |
| **António** | 45 | 1,8 | | | | | 10 | | 1/9 | 40 | **10** |

**Tarefa 9** **26 abril 2013**

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **Discussão** | **E** | **F** | **G** | **H** | **I** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | P1[33] | P2[34] | P3[35] | P4[36] | | $\frac{5}{10}+\frac{1}{4}$ | $2{,}2-?=\frac{1}{5}$ | $\frac{9}{10}\div\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{3}\times ?=1$ | $20\%de\ ?=8$ |
| **Solução** | Menos | 1,02 | 5€ | 300 | | 3/4 | 2 | 3 | 3/2 | 40 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | |
| **Aida** | Menos | | **4€** | | | | | **3/10** | | **4** |
| **Cátia** | | | | | | | | | 3/2 | |
| **Diogo** | Menos | **1,2m** | 5€ | 300 | | 3/4 | 2 | 90/30 | | **35** |
| **Liliana** | | | | | | | | | | |
| **Luís** | **1/15** | | | 300 | | **6/19** | | **6/10** | **1/2** | |
| **Eugénia** | **Ambos** | | | | | **6/14** | | **3/10** | | |
| **Cristina** | **Sim** | **Metade** | 5€ | **14** | | **6/10** | **20** | | **1/5** | **4** |
| **Inês** | | | | | | | | **3/10** | | |
| **Tiago** | Menos | **1,16** | 5€ | **3000** | | | | **3/10** | 3/2 | **4** |
| **Bernardo** | Menos | **15** | | | | **75** | | **3/10** | | |
| **Rui** | Menos | 1,02 | 5€ | **100** | | 3/4 | **21/5** | 3/1 | 3/2 | **1,6** |
| **Luisa** | **1/50** | **16/8** | | | | **5/14** | | **9** | **16%** | |
| **Acácio** | **1/15** | | **10€** | **75%** | | **11/10** | **708** | **6/10** | **2/3** | **42%** |
| **Joana** | **1/2** | **66,24** | | | | **1/20** | | **3/10** | | |
| **Francisco** | **1/2** | | | **100** | | | | 90/30 | 3/2 | **6** |
| **Gonçalo** | | | **10€** | 300 | | | | 3/1 | 3/2 | **1** |
| **Ricardo** | 3/10 | 1,02 | 5€ | 300 | | **7/10** | **1,1** | | **1/3** | |
| **Romero** | Menos | **1/5** | | | | 3/4 | | 3/1 | **2/3** | **1,6** |
| **António** | Menos | **1,2** | 5 | 300 | | 75% | | **3/10** | | 1 |

[33] A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$e o pai $\frac{1}{5}$. **Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?**

[34] A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com 8,16 m retirou $\frac{1}{8}$ para a saia. **Que porção de tecido usou?**

[35] Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. **Calcula o valor do desconto.**

[36] Diariamente, 400 alunos almoçam no refeitório da escola do João. Destes alunos, $\frac{3}{4}$ comem sempre sopa. **Quantos alunos comem sopa?**

**Tarefa 10** **23 maio 2013**

| | A | B | C | D | | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questão** | P1[37] | P2[38] | P3[39] | P4[40] | | $\frac{6}{12}+?=1$ | $0,68-0,2$ | $0,75 \div ?=3$ | $\frac{4}{6}\times\frac{6}{7}$ | $75\%\ de\ 20$ |
| **Solução** | 0,60 | 25% | 6 | 14,3℃ | | 1/2 | 0,48 | 1/4 | 4/7 | 15 |
| **Aluno** | | | | | | | | | | |
| **Aida** | | | | **5,3º** | | 6/12 | 0,48 | | 12/21 | |
| **Cátia** | | | | | | | | | | |
| **Diogo** | 0,60 | 25% | **5 copos** | 14,3º | | 6/12 | 0,48 | | 24/42 | 15 |
| **Liliana** | | | | | | | | | | |
| **Luís** | 0,60 | | | **15,7** | | 1/2 | **0,66** | | 4/7 | |
| **Eugénia** | | | | | | 6/12 | 0,48 | | 4/7 | |
| **Cristina** | **0,80** | **50%** | **15** | **3** | | 1/2 | **0,66** | | 4/7 | **55** |
| **Inês** | | 25% | | | **Discussão** | **12/6** | 0,48 | | 24/42 | |
| **Tiago** | **0,40** | | **2 copos** | **15,7** | | 6/12 | 0,48 | | 24/42 | **45** |
| **Bernardo** | **19,60** | | **4 copos** | | | **12/6** | 0,48 | 1/4 | **6/6** | **5** |
| **Rui** | **0,20** | 25% e 1/4 | **6/8** | 14,3º | | 6/12 | 0,48 | 1/4 | 24/42 | 15 |
| **Luisa** | **40%** | | | | | | 0,48 | | | **140%** |
| **Acácio** | **0,20** | 25% | **8 copos** | **15,1** | | 6/12 | **0,66** | **0** | 4/7 | **30** |
| **Joana** | **40%** | **8/8** | | **46,3º** | | 6/12 | 0,48 | | **6/11** | **140%** |
| **Francisco** | **19,60** | **80%** | | | | **12/8** | 0,48 | | 4/7 | **5** |
| **Gonçalo** | 0,60 | 25% | | **15,7** | | 6/12 | 0,48 | | **12/46** | 15 |
| **Ricardo** | **40** | 2/8 | **7** | **15,7º** | | ½=6/12 | 0,48 | | | 15 |
| **Romero** | | | **6/8** | 14,3º | | 6/12 | | | **6/28** | |
| **António** | **2** | 25% | | **30,2º** | | 6/12 | 0,48 | 0,25 | **6/12** | 15 |

[37] Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, **qual a frequência relativa da outra face**?

[38] Na turma da Rita, $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e 25% pratica natação. **Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade?**

[39] A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}$ litro de capacidade. **Com 0,75 litros de refresco quantos copos consegue encher a Ana?**

[40] Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de 30,2°$C$ e a temperatura mínima de 15,9℃ . **Qual a amplitude térmica?**

**Anexo U**

Número de respostas corretas, incorretas e em branco a todas as questões da experiência de ensino – Ciclo II

| | Número de respostas | | |
|---|---|---|---|
| | Corretas | Incorretas | Não responde |
| **Questões com frações** | TL | TL | TL |
| $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ | 12 | 6 | 1 |
| $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ | 15 | 0 | 4 |
| $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ | 5 | 7 | 7 |
| $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ | 7 | 8 | 4 |
| $\frac{4}{8}+\frac{2}{4}$ | 8 | 7 | 4 |
| $\frac{1}{2}+?=1$ | 13 | 5 | 1 |
| $?-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$ | 2 | 12 | 5 |
| $\frac{3}{6}+?=1$ | 9 | 4 | 6 |
| $\frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$ | 5 | 7 | 7 |
| $\frac{1}{2}+?=\frac{3}{4}$ | 5 | 11 | 3 |
| $5\times\frac{1}{5}$ | 13 | 4 | 2 |
| $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$ | 8 | 7 | 4 |
| $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}$ | 14 | 1 | 1 |
| $\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}$ | 1 | 17 | 1 |
| $\frac{4}{8}\div\frac{1}{2}$ | 2 | 8 | 6 |
| $\frac{3}{4}\times?=1$ | 12 | 4 | 3 |
| $\frac{1}{4}\div?=\frac{1}{2}$ | 12 | 4 | 3 |
| $?\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ | 1 | 9 | 6 |
| $\frac{3}{4}\div?=\frac{1}{4}$ | 2 | 12 | 2 |
| $\frac{15}{20}\times?=\frac{15}{2}$ | 0 | 5 | 11 |
| $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ | 6 | 8 | 5 |
| $\frac{4}{5}\div?=\frac{1}{5}$ | 3 | 6 | 10 |
| $\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$ | 8 | 7 | 4 |

| | Número de respostas | | |
|---|---|---|---|
| | Certas | Erradas | Não responde |
| **Questões com frações** | TL | TL | TL |
| $\frac{6}{8} \div \frac{3}{4}$ | 7 | 6 | 6 |
| $\frac{1}{2} \times ? = \frac{1}{8}$ | 15 | 3 | 1 |
| $\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$ | 9 | 7 | 3 |
| $\frac{5}{10} + \frac{1}{4}$ | 4 | 8 | 7 |
| $\frac{6}{12} + ? = 1$ | 13 | 3 | 3 |
| $\frac{4}{6} \times \frac{6}{7}$ | 10 | 5 | 4 |
| $\frac{2}{3} \times ? = 1$ | 5 | 6 | 8 |
| $\frac{9}{10} \div \frac{3}{10}$ | 5 | 10 | 4 |
| A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$ .**Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?** | 8 | 7 | 4 |

| | Número de respostas | | |
|---|---|---|---|
| | Corretas | Incorretas | Não responde |
| **Questões com numerais decimais** | TL | TL | TL |
| $0{,}5 + 0{,}25$ | 13 | 5 | 0 |
| $0{,}18 - 0{,}03$ | 9 | 6 | 3 |
| $0{,}75 + 0{,}5$ | 7 | 9 | 2 |
| $1{,}9 - 0{,}50$ | 8 | 0 | 10 |
| $0{,}6 + 0{,}04$ | 9 | 7 | 2 |
| $0{,}7 + ? = 1$ | 9 | 3 | 6 |
| $? - 4{,}3 = 0{,}5$ | 3 | 6 | 9 |
| $0{,}04 + ? = 1$ | 5 | 6 | 7 |
| $1{,}25 - ? = 0{,}75$ | 10 | 6 | 2 |
| $0{,}07 + ? = 0{,}84$ | 2 | 4 | 12 |
| $0{,}25 \times 4$ | 10 | 5 | 4 |
| $12{,}2 \div 0{,}5$ | 3 | 4 | 12 |
| $0{,}6 \times 0{,}30$ | 5 | 7 | 6 |
| $0{,}14 \div 0{,}2$ | 6 | 6 | 6 |
| $4{,}2 \times 0{,}2$ | 2 | 11 | 6 |
| $? \times 0{,}5 = 30$ | 1 | 12 | 5 |
| $2{,}1 \div ? = 8{,}4$ | 1 | 7 | 10 |
| $? \times 0{,}4 = 0{,}16$ | 8 | 7 | 4 |
| $0{,}82 \div ? = 1{,}64$ | 2 | 4 | 12 |
| $25{,}5 \times ? = 5{,}1$ | 0 | 6 | 13 |
| $2{,}8 - ? = 0{,}9$ | 6 | 4 | 9 |
| $0{,}68 - 0{,}2$ | 13 | 3 | 3 |
| $0{,}75 \div ? = 3$ | 3 | 1 | 15 |
| A Rita construiu um cubo em que a área da base era $0{,}36\ m^2$. **Qual a medida do lado?** | 3 | 9 | 7 |
| A área da base de um cilindro é $4{,}2\ m^2$ e o seu volume $12{,}6\ m^3$. **Calcula a altura.** | 0 | 7 | 11 |
| A área da base de um paralelepípedo retângulo é de $12{,}4\ cm^2$ . Sabendo que a altura é $0{,}25\ cm$. **Qual o volume do paralelepípedo?** | 2 | 3 | 13 |
| Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa. **Qual a frequência relativa da face nacional?** | 3 | 10 | 6 |
| Durante o verão de 2010, a temperatura máxima em Lisboa foi de $30{,}2°$ e a temperatura mínima de $15{,}9°$. **Qual a amplitude térmica?** | 3 | 9 | 7 |

| | Número de respostas | | |
|---|---|---|---|
| | Corretas | Incorretas | Não responde |
| **Questões com percentagens** | TL | TL | TL |
| $50\%\ de\ 40$ | 7 | 8 | 3 |
| $10\%\ de\ ? = 5$ | 0 | 10 | 8 |
| $25\%\ de\ 20$ | 8 | 2 | 8 |
| $30\%\ de\ ? = 15$ | 0 | 3 | 15 |
| $75\%\ de\ 80$ | 1 | 6 | 11 |
| $50\%\ de\ ? = 60$ | 9 | 5 | 4 |
| $10\%\ de\ 350$ | 1 | 4 | 13 |
| $5\ \%\ de\ ? = 3$ | 0 | 6 | 12 |
| $90\%\ de\ 30$ | 2 | 3 | 13 |
| $25\%\ de\ ? = 20$ | 1 | 8 | 9 |
| $20\%\ de\ 50$ | 6 | 6 | 7 |
| $\_\%\ de 20 = 18$ | 0 | 5 | 14 |
| $\_\%\ de 30 = 0{,}3$ | 0 | 6 | 13 |
| $75\%\ de\ 20$ | 5 | 7 | 7 |
| $20\%\ de\ ? = 8$ | 0 | 10 | 9 |
| Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. **Calcula o valor do desconto.** | 6 | 3 | 10 |

| Questões com duas representações | Número de respostas | | |
|---|---|---|---|
| | Corretas | Incorretas | Não responde |
| | TL | TL | TL |
| $\frac{3}{4}+0,5$ | 5 | 6 | 6 |
| $\frac{8}{10}-0,2$ | 7 | 2 | 8 |
| $2,4\div\frac{1}{2}$ | 0 | 7 | 10 |
| $\frac{1}{5}\times 0,25$ | 2 | 6 | 9 |
| $0,75\div\frac{1}{4}$ | 2 | 1 | 14 |
| $1-?=\frac{1}{4}$ | 5 | 9 | 5 |
| $\frac{2}{5}\times 0,5$ | 3 | 5 | 11 |
| $\frac{1}{5}+0,3$ | 1 | 9 | 9 |
| $1,5\div\frac{1}{3}$ | 1 | 4 | 14 |
| $\frac{3}{4}\ de\ 60$ | 5 | 4 | 10 |
| $\frac{1}{2}\ de\ ?=0,9$ | 7 | 4 | 8 |
| $0,2\ de\ 10$ | 3 | 10 | 6 |
| $0,25\ de\ ?=10$ | 1 | 2 | 17 |
| $\frac{1}{3}\ de\ 120$ | 4 | 2 | 13 |
| $\frac{1}{5}\ de\ ?=8$ | 1 | 4 | 14 |
| $2,2-?=\frac{1}{5}$ | 1 | 4 | 14 |
| Uma embalagem de 250g de cereais custa 0,80€. **Qual o preço de 750g dos mesmos cereais?** | 8 | 5 | 4 |
| Quatro livros de banda desenhada custam 12,8€. **Qual o preço de cada livro?** | 10 | 2 | 5 |
| Para fazer refresco de laranja é necessários $\frac{1}{10}l$ de concentrado por cada $\frac{1}{2}l$ de água. **Que quantidade de concentrado se deve usar para fazer $1,5l$ de refresco?** | 3 | 5 | 9 |
| O João desenhou, numa folha de papel, a distância de casa à escola através de um segmento de 1,5 cm. Sabendo que a escala que usou foi de 1:200. **Qual a distância real de casa à escola?** | 0 | 6 | 11 |
| O perímetro da face de um depósito cúbico é 8,8 $m$. **Qual a medida do lado?** | 6 | 11 | 2 |

| Questões com duas representações | Número de respostas | | |
|---|---|---|---|
| | Corretas | Incorretas | Não responde |
| | TL | TL | TL |
| O Luís encheu $\frac{3}{6}$ de um depósito de água e a Joana 0,5 desse mesmo depósito. **Quem colocou mais água no depósito?** | 8 | 4 | 6 |
| Uma tina tem de capacidade $22{,}5\ l$ . **Quantos baldes de $\frac{1}{2}\ l$ são necessários encher para despejar por completo a tina?** | 6 | 8 | 5 |
| O sólido A tem $8{,}4\ l$ de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. **Calcula a capacidade do sólido B** | 0 | 9 | 9 |
| A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com $8{,}16\ m$ retirou $\frac{1}{8}$ . **Que porção de tecido usou?** | 2 | 8 | 9 |
| O avô do João já gastou $\frac{5}{10}$ da capacidade de um depósito de água na rega do jardim. **Quanto lhe falta para esvaziar o depósito?** | 10 | 3 | 6 |
| Na turma da Rita $\frac{4}{8}$ dos alunos pratica futebol e 25% pratica natação. **Que percentagem de alunos não pratica qualquer modalidade?** | 6 | 4 | 9 |